

سال دهم

آموزش مفهوم ریاضهٔ ۱

محمود نصیری

- آموزش کامل مفهوم‌ها با رویکرد حل مسأله و فعالیت محور
- بررسی مفهوم‌های چالش بر انگیز
- شامل بیش از ۲۵۰ مثال و فعالیت
- شامل بیش از ۱۰۰ تمرین موضوعی و دوره‌ای
- همراه با حل کامل تمرین‌ها در CD

به نام همتی بخش

مقدمه

با تغییر نظام آموزشی، کتاب‌های دبیرستانی نیز با تغییر روبه‌رو شده است. کتاب حاضر نیز در راستای کتاب ریاضی (۱) ویژه سال دهم رشته ریاضی و تجربی است، بنابراین مطالب این کتاب مطابق با همان سرفصل‌های کتاب درسی نوشته شده است. هم‌چنین سعی کرده‌ایم که تمام مطالب کتاب درسی با دقت و به‌طور مفهومی مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد.

در این راستا تعریف‌ها یا قراردادهای کتاب دقیقاً مطرح شده‌اند اما ممکن است در بعضی موارد به بحث بیش‌تر پرداخته و از نظر دقیق‌تر کردن مفهوم‌ها و چالش‌هایی که وجود دارند با مطالب بیش‌تری روبه‌رو شوید. هم‌چنین ممکن است نحوه ورود به یک مفهوم و یا مطلب با نحوه ورود آن در کتاب درسی متفاوت باشد.

در ساختار کتاب هدف ارایه روش‌های جدید آموزشی است، حال تا چه اندازه موفق شده باشیم، پرسشی است که شما عزیزان باید پاسخ دهید. بیش‌تر ویژگی‌های کتاب به شرح زیر است:

۱. سعی شده است در شروع مفاهیم به روش حل مسأله وارد مفهوم مورد نظر شده و سپس به ارایه تعریف‌های تا حد امکان دقیق‌تر، بپردازیم.
 ۲. بعد از ارایه تعریف‌ها و مفهوم‌های اساسی مثال‌های متعددی در مورد آن مطرح شده است که سعی بر این بوده که در ابتدا از مثال‌های ساده‌تر استفاده کنیم.
 ۳. به منظور تثبیت بهتر مفاهیم تعدادی فعالیت نیز در کتاب گنجانده شده تا خود دانش‌آموز بتواند به تسلط بیش‌تر بر مفاهیم دست یابد.
 ۴. از ویژگی‌های مهم این کتاب، بررسی مفاهیم چالش‌برانگیز است که هر چند ممکن است مورد توجه همه دانش‌آموزان نباشد، اما می‌تواند مورد استفاده همکارانی که کتاب سال دهم را تدریس می‌کنند واقع شود.
 ۵. پایان هر بخش شامل تمرین‌های به اندازه کافی برای دانش‌آموزان می‌باشد و در پایان هر فصل نیز تعداد زیادی تمرین با عنوان تمرین‌های دوره‌ای و پیشرفت گنجانده شده است. پاسخ تمرین‌ها در یک CD یا کتاب جداگانه خواهد بود، تا فرصت کافی برای تفکر بیش‌تر برای دانش‌آموزان وجود داشته باشد.
 ۶. کتاب دارای بخش‌هایی به نام بیش‌تر بدانیم نیز می‌باشد تا متناسب با علاقه دانش‌آموزان آن‌ها را در یادگیری مطالب بالاتر از سطح کتاب یاری دهد.
 ۷. این کتاب مجموعه کاملی از مفاهیم درسی با بیانی ساده و روان می‌باشد که هر دانش‌آموزی متناسب با نیاز خود و مدرسه‌اش می‌تواند از آن استفاده کند. حتی دبیران و مدرسان این درس نیز می‌توانند با توجه به سطح دانش‌آموزان خود از کتاب استفاده کنند.
- لازم به ذکر است که از آوردن پرسش‌های چهار گزینه‌ای در کتاب پرهیز شده است زیرا اعتقاد اینجانب بر این است که در سال دهم درگیر کردن دانش‌آموزان با نکات تستی نه تنها مفید نمی‌باشد بلکه مضر خواهد بود، زیرا مانع تفهیم اساسی مفاهیم خواهد بود.
- از خوانندگان عزیز تقاضا دارم که ما را از هر نوع پیشنهاد دریغ ندارند و نظرات خود را از طریق انتشارات یا مستقیماً در اختیار این جانب قرار دهند. هم‌چنین از همکاران گرامی تقاضا دارم که در استفاده و نقل مطالب کتاب امانت را رعایت کنند.
- از آقای دهقانی مدیر محترم انتشارات مبتکران که زمینه چاپ چنین کتاب‌هایی را فراهم می‌کنند تشکر و قدردانی می‌کنیم.
- از جناب آقای محمود محمدی که با دقت فراوان کتاب را مطالعه و علاوه بر اصلاح غلط‌های حروفچینی، نقطه نظرهایی را نیز بیان کردند، نهایت تشکر را دارم.
- از جناب آقای مبین که همکاری کامل را برای آماده‌سازی کتاب برای چاپ انجام داده‌اند تشکر می‌شود.
- از سرکار خانم فیروزه مرادی برای صبر و دقتی که در حروفچینی کتاب انجام داده‌اند و خانم سمانه ایمان‌فرد، رضیه صفریان که با حوصله نمودارهای کتاب را با توجه به رنگی بودن آن انجام داده‌اند تشکر می‌کنم.

فهرست

فصل اول. مجموعه، الگو و دنباله ۷

مجموعه ۸	مجموعه تهی و زیرمجموعه ۱۲	مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۱۵	بازه ۱۹	نمودار ون ۲۱	اعمال روی مجموعه‌ها ۲۲	مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا و متمم ۲۵	اتحادهای مجموعه‌ها ۲۷	تمرین ۱ ۳۱	الگوها و دنباله‌ها ۳۳	دنباله‌های عددی ۳۶	تمرین ۲ ۴۳	دنباله حسابی ۴۵	تمرین ۳ ۴۸	دنباله هندسی ۵۱	تمرین ۴ ۶۰	تمرین‌های دوره‌ای و پیشرفت فصل اول ۶۲
----------------	---------------------------------	---------------------------------------	---------------	--------------------	------------------------------	---	-----------------------------	------------------	-----------------------------	--------------------------	------------------	-----------------------	------------------	-----------------------	------------------	---

فصل دوم. مثلثات ۶۷

مثلثات مثلث قائم‌الزاویه ۶۸	تمرین ۵ ۷۳	نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه به روش تحلیلی و دایره واحد ۷۵	زاویه‌های مرجع و تعیین نسبت‌های مثلثاتی همه زاویه‌ها ۸۰	شیب خط ۸۵	تمرین ۶ ۸۷	اتحادهای مثلثاتی ۸۸	کاربردهایی از مثلثات مساحت، قضیه سینوس و کسینوس ۹۱	تمرین ۷ ۹۷	تمرین دوره ای و پیشرفت فصل دوم ۹۹
-----------------------------------	------------------	---	---	-----------------	------------------	---------------------------	--	------------------	---

فصل سوم. رادیکال‌ها و عبارت‌های جبری ۱۰۱

توان و ریشه ۱۰۲	ریشه‌ها و رادیکال‌ها ۱۰۶	توان‌های گویا و ویژگی‌های آن‌ها ۱۱۳	تمرین ۸ ۱۲۰	عبارت‌های جبری - جمله ۱۲۲	یک جمله‌ای و چند جمله‌ای ۱۲۳	عبارت‌های نمونه در ضرب، اتحادها ۱۲۷	فاکتور - تجزیه عبارت‌های جبری ۱۳۳	تجزیه سه جمله‌ای $A = ax^2 + bx + c$ ۱۳۷
-----------------------	--------------------------------	---	-------------------	---------------------------------	------------------------------------	---	---	--

۱۳۸.....	بیش تر بدانیم. اعداد مختلط.....
۱۴۱.....	صفر چند جمله‌ای
۱۴۲.....	عبارت‌های کسری و گویا.....
۱۴۳.....	کوچک‌ترین مضرب مشترک و
۱۴۶.....	گویا کردن مخرج کسرها
۱۴۶.....	تقسیم چند جمله‌ای‌ها.....
۱۵۰.....	تمرین ۹.....
۱۵۳.....	تمرین دوره‌ای و پیشرفت فصل سوم

فصل چهارم. معادلات و نامعادلات ۱۵۷.....

۱۵۸.....	معادله - مفهوم‌های اساسی
۱۶۰.....	معادله درجه اول یک متغیره
۱۶۶.....	معادله درجه دوم و کاربردهای آن
۱۶۸.....	تمرین ۱۰.....
۱۷۱.....	زوج مرتب، نمودار معادله
۱۷۵.....	سهمی
۱۸۰.....	تمرین ۱۱.....
۱۸۱.....	تعیین علامت و نامعادله
۱۸۸.....	ویژگی‌های نامساوی‌ها.....
۱۹۰.....	نامعادلات یک متغیره درجه اول
۱۹۲.....	دستگاه نامعادله
۱۹۴.....	قدر مطلق در معادله‌ها و نامعادله‌ها
۲۰۲.....	تمرین ۱۲.....
۲۰۴.....	تمرین دوره‌ای و پیشرفت فصل چهارم

فصل پنجم. تابع ۲۰۷.....

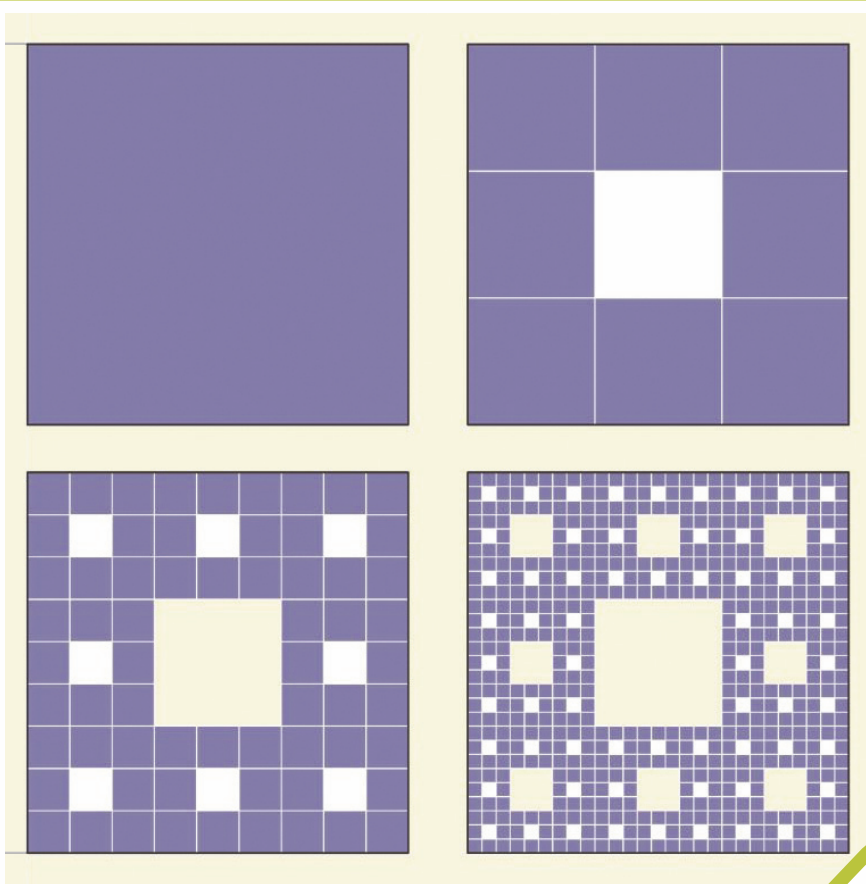
۲۰۸.....	مفهوم رابطه و تابع
۲۱۱.....	تمرین ۱۳.....
۲۱۲.....	تابع
۲۱۶.....	دامنه و برد تابع‌ها.....
۲۱۹.....	تمرین ۱۴.....
۲۲۱.....	نمایش معادله‌ای تابع
۲۲۵.....	متغیر مستقل و وابسته
۲۲۷.....	تابع‌های قطعه قطعه تعریف شده
۲۲۹.....	تمرین ۱۵.....
۲۳۲.....	انواع تابع‌ها و تابع‌های خاص
۲۳۵.....	تبدیلات در نمودارها
۲۴۵.....	تمرین ۱۶.....
۲۴۸.....	تابع‌های گویا.....
۲۵۱.....	تابع‌های رادیکالی
۲۵۶.....	معادلات تابعی
۲۵۷.....	تمرین ۱۷.....
۲۶۱.....	تمرین دوره‌ای و پیشرفت فصل پنجم

فصل ششم. شمردن بدون شمارش (ترکیبیات) ۲۶۹

۲۷۰	شمارش معمولی - شمارش ترکیبیاتی
۲۷۲	هم‌ارزی ترکیبیاتی
۲۷۵	تمرین ۱۸
۲۷۶	فانون‌های اساسی در شمارش
۲۷۸	دنباله‌های دودویی
۲۸۰	جای‌گشت
۲۸۴	تمرین ۱۹
۲۸۶	اصل جمع
۲۸۹	ترکیب
۲۹۰	ویژگی‌هایی از نماد ترکیب
۲۹۳	مسیرها در شبکه‌های مستطیلی
۲۹۵	تمرین ۲۰
۲۹۷	تمرین‌های دوره‌ای و پیشرفت فصل ششم

فصل هفتم. احتمال و آمار ۳۰۱

۳۰۲	احتمال
۳۰۳	فضای نمونه‌ای
۳۰۴	انواع فضاهای نمونه‌ای
۳۰۶	پیشامدهای تصادفی



مجموعه، الگو، دنباله

فصل اول

این فصل شامل دو بخش است. مجموعه، الگو و دنباله.

در یکی دو قرن اخیر مجموعه یکی از ابتدایی ترین و هم اساسی ترین مفاهیم ریاضی است. به همین دلیل دانش آموزان از دوران ابتدایی با آن ها آشنا می شوند. مجموعه ها در تمام شاخه های ریاضی چنان کاربردی پیدا کرده است که مفاهیم های اولیه خیلی از این شاخه ها وابسته به مجموعه است. هر چند در سال های قبل با مجموعه آشنا می شوید، اما در این کتاب از ابتدایی ترین مفاهیم های مجموعه شروع می کنیم و تمام ویژگی های اولیه آن و اعمال روی مجموعه ها و مجموعه های متناهی و نامتناهی را نیز بررسی می کنیم. همچنین در این قسمت مفهوم بازه ها را نیز که زیرمجموعه هایی از اعداد حقیقی می باشد، تعریف می کنیم. بخش دوم این فصل الگوها و دنباله ها می باشند.

یکی از مهم ترین کاربردهای ریاضی کشف و مشخص کردن الگوهای منظم است، به طوری که این ارتباط و کشف دارای مرحله هایی می باشند که معمولاً تکرار می شوند. یکی از مفاهیم ریاضی که در این راستا به کار برده می شود دنباله نام دارد. بنابراین در این فصل با مفهوم دنباله آشنا می شویم و انواعی از دنباله ها را همراه با ویژگی هایی از آن ها بررسی می کنیم از مهم ترین انواع این دنباله ها دو دنباله به نام های دنباله تصاعد حسابی و دنباله هندسی می باشند. ابتدا مفهوم دنباله را در حالت کلی بررسی می کنیم.

مجموعه SET

مجموعه یکی از اساسی‌ترین مفهوم‌های ریاضی است که نه تنها در ساختار ریاضیات شمارشی و به‌طور کلی ریاضیات گسسته بلکه در ریاضیات پیوسته نیز نقش اساسی دارد. حتی امروزه مفاهیم اولیه هندسه را که تاریخی بسیار قدیمی‌تر از مجموعه‌ها دارد، بر مبنای مجموعه‌ها بیان می‌کنند، تقریباً غیر ممکن است که در مطالعه ریاضی مدرن در هر سطحی به مجموعه برخورد نکنیم. مجموعه‌ها تاریخ طولانی ندارند به همین دلیل یکی از مباحث ریاضی جدید می‌باشند.

جرج کانتور GEORG CANTOR، (۱۸۴۵ - ۱۹۱۸) به عنوان بنیان‌گذار نظریه مجموعه‌ها شناخته می‌شود.

مجموعه یکی از مفهوم‌های اولیه محسوب می‌شود، زیرا در ابتدا فهم آن ساده است و به آسانی قابل درک است، معمولاً همه افراد درک شهودی از آن دارند. در واقع مجموعه مفهومی آشنا برای هر سن و سالی می‌باشد و بدون آن که تعریفی از آن بیان کنند آن را به کار می‌برند. مثلاً مجموعه اعضای یک خانواده، مجموعه گوسفندهای یک چوپان، مجموعه کارگران یک کارخانه، همه و همه نمونه‌هایی از مجموعه می‌باشند.

در نظریه مجموعه‌ها تعریف رسمی از مجموعه بیان نمی‌شود، اما در سطوح مقدماتی تعریفی شهودی و غیر رسمی از آن بیان می‌کنند. مجموعه یکی از مفهوم‌های بنیادی است که برای گروهی از اشیاء با هم به کار می‌رود. معمولاً و نه همیشه اشیاء یک مجموعه ویژگی‌های مشابهی دارند.

مجموعه، دسته‌ای یا گردایه‌ای از اشیاء بدون ترتیب است. که آن‌ها را عضوهای آن مجموعه می‌نامند.

هر مجموعه شامل عضوهای خود است و دقیقاً با اعضای خود مشخص می‌شود. هر شیء مفروضی

یا عضو مجموعه است یا عضو آن مجموعه نمی‌باشد.

برای نشان دادن عضویت در مجموعه‌ها از نماد $\in$ استفاده می‌کنیم که به معنای تعلق داشتن است.

نمایش $x \in A$ به این معنی است که شیء x عضو مجموعه A است یا x متعلق به A است.

نمایش $x \notin A$ به این معنی است که شیء x عضو A نمی‌باشد.

فقط شرطی را که در این تعریف غیر رسمی مجموعه، باید همواره در نظر داشته باشیم آن است که به‌طور واضح باید مشخص کنیم چه اشیایی عضو مجموعه هستند و چه اشیایی عضو مجموعه نیستند. در اصطلاح باید خوش تعریف باشد. مثلاً اگر ما سعی کنیم مجموعه‌ای مانند P تعریف کنیم که مجموعه همه افراد زیبای دنیا باشد، معیار دقیقی وجود ندارد که به کمک آن نشان دهیم چه فردی به این مجموعه تعلق دارد و چه فردی تعلق ندارد. زیرا ملاک زیبایی در بین افراد متفاوت است. در این صورت، گوییم P مجموعه‌ای خوش تعریف نمی‌باشد. بنابراین اصلاً مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

نشان دادن مجموعه‌ها

روش‌های مختلفی برای نشان دادن مجموعه‌ها وجود دارد. یک روش آن است که وقتی امکان آن وجود داشته باشد، همه عضوهای مجموعه را بین دو آکولاد قرار می‌دهیم. برای نمونه نمایش $A = \{0, 1, \sqrt{2}, \pi\}$ نشان دهنده یک مجموعه با چهار عضو، 0 ، 1 ، $\sqrt{2}$ و π می‌باشد. $\sqrt{2} \in A$ و $3/14 \notin A$.

این نمایش را روش فهرستی (roster method) یا لیستی می‌نامند.

حرف‌های صدا دار الفبای انگلیسی $V = \{a, e, i, o, u\}$ می‌باشند. در این روش نماد « $\{$ »، « $\}$ » را بین اعضا قرار می‌دهیم، تا تمایز اعضا از هم مشخص باشد.

این روش بیش‌تر در مجموعه‌های متناهی به کار می‌رود که به زودی تعریف خواهیم کرد. هر چند که معمولاً مجموعه‌ها برای گروهی از اشیاء که ویژگی مشترکی دارند به کار می‌رود اما این کلی نیست و شما می‌توانید مجموعه‌ای بنویسید که عضوهای آن‌ها هیچ ویژگی مشترکی نداشته باشند یا هیچ ربطی به هم نداشته باشند مانند، $\{a, 1\}$ خودکار، سیب، $\{1, a\}$ در روش لیستی نمایش مجموعه‌ها، وقتی یک الگوی آشکاری بین عضوهای یک مجموعه برقرار باشد که به کمک آن بتوانیم تمام اعضا را مشخص کنیم، معمولاً تعدادی از اعضا را نوشته و برای بقیه از چند نقطه استفاده می‌کنیم. مثلاً وقتی بخواهیم اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ را نشان دهیم، آن را به صورت $N_{99} = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ می‌نویسیم.

به جای نوشتن بقیه عددهای این مجموعه از نقطه‌ها استفاده کرده‌ایم. البته در این نوع نوشتن باید خیلی دقت کنیم، به منظور جلوگیری از سردرگمی در این روش باید حتماً اطلاع کامل از عضوهای مجموعه داشته باشیم. مثلاً، $\{1, 3, \dots, 15\}$ ممکن است نشان‌دهنده اعداد طبیعی فرد کوچک‌تر یا مساوی از ۱۵ باشد، اما این ممکن است نشان‌دهنده مجموعه، $\{1, 3, 6, 10, 15\}$ باشد که نشان‌دهنده ۵ عدد اولیه مثلثی هستند و از این الگو پیروی می‌کند که اختلاف هر جمله از جمله قبلی را اگر پیدا کنیم به اعداد ۲، ۳، ۴، ۵ می‌رسیم که خود معنی خاصی دارد.

دومین روش نشان دادن مجموعه‌ها، نمایش به وسیله ویژگی یا ویژگی‌های مشترک بین تمام عضوهای آن مجموعه است، که آن را نمایش مجموعه سازنده می‌نامند. در این روش معمولاً معیار توصیف اعضا در مجموعه یک روش کلامی است، که همراه با نماد مجموعه به کار می‌رود.

مثلاً برای نوشتن اعداد اول کوچک‌تر از ۲۰، به جای نوشتن مجموعه $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ می‌نویسیم؛
 $A = \{x \mid x \text{ عدد اول کوچک‌تر از } 20 \text{ است}\}$
 نشان دادن مجموعه اعداد اول غیر ممکن است پس آن‌ها را با نشان دادن ویژگی منحصر به فرد خود که همان ویژگی اول بودن است و قبلاً تعریف کرده‌ایم به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$P = \{p \mid p \text{ عددی اول است}\}$$

مفهوم‌های «شرط داشتن» و «ویژگی داشتن» رابطه‌های تنگاتنگی با مفهوم مجموعه دارند.

$$S = \{x \mid x \text{ شرط یا ویژگی در مورد } x\}$$

این نوع نمایش بیش‌تر در نشان دادن مجموعه‌هایی به کار می‌رود که نوشتن لیست تمام عضوهای مجموعه امکان‌پذیر نمی‌باشد. مثلاً Q^+ مجموعه تمام اعداد گویای مثبت است که به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$Q^+ = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q} \text{ و } p, q \text{ اعداد صحیح و مثبت اند} \right\}$$

می‌توانیم این مجموعه را به صورت،

$$Q^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ اعداد صحیح و مثبت اند} \right\}$$

نیز نشان دهیم.

اما نمایش اول در موارد زیادی از بعضی ابهام‌ها جلوگیری می‌کند.

$$\text{وقتی می‌نویسیم، } \{x \mid x \text{ بزرگ‌تر از } 1 \text{ و کوچک‌تر از } 6\}, A = \{x \mid 1 < x < 6\},$$

ممکن است کسی تصور کند که، $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ، یعنی x را فقط اعداد طبیعی در نظر بگیرد، و ممکن است شخص دیگری بیان کند که منظور تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر از ۶ است. برای جلوگیری از این ابهام بهتر است مشخص شود x از چه مجموعه‌ای باید انتخاب شود. وقتی چنین توافقی را می‌پذیریم، گوییم یک مجموعه مرجع یا عالم سخن را معین کرده‌ایم، که معمولاً آن را به U یا M نشان می‌دهند.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ بزرگ‌تر از } 1 \text{ و کوچک‌تر از } 6 \text{ است}\}$$

$$\text{یا } \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ بزرگ‌تر از } 1, \text{ کوچک‌تر از } 6 \text{ است}\}.$$

در این صورت دیگر هدف ما از مجموعه A کاملاً مشخص است.

مجموعه‌هایی مانند Z و R در این دو نمایش مجموعه‌های مرجع نامیده می‌شوند.

مجموعه مرجع مجموعه در برگیرنده تمام اشیاء است که این عملاً غیر طبیعی به نظر می‌رسد، اما در نوشتن هر مجموعه‌ای معمولاً تصویری از یک مجموعه کلی‌تر در ذهن ما ممکن است وجود داشته باشد و این یک امر قراردادی است، به همین منظور مجموعه مرجع از اهمیت چندانی برخوردار نمی‌باشد.

بستگی به حوزه‌ای که در آن کار می‌کنیم مجموعه مرجعی نیز برای آن در نظر می‌گیریم. در مواردی مجموعه اعداد طبیعی یا اعداد صحیح در مواردی تمام اعداد حقیقی را مجموعه مرجع انتخاب می‌کنیم.

کاربرد مجموعه مرجع فقط برای جلوگیری از ابهام‌هایی است که در بالا توضیح دادیم و هم‌چنین در تعریف متمم یک مجموعه است که بعداً بررسی می‌کنیم.

مجموعه‌های مهمی که با آن‌ها بیش‌تر سروکار داریم؛

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$	مجموعه اعداد طبیعی،
$W = \{0, 1, 2, \dots\}$	مجموعه اعداد حسابی،
$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	مجموعه اعداد صحیح،
$Z^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$	مجموعه اعداد صحیح و منفی،

واضح است که $Z^+ = N$.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا،

مجموعه تمام اعداد حقیقی را به $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم

$E = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$	مجموعه اعداد زوج
$O = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$	مجموعه اعداد فرد

آیا می‌توانید E و O را با مجموعه‌ای به صورت نمادهای ریاضی بنویسید؟

آیا $E = \{2n \mid n \in Z\}$ و $O = \{2n - 1 \mid n \in Z\}$ درست می‌باشند، چرا؟ آیا به صورت دیگری نیز می‌توانید آن‌ها را بنویسید؟ چگونه مجموعه تمام مضرب‌های صحیح عدد ۳ را می‌نویسید؟

مجموعه‌های مساوی

ممکن است یک مجموعه به صورت‌های مختلفی نمایش داده شود، بنابراین در اینجا مساوی بودن این دو یا چند نمایش اهمیت دارد. پس باید مفهوم تساوی دو مجموعه روشن شود.

به طور غیر رسمی دو مجموعه مساوی‌اند، هرگاه دقیقاً شامل عضوهای یکسانی باشند. بنابراین، ترتیب طبق تعریف مجموعه مهم نیست. دو مجموعه، $\{1, 3, 7\}$ و $\{3, 1, 7\}$ مساوی‌اند، زیرا دقیقاً دارای عضوهای یکسانی هستند.

هم‌چنین دو مجموعه، $\{1, 3, 7\}$ و $\{1, 3, 3, 7, 7, 7\}$ مساوی‌اند، زیرا دقیقاً دارای عضوهای یکسانی هستند، بنابراین؛ تکرار اشیاء یا عضوها مهم نیست. این مهم است که چه شی به مجموعه تعلق دارد و چه شی تعلق ندارد. در این مثال، دقیقاً سه شی عضو دو مجموعه می‌باشند که هر کدام در دو مجموعه یکی هستند.

مجاز بودن عضو تکراری در مجموعه بستگی به تعریف شهودی ما از مجموعه دارد. بعضی کتاب‌ها در توصیف مجموعه، کلمه متمایز بودن عضوها را به کار می‌برند و بعضی کتاب‌ها، تکرار عضو را مجاز می‌دانند. هر کدام مزیت و مشکل خود را دارد.

موردهای زیادی وجود دارند که ما از متمایز بودن عضوها در ابتدا اطلاعی نداریم. حتی در موردهای دیگر ممکن است دچار مشکل شویم، مثلاً اگر تاسی داشته باشیم که روی یک وجه آن عدد ۱ و روی دو وجه آن عدد ۲ و روی ۳ وجه آن عدد ۳ نوشته شده باشد،

بهتر است فضای نمونه‌ای به صورت $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ نوشته شود. اگر آن را به صورت $\{1, 2, 3\}$ بنویسیم، هر دو مساوی‌اند و اشکالی ندارد اما در مورد دوم حتماً باید ذکر کنیم برآمدها هم احتمال نیستند. اشکال مجاز بودن عضو تکراری فقط در تعداد اعضا است که باید در نظر داشته باشیم، هر عضو هر تعداد هم که تکرار شده است، فقط یک بار شمرده می‌شود. تنها توصیف متمایز بودن اعضا در تعریف شهودی مجموعه همین برتری را دارد.

اما مجاز بودن تکرار عضو، برتری‌های بیش‌تری دارد. تکرار یک شی به هر تعداد به معنی آن است که به همین تعداد این شی در مجموعه وجود دارد، کافی است در شمردن عضوهای مجموعه‌هایی که می‌توانیم تعداد عضوهای آن‌ها را بشماریم و به آن‌ها عددی نظیر کنیم به تعریف زیر توجه داشته باشیم.

تعریف مجموعه S مفروض است. هرگاه دقیقاً m عضو متمایز در S وجود داشته باشند به طوری که m عددی صحیح و نامنفی (مثبت یا صفر) باشد گوییم تعداد عضوهای S برابر m است و آن را به صورت $|S| = m$ یا $n(S) = m$ نشان می‌دهیم.

یعنی کلمه متمایز را فقط در شمردن اعضا ذکر کنیم و نه در توصیف خود مجموعه.

در یک مجموعه ترتیب اعضا مهم نیست هم‌چنین یک عضو می‌تواند بیش از یک بار تکرار شود.

تعریف دو مجموعه مساوی‌اند، اگر و فقط اگر هر دو عضوهای یکسانی داشته باشند، بنابراین اگر A و B دو مجموعه باشند، گوییم A و B مساوی‌اند هرگاه هر عضو A ، عضو B و هر عضو B ، عضو A باشد، در این صورت می‌نویسیم $A = B$.

بنابراین، اگر A و B دو مجموعه باشند، برای نشان دادن $A = B$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱. فرض می‌کنیم $x \in A$ ، نشان می‌دهیم $x \in B$

۲. فرض می‌کنیم $x \in B$ ، نشان می‌دهیم $x \in A$

در نتیجه، $A = B$.

وقتی بتوانیم عضوهای دو مجموعه را بنویسیم اثبات مساوی بودن آن‌ها ساده است.

مثلاً اگر، $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\}$ و $B = \{-1, 0, 1\}$ ، این دو مجموعه مساوی‌اند، هر چند که با حل معادله هنوز به طور کامل آشنا نشده‌ایم اما $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$ که فقط به ازای $x = 0, 1, -1$ تساوی برقرار است، پس $A = \{-1, 0, 1\}$ ، که همان B است. اگر $A = \{3k - 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{1, 4, 7, \dots\}$ آیا $A = B$ ؟ چرا؟
اثبات مساوی بودن دو مجموعه که تمام عضوهای آن را نمی‌توانیم بنویسیم، کمی متفاوت است در قسمت‌های بعدی مثال‌های بیش‌تری بیان می‌کنیم.

فعالیت فرض کنید $\{x \text{ زوج است} \mid x \in \mathbb{Z}\}$ یا $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n\}$. این‌ها نیز نمایش دیگری از اعداد زوج هستند، که قبلاً

مطرح کردیم. هم‌چنین فرض کنید، $\{k, m \text{ هر دو فردند} \mid y = m + k\}$ $S = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = m + k\}$

چگونه نشان می‌دهید این دو مجموعه مساوی‌اند؟

ابتدا باید نشان دهید هر عضو E ، عضو S است. یعنی هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد فرد نوشت. پس اگر $x \in E$ آن‌گاه، $x = 2n$. چگونه این عدد زوج را به صورت مجموع دو عدد فرد می‌نویسید؟

می‌توانید به صورت‌های مختلف آن را بنویسید. اگر یکی از این دو عدد ۱ باشد دیگری چند است؟ آیا عدد، $2n-1$ فرد است؟ اکنون می‌توانید نتیجه بگیرید $x \in S$ چرا؟

قسمت دوم اثبات، آن است که ثابت کنید هر عضو S ، عضو E است. فرض کنید $y \in S$ ، طبق تعریف S ، y مجموع دو عدد فرد است. این دو عدد را چگونه نشان می‌دهید؟ $m = 2r-1$ و $k = 2r'-1$. سپس، $y = m + k = \dots = 2n$. در نتیجه $y \in E$. بنابراین، $E = S$.

SUBSET زیر مجموعه

به موردهای زیادی در مجموعه‌ها برخورد می‌کنیم که ممکن است تمام عضوهای یک مجموعه، عضوهای مجموعه دومی نیز باشند، اکنون می‌خواهیم واژه و نمادی را معرفی کنیم که رابطه بین دو مجموعه با ویژگی بالا را بیان کند. این رابطه زیر مجموعه بودن نام دارد.

تعریف مجموعه A را زیر مجموعه B می‌نامیم اگر و فقط اگر هر عضو A ، عضو B نیز باشد و می‌نویسیم، $A \subseteq B$ ، می‌خوانیم A زیر مجموعه B است. نماد $\subseteq$ به معنی زیرمجموعه بودن است.

برای این که نشان دهیم $A \subseteq B$ ، باید نشان دهیم، اگر x هر عضوی از A باشد، یعنی $x \in A$ ، آن گاه $x \in B$ یعنی به ازای هر $x \in A$ آن گاه، $x \in B$ گزاره‌ای درست باشد. برای آن که نشان دهیم A زیرمجموعه B نمی‌باشد، کافی است فقط یک عضو در A پیدا کنیم که در B وجود نداشته باشد. A زیرمجموعه B نمی‌باشد را با نماد $\not\subseteq$ نشان می‌دهیم.

مجموعه اعداد طبیعی زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد صحیح است. $N \subseteq \mathbb{Z}$

مجموعه اعداد صحیحی که توان دوم آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۳۶ است، زیرمجموعه اعداد طبیعی نمی‌باشد. زیرا $4 < 36 = (-2)^2$ اما $-2 \notin N$.

هر مجموعه A زیرمجموعه خود A است $A \subseteq A$. زیرا هر عضو A متعلق به خود A است.

مجموعه تهی و زیر مجموعه EMPTY SET

مناسب است که درک خود را از مجموعه توسعه داده و مجموعه ویژه‌ای را که هیچ عضوی ندارد نیز معرفی کنیم. این مجموعه، مجموعه تهی یا مجموعه خالی نامیده می‌شود و آن را با $\emptyset$ یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

تصور مجموعه تهی در ابتدا کمی مشکل است و شاید بگوییم مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد آیا ضروری است؟ یا اساساً چنین مجموعه‌ای می‌توان ساخت؟

اما خواهیم دید که این مجموعه ناخواسته پدید می‌آید. مثلاً، اگر بخواهیم مجموعه جواب‌های معادله $2x - 3 = 0$ را در حوزه اعداد صحیح بنویسیم، مشاهده می‌کنیم که هیچ جواب صحیحی برای این معادله وجود ندارد، زیرا جواب معادله $x = \frac{3}{2}$ است، که گویا است، اما صحیح نمی‌باشد، پس مجموعه جواب آن روی اعداد صحیح تهی است.

امروزه دلیل‌های قانع کننده زیادی برای تعریف مجموعه تهی وجود دارد. مثلاً اگر مجموعه تهی را نداشته باشیم در تعریف $A \cap B$ ، باید ذکر کنیم، $A \cap B$ فقط وقتی تعریف می‌شود که A و B حداقل یک عضو مشترک داشته باشند و مشاهده می‌کنید که این واقعیت را نمی‌توان نادیده گرفت.

مجموعه اعداد طبیعی که مربع آن‌ها کوچک‌تر از خود آن‌ها است تهی است. یعنی هیچ عدد طبیعی n وجود ندارد که $n^2 < n$.

یک جعبه پر از شیرینی را در نظر بگیرید، وقتی تمام شیرینی‌های آن خورده شود تبدیل به یک جعبه خالی از شیرینی می‌شود، یعنی

هیچ شیرینی دیگر در آن وجود ندارد به اصطلاح گوییم جعبه خالی از شیرینی یا به‌طور عامیانه‌تر جعبه خالی است.

با بررسی این نوع مثال‌ها می‌توانیم درک و تصویری از مجموعه تهی داشته باشیم.

آن چه تصورش شاید کمی مشکل تر باشد، این است که تمام این مجموعه‌های تهی مساوی‌اند، زیرا طبق تعریف تساوی دو مجموعه همه هیچ عضوی ندارند. در منطق ریاضی گوییم به انتفاء مقدم یا نفی مقدم برقرار است. وقتی در گزاره شرطی $P, P \Rightarrow Q$ ، P مقدم نادرست باشد نتیجه‌گیری $P \Rightarrow Q$ درست است. بنابراین، فقط یک مجموعه تهی وجود دارد. همچنین $\emptyset$ زیرمجموعه هر مجموعه‌ای می‌باشد. اگر $\emptyset$ زیرمجموعه یک مجموعه‌ای مانند مجموعه A نباشد، (فرض خلف) آن گاه، باید عضوی از $\emptyset$ وجود داشته باشد که در A نباشد. اما این امکان ندارد، زیرا $\emptyset$ هیچ عضوی ندارد. پس $\emptyset \subseteq A$. این نوع برهان به کار برده شده را برهان خلف می‌نامند، که قبلاً توضیح داده‌ایم.

نماد $\subset$ نیز گاهی برای زیرمجموعه بودن به کار برده می‌شود اما اکثر کتاب‌ها ترجیح می‌دهند از همان نماد $\subseteq$ استفاده کنند. این مشابه نماد $\leq$ است. بیش‌ترین دلیل این است که هر مجموعه زیرمجموعه خودش است و با به کار بردن نماد $\subset$ چنین مفهومی از بین می‌رود. نماد $\subseteq$ ترکیبی از نمادهای $\subset$ و $=$ است.

فقط ممکن است در مواردی که بخواهیم A زیرمجموعه محض B باشد. مشکل ایجاد شود، که در این حالت هم‌چنین می‌نویسیم؛ $A \subseteq B$ و $A \neq B$.

هم‌چنین مهم است که بدانیم نمادهای $\subseteq$ و $\in$ کاملاً متفاوت‌اند. $x \in A$ یعنی x عضو A است و $A \subseteq B$ یعنی A زیرمجموعه B است، بنابراین $\in$ نماد عضویت داشتن و $\subseteq$ نماد جزئیت داشتن یا همان زیر مجموعه بودن است. بنابراین $\emptyset \subseteq \{0, 1, 2\}$ درست است اما $\emptyset \in \{0, 1, 2\}$ نادرست است. تمایز بین $\subset$ و $\in$ مشابه تمایز بین x و $\{x\}$ است. نماد x اشاره به یک شی (عدد یا هر چیز دیگری) دارد و نمایش $\{x\}$ به معنی یک مجموعه است که تنها عضو آن شی x است. همیشه نوشتن $x \in \{x\}$ درست است، اما نوشتن $x = \{x\}$ یا $x \subseteq \{x\}$ درست نمی‌باشد، مگر در حالتی خاص.

اما در اینجا با ساختن مجموعه‌های جدید از روی مجموعه‌های دیگر ممکن است با چالش روبه‌رو شویم. مجموعه‌ها می‌توانند خود عضوی از یک مجموعه باشند. یعنی ممکن است عضو یک مجموعه، خودش نیز یک مجموعه باشد. مثلاً $A = \{a, \{b\}, \{a, b\}\}$. دو عضو A خودشان یک مجموعه هستند. بنابراین در این موردها باید در نوشتن عضوها و زیرمجموعه‌ها دقت کافی داشته باشیم.

مثلاً، $a \in A$ اما $b \notin A$. هم‌چنین $\{b\} \in A$ و $\{a, b\} \in A$. $\{a\} \subseteq A$ ، $\{b\} \subseteq A$.

مجموعه $\emptyset$ را در نظر می‌گیریم آیا $\emptyset \subseteq \emptyset$ ، چرا؟ مجموعه $\{\emptyset\}$ را نیز در نظر می‌گیریم، این مجموعه چند عضو دارد؟ آیا $\emptyset \in \{\emptyset\}$ درست است؟ آیا $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ نیز درست است؟ آیا تناقضی مشاهده نمی‌کنید؟

مشاهده می‌کنید که عضو یک مجموعه زیر مجموعه آن مجموعه نیز می‌باشد. آیا می‌توانید مثال دیگری ذکر کنید که عضو یک مجموعه، زیرمجموعه آن مجموعه نیز باشد؟ آیا $A = \{a, \{a\}\}$ ، می‌تواند پاسخ پرسش باشد؟ عضوهای A مشخص‌اند a و $\{a\}$ ، تمام زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

چگونه ثابت می‌کنیم یک مجموعه، زیرمجموعه، مجموعه دیگری است.

برای آن که ثابت کنیم مجموعه A ، زیرمجموعه، مجموعه B است یعنی نشان دهیم $A \subseteq B$ ؛

فرض می‌کنیم $x \in A$ و نشان می‌دهیم $x \in B$. وقتی $A \subseteq B$ و $A \neq B$ ، A را زیرمجموعه محض B می‌نامند.

مثال ۱. اگر a هر شی و A یک مجموعه باشد نشان دهید $a \in A$ ، اگر و فقط اگر $\{a\} \subseteq A$.

پاسخ فرض کنیم $a \in A$ باید نشان دهیم $\{a\} \subseteq A$ پس باید نشان دهیم هر عضو $\{a\}$ عضو A است. اما تنها عضو $\{a\}$ فقط a است و طبق فرض $a \in A$ در نتیجه، $\{a\} \subseteq A$.

به عکس، فرض کنیم، $\{a\} \subseteq A$. یعنی هر عضو $\{a\}$ ، عضو A است. اما $a \in \{a\}$ و $\{a\} \subseteq A$ در نتیجه $a \in A$.

فعالیت فرض کنید x بر ۴ بخش‌پذیر است $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ بر } 4 \text{ بخش‌پذیر است}\}$ و x بر ۲ بخش‌پذیر است $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ بر } 2 \text{ بخش‌پذیر است}\}$. شرط هر دو مجموعه را با نمادهای ریاضی بنویسید.

فکر می‌کنید کدام یک از سه رابطه زیر درست است؟

$A = B$ یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$. آن را ثابت کنید.

به صورت هر عضو B نوشت، چگونه؟
 $A = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{x \mid x = 2m, m \in \mathbb{Z}\}$ برای آن که ثابت کنید، $A \subseteq B$ باید نشان دهید هر عضو A را می توان

اما عضوهایی از B هستند که نمی توان آن ها را به صورت عضوی از A نوشت. برای آن که با مفهوم مسأله بهتر آشنا شوید، سعی کنید عضوهایی از دو مجموعه را بنویسید. سریع تر به آن پی خواهید برد.

فصلیت دو مجموعه A ، B مفروض اند به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ نشان دهید $A = B$.

اثبات ساده است. هر عضو A عضو B است و به عکس.

مجموعه C را نیز در نظر می گیریم. به طوری که، $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ چگونه ثابت می کنید $A \subseteq C$. حال با برقراری شرطهای فوق و این که $C \subseteq A$ نشان دهید $A = C$.

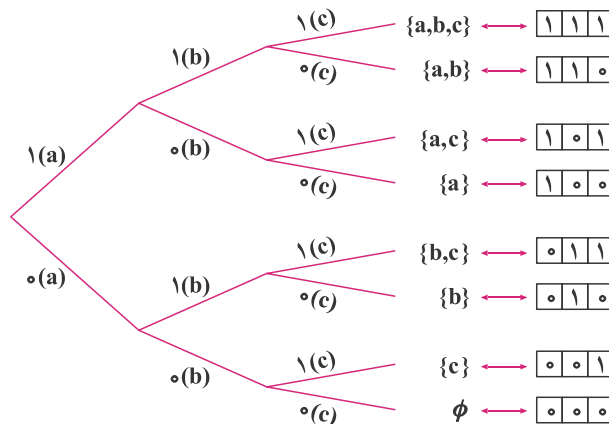
شمردن تعداد زیرمجموعه ها

چگونه تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه را تعیین می کنیم؟ مجموعه $A = \{a, b, c\}$ شامل سه عضو متمایز a ، b و c را در نظر می گیریم. تعداد عضوهای متمایز هر مجموعه A را به $n(A)$ یا $|A|$ نشان می دهیم. پس $n(A) = 3$. بنابراین زیرمجموعه های این مجموعه از صفر تا ۳ عضو می توانند داشته باشند. در جدول صفحه مقابل آن ها را مشاهده می کنید.

تعداد زیرمجموعه ها	زیرمجموعه ها	تعداد اعضا
۱	$\emptyset$	۰
۳	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	۱
۳	$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$	۲
۱	$\{a, b, c\}$	۳
۸	تعداد کل زیرمجموعه ها	

اکنون یک نمودار درختی را با قرار داد زیر رسم می کنیم.

اگر عضوی مثلاً a متعلق به زیرمجموعه باشد آن را به صورت $1(a)$ نمایش می دهیم و اگر متعلق به زیرمجموعه نباشد آن را به صورت $0(a)$ نشان می دهیم.



تعداد زیرمجموعه ها ۸ تا است. اما می خواهیم بدون شمردن، آن ها را محاسبه کنیم.

در هر حالت سه خانه داریم، که باید با تعدادی از «۱» ها و «۰» ها پر شود. پس هر خانه به دو طریق پر می شود ۰ یا ۱.

سه خانه داریم پس به $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ طریق پر می‌شوند. البته در اینجا از اصلی به نام اصل ضرب استفاده کرده‌ایم که در بخش ترکیبیات بیش‌تر توضیح می‌دهیم. وقتی عمل اول به دو طریق انجام شده باشد و سپس عمل دوم نیز به دو طریق به دنبال عمل اول صورت گرفته باشد و بالاخره عمل سوم نیز به دو طریق به دنبال عمل‌های اول و دوم صورت گرفته باشد، مانند آن است که این کار به $2^3 = 8$ طریق صورت گرفته است.

به همین ترتیب اگر مجموعه‌ای m عضو داشته باشد می‌توان نشان داد تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^m است. بنابراین؛

اگر $n(A) = m$ آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^m است.

مجموعه توانی POWER SET

چنان‌چه قبلاً نیز توضیح دادیم، می‌تواند عضو یک مجموعه، خودش نیز یک مجموعه باشد، و این موضوع، در این قسمت اهمیت بیش‌تری پیدا می‌کند. زیرا می‌خواهیم مجموعه‌ای را بنویسیم که تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه عضو آن باشند. چنین مجموعه‌ای را مجموعه توانی یک مجموعه می‌نامند.

تعریف مجموعه A مفروض است، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A را مجموعه توانی A می‌نامیم و به $P(A)$ نشان می‌دهیم.

مثلاً در مجموعه $A = \{a, b, c\}$ اگر a, b و c عضوهای متمایزی باشند، داریم؛

$$P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$$

بنابراین اگر $n(A) = m$ ، آن‌گاه $n(P(A)) = 2^m$ چرا؟

اگر $A = \{ \emptyset, \{\emptyset\} \}$ ، $P(A)$ مجموعه توانی A را بنویسید.

$$P(\emptyset) = \{ \emptyset \} \text{ و } P(\{\emptyset\}) = \{ \emptyset, \{\emptyset\} \} \text{ چرا؟}$$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها کاربردهای فراوانی در مسأله‌های شمارشی دارند و در این مورد مجموعه‌های متناهی نقش اصلی را ایفا می‌کنند. وقتی بتوانیم عضوهای یک مجموعه را بشماریم و تعداد آن‌ها را با یک عدد حسابی (صحیح و نامنفی) نشان دهیم گوییم مجموعه متناهی است.

تعریف مجموعه S مفروض است. هرگاه دقیقاً n عضو متمایز در S وجود داشته باشند، که n عددی صحیح و نامنفی باشد گوییم S مجموعه‌ای متناهی است، و n را عدد اصلی S نامیده و به $|S|$ نشان می‌دهیم.

$|S|$ را کاردینالیتی S (Cardinality) نیز می‌نامند.

هر مجموعه را که متناهی نباشد، مجموعه نامتناهی می‌نامند.

$|\emptyset| = 0$ بنابراین، $\emptyset$ نیز متناهی است. اگر S مجموعه اعداد اول یک رقمی باشد $|S| = 4$.
درک اولیه ما از مجموعه‌ها، مجموعه‌های متناهی است. درک مفهوم مجموعه‌های نامتناهی مشکل‌تر است. مجموعه اعداد طبیعی یک مجموعه نامتناهی است.

$N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ را قطعه‌ای از اعداد طبیعی، از ۱ تا k و شامل k می‌نامیم. این یک مجموعه متناهی با k عضو است.

هرگاه بتوانیم تناظری یک به یک بین عضوهای یک مجموعه S و N_k برقرار کنیم، S یک مجموعه متناهی با k عضو است.

با یک تعریف ساده، بیان کردیم که هر مجموعه را که متناهی نباشد، نامتناهی می‌باشد. اما پشت پرده این تعریف ساده ماجراهای پیچیده‌ای قرار دارد. شاید، ساده‌ترین نوع مجموعه‌های نامتناهی، همان مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح باشند. یکی از این مفاهیم پیچیده، مقایسه یا همان بزرگی و کوچکی این مجموعه‌های نامتناهی است. دو مجموعه متناهی را از نظر تعداد اعضا به سادگی می‌توانیم مقایسه کنیم، اما در مورد مجموعه‌های نامتناهی نمی‌توانیم این روش را به کار ببریم.

وقتی مجموعه‌های اعداد طبیعی و اعداد صحیح را از نظر اعضا مقایسه می‌کنیم، مشاهده می‌کنیم که مجموعه اعداد صحیح، عضوهایی دارد که در مجموعه اعداد طبیعی وجود ندارند. به نظر می‌رسد که باید مجموعه اعداد طبیعی مجموعه کوچک‌تری از مجموعه اعداد صحیح باشد، اما از نظر تعداد اعضا نمی‌توانیم از شمارش اعضا استفاده کنیم. در اینجا از مفهوم دیگری که همان تعمیم N_k است استفاده می‌کنیم. یعنی همان مفهوم تناظر یک به یک برقرار کردن بین عضوهای بعضی مجموعه‌ها و مجموعه اعداد طبیعی. که این خود نیاز به مطالب بیش‌تری از جمله تابع‌های یک به یک دارد. البته مجموعه‌های نامتناهی نیز وجود دارند که بین عضوهای آن‌ها و مجموعه اعداد طبیعی نمی‌توانیم تناظری یک به یک برقرار کنیم. مانند، مجموعه اعداد حقیقی بنابراین مجموعه‌های نامتناهی به دو دسته تقسیم می‌شوند.

۱. مجموعه‌های نامتناهی قابل شمارش.

۲. مجموعه‌های نامتناهی، غیر قابل شمارش.

شمردن در ریاضی با شمردن در زبان عامیانه متفاوت است. معمولاً مجموعه‌های قابل شمارش در زبان عامیانه متناهی هستند.

تعریف مجموعه‌ای را قابل شمارش گوئیم هرگاه متناهی باشد، یا بین آن مجموعه و اعداد طبیعی بتوانیم یک تناظر یک به یک برقرار کنیم.

یعنی مجموعه نامتناهی S را قابل شمارش گوئیم، هرگاه هر عضو S متناظر با یک و فقط یک عدد طبیعی و هر عدد طبیعی متناظر با یک و فقط یک عضو S باشد. مثلاً اگر $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.

N:	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	n	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕		↕	
S:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	a_n	...

در این صورت گوئیم S و N دارای یک کاردینالتی هستند، اگر E مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد آن گاه؛

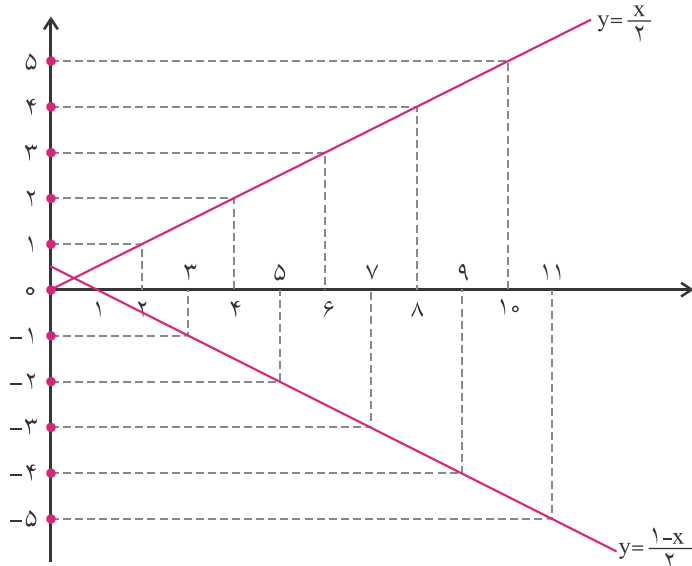
N:	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	n	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕		↕	
E:	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	...	۲n	...

بنابراین مجموعه اعداد طبیعی زوج قابل شمارش است.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که مجموعه اعداد طبیعی فرد و حتی مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد گویا نیز قابل شمارش‌اند. وقتی با مفهوم تابع و مفهوم‌های دیگری از اعداد بیش‌تر آشنا شویم، می‌توانیم ثابت کنیم که مجموعه اعداد حقیقی حتی مجموعه اعداد حقیقی بین صفر و یک شمارش‌پذیر نیستند.

شمارش‌پذیری اعداد صحیح

دو خط $y = \frac{x}{2}$ و $y = \frac{1-x}{2}$ را رسم کنید، سپس روی خط $y = \frac{1-x}{2}$ به ترتیب عددهای فرد، ۱، ۳، ۵، ... قرار داده و y را محاسبه کنید. همچنین روی خط $y = \frac{x}{2}$ به ترتیب اعداد زوج، ۲، ۴، ۶، ... را قرار داده y را محاسبه کنید.



به این ترتیب می‌توانیم مجموعه اعداد صحیح را به وسیله اعداد طبیعی تولید کنیم و هم می‌توانیم نشان دهیم که چگونه می‌توان تناظری یک به یک به این دو مجموعه برقرار کرد و نشان داد که مجموعه اعداد صحیح یعنی $\mathbb{Z}$ ، قابل شمارش است.

مجموعه‌های کراندار و بی‌کران BOUNDED AND UNBOUNDED

بعد از دو مفهوم متناهی و نامتناهی در مجموعه‌ها دو مفهوم دیگر در مجموعه‌ها تعریف می‌شوند که کراندار یا محدود بودن و بی‌کران یا نامحدود بودن است. مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ را در نظر می‌گیریم تمام عضوهای A از ۳ کوچک‌تر یا مساوی آن هستند. وقتی چنین عددی با این ویژگی برای عضوهای A وجود دارد گوییم مجموعه A از بالا کراندار است.

به همین ترتیب، تمام عضوهای A از -2 یا هر عدد m که $m \leq -2$ بزرگ‌تر یا مساوی آن می‌باشند. در این صورت گوییم A از پایین کراندار است. در حالت اول $M = 3$ را یک کران بالا و در حالت دوم m را یک کران پایین مجموعه A می‌نامند.

وقتی تمام اعداد گویای بین صفر و ۱، یعنی، $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ را در نظر می‌گیریم، تمام عضوهای این مجموعه کوچک‌تر از ۱ و بزرگ‌تر از صفر می‌باشند.

حتی برای $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ نیز چنین دو عددی وجود دارند. هر عضو B از ۲ و هر عدد $M \geq 2$ کوچک‌تر یا مساوی می‌باشند. همچنین هر عضو B بزرگ‌تر از صفر می‌باشد، حتی اگر m هر عدد کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد هر عضو B از آن بزرگ‌تر است.

تمام مجموعه‌های بالا در یک مفهوم مشترک‌اند. این که عددی وجود دارد که تمام عضوهای آن‌ها از آن عدد کوچک‌تر یا مساوی هستند و عددی وجود دارد که تمام عضوهای آن‌ها از آن عدد بزرگ‌تر یا مساوی‌اند. هر مجموعه با چنین ویژگی را کران‌دار از بالا و کران‌دار از پایین می‌نامند.
بنابراین؛ تعریف‌های زیر را داریم؛

تعریف فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای ناتهی از اعداد حقیقی باشد، هرگاه عدد حقیقی M وجود داشته باشد که به ازای هر عضو x از S ، داشته باشیم، $x \leq M$ ، آن‌گاه گوییم S از بالا کران‌دار است و M را یک کران بالای S می‌نامیم.

هم‌چنین اگر عدد حقیقی m موجود باشد که به ازای هر عضو x از S ، داشته باشیم $x \geq m$ ، آن‌گاه گوییم S از پایین کران‌دار است و m را یک کران پایین S می‌نامند.

مجموعه غیر تهی S را کران‌دار گوییم هرگاه، هم از بالا، و هم از پایین کران‌دار باشد.

کلمه کران‌دار را گاهی محدود نیز می‌نامند هر دو به یک معنی هستند. هر مجموعه را که کران‌دار نباشد بی‌کران می‌نامند. ممکن است مجموعه‌ای از بالا بی‌کران اما از پایین کران‌دار باشد یا از بالا کران‌دار و از پایین بی‌کران باشد. در هر دو صورت این مجموعه کران‌دار نمی‌باشد و آن را بی‌کران می‌نامند. مثال‌هایی برای هر دو بیان کنید. مجموعه اعداد طبیعی از پایین کران‌دار اما از بالا بی‌کران است. پس مجموعه‌ای بی‌کران است. به‌طور شهودی وقتی مجموعه‌ای چنان باشد که به ازای هر عدد حقیقی M که در نظر بگیریم این مجموعه عضوی بزرگ‌تر از M داشته باشد گوییم از بالا بی‌کران است. به همین ترتیب برای بی‌کران از پایین می‌توان بیان کرد. مجموعه اعداد صحیح منفی از پایین بی‌کران است.

مجموعه اعداد صحیح از بالا و پایین هر دو بی‌کران است.

هر مجموعه متناهی کران‌دار است چرا؟

آیا هر مجموعه کران‌دار، متناهی است؟

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ را در نظر بگیرید.

توجه داشته باشید که برای تعیین کران‌داری یک مجموعه از بالا یا پایین، پیدا کردن یک عدد با ویژگی تعریف کافی است. مثلاً $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$ از بالا کران‌دار است کافی است بگویید هر عضو آن از ۲ کمتر است هر چند $\sqrt{2}$ نیز یک کران بالای آن می‌باشد، هر عدد بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{2}$ نیز اختیار کنید درست است. برای کران پایین نیز به همین صورت است. بعداً مفاهیمی را در سال‌های بعد مطالعه خواهید کرد که کوچک‌ترین این کرانه‌های بالا و بزرگ‌ترین این کرانه‌های پایین از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشند. اما وارد این بحث نخواهیم شد.

در ارتباط با مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارش‌پذیر کران‌دار و بی‌کران در تمرین‌ها پرسش‌هایی را مطرح خواهیم کرد که در تفهیم بیش‌تر این مفاهیم مؤثر خواهد بود.

اکنون نوعی از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی را بررسی خواهیم کرد که ارتباط نزدیکی با کران‌داری و بی‌کرانی دارند و این مجموعه‌ها نه متناهی‌اند نه شمارش‌پذیر بلکه زیرمجموعه‌هایی پیوستار از اعداد حقیقی‌اند، که آن‌ها را بازه می‌نامیم.

بازه INTEVAL

ابتدا می‌پذیریم که بین نقاط یک خط و مجموعه اعداد حقیقی تناظری یک‌به‌یک وجود دارد، به‌طوری که هر عدد حقیقی متناظر دقیقاً یک نقطه، و هر نقطه دقیقاً یک عدد حقیقی را مشخص می‌کند. در این صورت گوییم خط به محور تبدیل شده است و آن را خط اعداد حقیقی یا خط حقیقی نیز می‌نامند. از سال‌های قبل تا حدودی با محور اعداد حقیقی آشنایی دارید.

باید توجه داشته باشیم که محور اعداد حقیقی، یک پارچه است به این معنی که هیچ سوراخی یا رخنه‌ای در آن وجود ندارد هر نقطه متناظر یک عدد حقیقی است و بر عکس. به بیانی گوییم خط اعداد حقیقی یک مجموعه پیوستار است.

اکنون اگر دو عدد حقیقی a و b روی محور مفروض باشند به‌طوری که $a < b$ و بخواهیم اعداد حقیقی x را مشخص کنیم که بین a و b باشند، با به کار بردن نامساوی‌ها گوییم $x > a$ و $x < b$ ، به جای این دو نامساوی می‌توانیم نامساوی دوگانه یا مضاعف، $a < x < b$ را بنویسیم.



به‌طور مثال، نامساوی $-1 < x \leq 2$ نشان می‌دهد که x بین -1 و 2 و برابر خود 2 است. مجموعه همه اعداد حقیقی را که در این نامساوی صدق می‌کنند (برای همه آن‌ها این نامساوی برقرار است) یک بازه می‌نامیم، و آن را به $[-1, 2]$ نشان می‌دهیم. در حالت کلی تعریف زیر را داریم؛

تعریف فرض کنیم a و b اعداد حقیقی و $a < b$ ، مجموعه همه اعداد حقیقی بین a و b

شامل b را یک بازه می‌نامیم و به $(a, b]$ نشان می‌دهیم، بنابراین؛

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



در شکل مقابل این بازه نشان داده شده است.

عدد a را انتهای چپ بازه می‌نامیم و نماد «،»، نشان می‌دهد که خود a متعلق به بازه نمی‌باشد.

عدد b را انتهای راست بازه می‌نامیم و نماد «]»، نشان می‌دهد که b متعلق به خود بازه می‌باشد. این بازه، مجموعه‌ای کران‌دار است.

در بازه $(a, b]$ گوییم از طرف a باز و از طرف b بسته است. بستگی به این که از طرف a یا b یک بازه بسته یا باز باشد چهار حالت داریم که همگی به بازه‌های کران‌دار از اعداد حقیقی معروف‌اند.

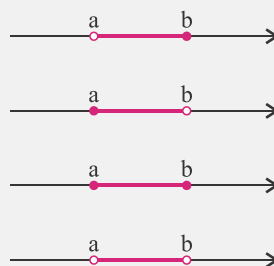
بازه‌های کران‌دار

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



a, b را در تمام حالت‌ها نقاط انتهایی بازه‌ها می‌نامند. بازه $[a, b]$ را که شامل نقاط انتهایی خود می‌باشد بازه بسته می‌نامند.

و بازه (a, b) را شامل هیچ‌کدام از نقاط انتهایی خود نمی‌باشد بازه باز می‌نامند و هر یک از بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ را نیم‌باز می‌نامند.

به طور شهودی در تمام بازه‌ها فرض بر این است که زیرمجموعه‌هایی همبند (متصل) یا به عبارتی پیوستار از اعداد حقیقی‌اند، یعنی رخنه یا سوراخی بین نقاط بازه وجود ندارد.

$I = (1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ ، $\sqrt{2}$ ، $1/000001$ و $1/99999$ و $\sqrt{3}$ متعلق به I می‌باشند، اما $0/99999$ و 1 و 2 و $2/000001$ متعلق به I نمی‌باشند.

$J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2, 2 < x \leq 3\}$ یک بازه است؟ چرا؟ J طبق تعریف بازه نمی‌باشد اما می‌توانیم آن را به صورت اجتماعی از دو بازه بنویسیم.

$$J = (1, 2) \cup (2, 3]$$

اکنون نوعی دیگری از بازه‌ها را به کار می‌بریم که به بازه‌های بی‌کران معروف‌اند.

بازه‌های بی‌کران

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ را روی محور نمایش دهید.



فکر می‌کنید عضوهای این مجموعه که کوچک‌ترین عضو آن ۲ است روی محور تا کجا ادامه دارند؟ مشاهده می‌کنید هر عددی که از این مجموعه انتخاب کنیم عددی بزرگ‌تر از آن وجود دارد، که عضو این مجموعه باشد. به زبان ریاضی به ازای هر عضو آن عضوی بزرگ‌تر از آن وجود دارد. پس چنین به نظر می‌رسد که این مجموعه از بالا بی‌کران است. اگر A کران‌دار باشد و عدد حقیقی $M > 2$ هر کران بالای آن باشد عدد $M + 1$ متعلق به مجموعه است چرا؟ پس باید از هر کران بالایی A کوچک‌تر یا مساوی باشد. یعنی $M + 1 \leq M$ که یک تناقض است. بنابراین A کران‌دار نمی‌باشد و بی‌کران است. اما اگر بخواهیم مجموعه A را به صورت یک بازه نشان دهیم، ابتدای چپ این بازه ۲ است فکر می‌کنید انتهای راست آن می‌تواند عددی حقیقی باشد؟ چرا؟

اگر A را به صورت $[2, c)$ بنویسیم، c را هر عددی اختیار کنیم باز هم عددی بزرگ‌تر از آن وجود دارد، این یک مفهوم اساسی در ریاضی است، قرار داد می‌کنیم که نمادی را برای این مفهوم اختیار کنیم این نماد را به ∞ نشان می‌دهیم و آن را بی‌نهایت می‌نامیم. پس ∞ عددی حقیقی نمی‌باشد و فقط یک نوع رفتار اعداد حقیقی را نشان می‌دهد که بزرگ‌تر شدن از هر عددی می‌باشد. بنابراین: $A = [2, +\infty)$.

این یک بازه بی‌کران می‌باشد. بهتر است بیش‌تر راجع به این نماد توضیح ندهیم. در سال‌های بعد بیش‌تر با مفهوم آن آشنا خواهید شد. پس اگر a هر عدد حقیقی باشد، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ را به صورت $B = [a, +\infty)$ نشان می‌دهیم به همین ترتیب اگر $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ آن را به صورت $C = (-\infty, a]$ نشان می‌دهیم، نماد $-\infty$ نیز مشابه $+\infty$ است، فقط این بار، $(-\infty, a]$ بازه‌ای بی‌کران از پایین است. با این مقدمه بازه‌های بی‌کران را به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم.

بازه‌های بی‌کران

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	