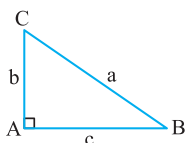


## مثلات

## فصل ۹

### قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی

#### نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه



۱۰۱۶☆ در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$ ،  $\tan B = \sqrt{2}$  و  $a = 3\sqrt{3}$  می‌باشد، اندازه ضلع  $c$  کدام است؟

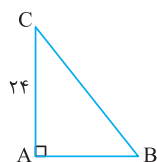
- (۱)  $\sqrt{6}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $2$  (۴)  $3$

۱۰۱۷☆ در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، زاویه  $A$  قائمه و  $\sin B = \frac{15}{17}$  است. مقدار  $\cos B + \sin C$  برابر کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $\frac{16}{17}$  (۳)  $\frac{18}{17}$  (۴)  $\frac{19}{17}$

۱۰۱۸ در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ )، اگر  $a = \sqrt{3}$  و  $c = \sqrt{5}$  باشد، حاصل  $\sin^2 A + \cot^2 A$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{49}{24}$  (۲)  $\frac{65}{24}$  (۳)  $\frac{49}{40}$  (۴)  $\frac{39}{40}$

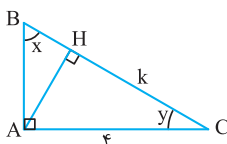


۱۰۱۹☆ در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل،  $\hat{A} = 90^\circ$ ،  $AC = 24$  و  $\cos C = \frac{4}{5}$  است. محیط مثلث  $ABC$  کدام است؟

- (۱)  $58$  (۲)  $64$  (۳)  $72$  (۴)  $80$

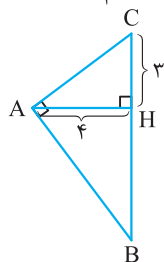
۱۰۲۰☆ در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  که  $\hat{A} = 90^\circ$  حاصل  $\frac{\cos^2 C}{\sin B \cos B}$  کدام است؟

- (۱)  $\tan B$  (۲)  $\tan C$  (۳)  $\sin B$  (۴)  $\sin C$



۱۰۲۱ در شکل مقابل، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱)  $4 \sin x$  (۲)  $4 \sin y$  (۳)  $\frac{1}{4} \sin x$  (۴)  $\frac{1}{4} \sin y$



۱۰۲۲ در شکل مقابل، مقدار کسینوس زاویه  $B$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{4}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

۱۰۲۳☆ در مثلث  $ABC$ ،  $a = 9$ ،  $b = 6$  و  $c = 3\sqrt{3}$  است. مقدار  $\cos C$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{5}{6}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

#### نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

۱۰۲۴☆ مقدار عددی عبارت  $(\cos 3^\circ + \cos 45^\circ)(\sin 6^\circ - \sin 45^\circ)$  کدام است؟

- (۱)  $3$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $1$

۱۰۲۵ مقدار  $x$  از رابطه  $\frac{2 \tan 3^\circ}{1 - \tan^2 3^\circ} = \tan x$  کدام است؟

- (۱)  $3^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $6^\circ$  (۴)  $120^\circ$

۱۰۲۶★ حاصل عبارت  $(x+y)^2 \sin^2 30^\circ - (x-y)^2 \cos^2 60^\circ$  کدام است؟

(۱)  $2xy$  (۲)  $xy$  (۳)  $2(x^2 + y^2)$  (۴)  $2(x^2 - y^2)$

۱۰۲۷★ اگر  $x$  زاویه حاده و  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، حاصل  $\cos 3x + \sin \frac{x}{2} + \tan(\frac{3}{4}x)$  برابر کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{3}{2}$

۱۰۲۸★ اگر  $x$  و  $y$  دو زاویه حاده،  $\tan(x+y) = 1$  و  $\cos(2y - \frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  باشند،  $2x - y$  کدام است؟

(۱)  $60^\circ$  (۲)  $90^\circ$  (۳)  $105^\circ$  (۴)  $15^\circ$

۱۰۲۹★ اگر  $x$  و  $y$  زوایای حاده و  $\sin(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $\cos(\frac{2x}{3} - \frac{y}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، حاصل  $\sin(x+15^\circ) + \cos 2y$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $2$

۱۰۳۰★ در مثلث شکل مقابل، اندازه ضلع  $BH$  چقدر است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $3$

۱۰۳۱★ در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{C} = 45^\circ$ ،  $\hat{B} = 60^\circ$  و  $AC = 6\sqrt{2}$  است. طول ضلع  $AB$  کدام است؟

(۱)  $4\sqrt{2}$  (۲)  $4\sqrt{3}$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۱۰۳۲★ در مثلث  $ABC$  با معلوم بودن ضلع  $BC = 3 + \sqrt{3}$  و زاویه‌های  $\hat{B} = 60^\circ$ ،  $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه ضلع  $AC$  کدام است؟

(۱)  $3$  (۲)  $4$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $3\sqrt{2}$

(سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۳)

۱۰۳۳★ طول دو قاعده یک دوزنقه متساوی الساقین ۶ و ۱۰ و یک زاویه آن  $30^\circ$  می‌باشد. طول ساق دوزنقه چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{5}{3}$  (۴)  $2$

### کاربرد مثلثات

۱۰۳۴★ یک هواپیما با زاویه  $12^\circ$  از زمین بلند می‌شود. پس از طی تقریباً چند کیلومتر با همین زاویه به ارتفاع ۴ کیلومتری از سطح زمین می‌رسد؟ ( $\sin 12^\circ \approx 0.2$ )

(۱)  $10$  (۲)  $15$  (۳)  $20$  (۴)  $25$

۱۰۳۵★ شخصی با قد  $170$  سانتی‌متر در  $12$  متری یک پرچم، مطابق شکل ایستاده است. اگر زاویه بین نوک

پرچم و محور افقی که در چشم این شخص تشکیل می‌شود،  $30^\circ$  درجه باشد، طول میله پرچم حدوداً چند متر است؟

(۱)  $6/8$  (۲)  $7/2$  (۳)  $8/1$  (۴)  $8/5$

۱۰۳۶★ یک بالن مطابق شکل، توسط دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول یکی از طناب‌ها  $30$  متر باشد، طول طناب دوم تقریباً چند متر است؟

(۱)  $20$  (۲)  $21$  (۳)  $23$  (۴)  $25$

۱۰۳۷★ برای تعیین عرض رودخانه‌ای (شکل مقابل)، دو نقطه  $B$  و  $C$  را در دو طرف آن و نقطه  $D$  را در

امتداد  $BC$  چنان در نظر می‌گیریم که طول  $DC$  برابر  $2/5$  متر و نقطه  $A$  چنان باشد که طول  $AD$  برابر  $2$  متر بوده و  $AD$  بر  $DC$  و  $AE$  عمود باشد و  $\hat{BAE} = 18^\circ$ . عرض رودخانه (طول  $BC$ ) تقریباً چند متر است؟ ( $\tan 72^\circ \approx 3$ )

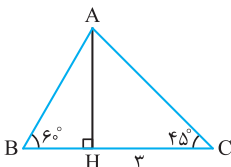
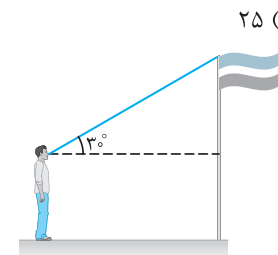
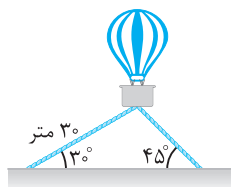
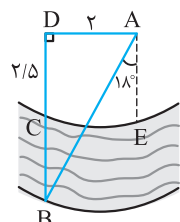
(۱)  $3/5$  (۲)  $3$  (۳)  $4/5$  (۴)  $4$

۱۰۳۸★ ناظری به فاصله  $35$  متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. اگر زاویه رؤیت ابتدا و انتهای مجسمه با سطح

افقی به ترتیب برابر  $40^\circ$  و  $45^\circ$  باشد، ارتفاع مجسمه به‌طور تقریبی چند متر است؟ ( $\tan 40^\circ \approx 0.8$ )

(سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۴)

(۱)  $6$  (۲)  $6/4$  (۳)  $7$  (۴)  $7/2$



## مساحت

۱۰۳۹☆ در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 30^\circ$ ،  $AB = 4$  و  $AC = 6$ ، مساحت مثلث  $ABC$  برابر کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۱۰۴۰ در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{C} = 15^\circ$ ،  $\hat{B} = 45^\circ$ ،  $AC = \sqrt{3}$  و  $AB = 8$ ، مساحت مثلث  $ABC$  چند واحد سطح است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳)  $6\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

۱۰۴۱ در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $\hat{B} = 90^\circ$ ،  $\tan A = \frac{\sqrt{5}}{4}$  و  $b = 6$ ، مساحت مثلث  $ABC$  برابر کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{5}$  (۲)  $3\sqrt{5}$  (۳) ۶ (۴) ۸

۱۰۴۲☆ در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ، طول قاعده برابر  $BC = 4\sqrt{3}$  و  $\hat{B} = 30^\circ$  است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱)  $6\sqrt{2}$  (۲)  $6\sqrt{3}$  (۳)  $3\sqrt{2}$  (۴)  $4\sqrt{3}$

۱۰۴۳☆ مساحت مثلث  $ABC$  برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر  $b = 8$  و  $c = 5$  باشد، اندازه ضلع متوسط  $a$  کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۲)

- (۱)  $\sqrt{39}$  (۲)  $\sqrt{41}$  (۳)  $3\sqrt{5}$  (۴)  $5\sqrt{2}$

۱۰۴۴ مساحت مثلث  $ABC$  برابر ۱۲ واحد مربع است. اگر  $AB = 4$ ،  $\hat{B} = 60^\circ$  و  $\hat{C} = 45^\circ$  باشد، طول ضلع  $AC$  کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$  (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{6}$  (۴) ۴

۱۰۴۵ در یک متوازی‌الاضلاع، طول دو ضلع ۴ و ۶ سانتی‌متر و یکی از زوایای داخلی آن  $150^\circ$  است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۱۰۴۶☆ متوازی‌الاضلاعی با طول یک ضلع  $6\sqrt{3}$  و اندازه یک زاویه  $120^\circ$ ، مساحتی برابر ۱۸ دارد. طول ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۰۴۷☆ در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۲ و ۸ و زاویه بین دو قطر  $135^\circ$  است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟ (سراسری تجربی - ۹۲)

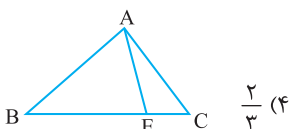
- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۱۰۴۸ مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع  $2\sqrt{3}$  کدام است؟

- (۱)  $9\sqrt{3}$  (۲)  $18\sqrt{3}$  (۳)  $24\sqrt{3}$  (۴)  $30\sqrt{3}$

۱۰۴۹☆ قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم به ضلع  $\sqrt{3}$ ، طول ضلع یک شش ضلعی منتظم دیگر است. مساحت این شش ضلعی چند برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷



- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۴)

- (۲)  $\frac{1}{5}$  (۳)

- (۴)  $\frac{1}{6}$  (۲)

- (۳)  $\frac{5}{6}$  (۱)

۱۰۵۰ در شکل مقابل اگر  $BE = 5EC$  باشد، نسبت  $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}}$  کدام است؟

## قسمت دوم: دایره مثلثاتی و نسبت‌های مثلثاتی در آن

## علامت نسبت‌های مثلثاتی

۱۰۵۱☆ کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\sin 190^\circ > 0$  (۲)  $\cos(-35^\circ) > 0$  (۳)  $\sin(-23^\circ) < 0$  (۴)  $\tan 31^\circ > 0$

۱۰۵۲☆ اگر  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$  و  $\cos \alpha \tan \alpha < 0$  باشد، آن‌گاه انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی واقع است؟ (سراسری ریاضی)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۰۵۳☆ اگر  $\sin x + \tan x > 0$  و  $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه است؟ (سراسری تجربی)

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۰۵۴ اگر  $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x} - 1 = 0$  و  $\tan x = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

- (۱) چهارم (۲) سوم (۳) دوم (۴) اول

۱۰۵۵☆ اگر  $1 - \cos \theta = \frac{5}{4}$  و  $\cos \theta \cdot \sin \theta > 0$  باشد، انتهای کمان  $\theta$  در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۰۵۶ اگر  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}$  باشد، انتهای کمان مقابل به زاویه  $\theta$  در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

## تغییرات نسبت‌های مثلثاتی

☆ ۱۰۵۷. با زیاد شدن زاویه  $\theta$  از  $90^\circ$  تا  $270^\circ$ ، نسبت مثلثاتی  $\sin \theta$  چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) همواره زیاد می‌شود. (۲) همواره کم می‌شود. (۳) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود. (۴) ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

☆ ۱۰۵۸. با زیاد شدن زاویه  $\theta$  از  $180^\circ$  تا  $360^\circ$ ، نسبت مثلثاتی  $\cos \theta$  چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) همواره زیاد می‌شود. (۲) همواره کم می‌شود. (۳) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود. (۴) ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

☆ ۱۰۵۹. کدام نامساوی زیر درست است؟

- (۱)  $\sin 40^\circ > \sin 50^\circ$  (۲)  $\sin 120^\circ > \sin 150^\circ$  (۳)  $\sin 210^\circ < \sin 240^\circ$  (۴)  $\sin 270^\circ > \sin 90^\circ$

☆ ۱۰۶۰. کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\sin 20^\circ > \cos 50^\circ$  (۲)  $\sin 30^\circ > \sin 50^\circ$  (۳)  $\cos 40^\circ > \sin 70^\circ$  (۴)  $\cos 10^\circ > \sin 50^\circ$

## نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

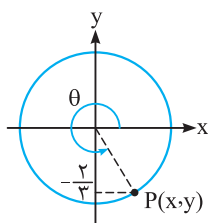
☆ ۱۰۶۱. در دایره مثلثاتی شکل مقابل، کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $\cos \theta = -\frac{2}{3}$

(۲)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(۳)  $\tan \theta = -\frac{3}{5}$

(۴)  $\cot \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$



☆ ۱۰۶۲. نقطه  $P$  به طول  $-\frac{3}{5}$  روی دایره مثلثاتی و در ناحیه دوم قرار دارد. اگر  $\theta$  زاویه بین نیم خط  $\overrightarrow{OP}$  با محور  $\overrightarrow{Ox}$  باشد،  $\tan \theta$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{4}{3}$  (۲)  $-\frac{3}{4}$  (۳)  $-\frac{3}{5}$  (۴)  $-\frac{5}{3}$

☆ ۱۰۶۳. نقطه‌ای به عرض  $-\frac{5}{13}$  روی دایره مثلثاتی و در ناحیه سوم قرار دارد. مقدار  $\cot \theta$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $2/4$  (۳)  $2/8$  (۴) ۳

☆ ۱۰۶۴. نقطه  $(1-a, b-a)$  روی دایره مثلثاتی واقع در ناحیه دوم قرار دارد. اگر  $9 = 25 \cos^2 \theta - 9$  باشد، مقدار  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $1/5$  (۳) ۲ (۴)  $2/5$

☆ ۱۰۶۵. اگر  $5 \sin x = 1 - 2m$  باشد، حدود تغییرات  $m$  کدام است؟

- (۱)  $0 \leq m \leq 1$  (۲)  $-2 \leq m \leq \frac{1}{2}$  (۳)  $-3 \leq m \leq 2$  (۴)  $-2 \leq m \leq 3$

☆ ۱۰۶۶. اگر  $90^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$  و  $\sin \theta = m + 1$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2} < m \leq 1$  (۲)  $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$  (۳)  $-1 \leq m \leq 0$  (۴)  $0 \leq m < \frac{1}{2}$

☆ ۱۰۶۷. اگر  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  و  $\cos \theta = \frac{2m-1}{2}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-1 < m < 1$  (۲)  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$  (۳)  $-1 < m < \frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2} < m < 1$

☆ ۱۰۶۸. اگر  $30^\circ \leq \alpha \leq 130^\circ$  و  $\sin \alpha = \frac{2m-1}{3}$ ، حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-1 \leq m \leq 1$  (۲)  $\frac{5}{4} \leq m \leq 2$  (۳)  $-1 \leq m \leq \frac{5}{4}$  (۴)  $-2 \leq m \leq \frac{3}{4}$

☆ ۱۰۶۹. حاصل  $|1 - \cos x| + |2 \cos x - 3|$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\cos x - 2$  (۲)  $2 - \cos x$  (۳)  $4 - 3 \cos x$  (۴)  $3 \cos x - 4$

☆ ۱۰۷۰. عبارت  $A = 3 - 2 \sin \theta$  به کدام بازه تعلق دارد؟

- (۱)  $[-1, 1]$  (۲)  $[-1, 4]$  (۳)  $[1, 5]$  (۴)  $[0, 6]$

☆ ۱۰۷۱. اگر بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت  $4 \cos x - 5$  به ترتیب  $A$  و  $B$  باشد،  $A^2 + B$  کدام است؟

- (۱)  $-8$  (۲)  $-6$  (۳)  $48$  (۴)  $54$

☆ ۱۰۷۲. کم‌ترین مقدار عبارت  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲) صفر (۳)  $-\frac{3}{8}$  (۴)  $-\frac{1}{8}$

☆ ۱۰۷۳. بیش‌ترین مقدار عبارت  $A = 3 \cos^2 x - 7 \sin x + 3$ ، از کم‌ترین مقدار آن چقدر بیش‌تر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۱۰۷۴. کمترین مقدار عبارت  $2\cos^2 x - \cos x + 1$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{8}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

۱۰۷۵. اگر  $-\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{\pi}{9}$  و  $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$  باشد، مقادیر  $m$  در کدام فاصله است؟

- (۱)  $[1, 2]$  (۲)  $[0, 2]$  (۳)  $[2, 3]$  (۴)  $[3, 4]$

### واحدهای اندازه‌گیری زاویه

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۷۶. زاویه  $\frac{2\pi}{9}$  رادیان چند درجه است؟

- (۱)  $35^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $50^\circ$  (۴)  $55^\circ$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۷۷. زاویه  $37/5^\circ$  چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{16}$  (۲)  $\frac{5\pi}{24}$  (۳)  $\frac{5\pi}{18}$  (۴)  $\frac{3\pi}{8}$

۱۰۷۸. زاویه‌های داخلی مثلثی با اعداد ۳، ۵ و ۷ متناسب می‌باشند. کوچک‌ترین زاویه مثلث بر حسب رادیان کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{5}$  (۲)  $\frac{\pi}{6}$  (۳)  $\frac{\pi}{8}$  (۴)  $\frac{\pi}{9}$

۱۰۷۹. در چهارضلعی محدب  $ABCD$ ، رابطه  $\frac{\widehat{A}}{8} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{7} = \frac{\widehat{D}}{4}$  بین اندازه زاویه‌های داخلی آن برقرار است. اندازه زاویه  $C$  بر حسب رادیان کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{12}$  (۲)  $\frac{2\pi}{3}$  (۳)  $\frac{7\pi}{12}$  (۴)  $\frac{7\pi}{9}$

۱۰۸۰. اگر  $\theta$  زاویه حاده و  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = -\frac{1}{4}$  باشد، اندازه زاویه  $\theta$  بر حسب رادیان کدام است؟

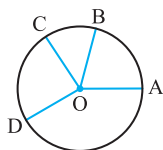
- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\frac{5\pi}{12}$

### اندازه زاویه مرکزی در دایره بر حسب رادیان

۱۰۸۱. در شکل مقابل،  $O$  مرکز دایره و طول کمان  $\widehat{AB}$  برابر  $r$  (شعاع دایره) می‌باشد. اگر  $\widehat{BC} = \frac{3}{4}\widehat{AB}$  و  $\widehat{CD} = \frac{5}{4}\widehat{CB}$  باشد، اندازه

(برگرفته از کتاب درسی)

زاویه  $\angle AOD$  (روبرو به کمان  $ABD$ ) چند رادیان است؟

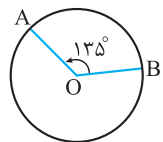


- (۱)  $\frac{29}{8}$  (۲)  $\frac{27}{8}$  (۳)  $3$  (۴)  $\frac{23}{8}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۸۲. در دایره‌ای به شعاع  $60$  سانتی‌متر، اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول یک متر، چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{1}{15}$  (۲)  $\frac{1}{60}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{5}{3}$



۱۰۸۳. با توجه به شکل مقابل، اگر طول کمان  $AB$  برابر  $3\pi$  باشد، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟

- (۱)  $16\pi$  (۲)  $9\pi$  (۳)  $\frac{9}{16}\pi$  (۴)  $\frac{16}{9}\pi$

۱۰۸۴. اگر روی دایره‌ای به شعاع  $5$  کیلومتر، مسافت  $\frac{25\pi}{3}$  کیلومتر طی شود، زاویه دوران بر حسب درجه کدام است؟

- (۱)  $230^\circ$  (۲)  $250^\circ$  (۳)  $275^\circ$  (۴)  $300^\circ$

۱۰۸۵. چه مدت طول می‌کشد که عقربه دقیقه‌شمار به اندازه  $\frac{7\pi}{5}$  رادیان دوران کند؟

- (۱)  $54$  دقیقه (۲)  $50$  دقیقه (۳)  $48$  دقیقه (۴)  $42$  دقیقه

۱۰۸۶. ابتدا نقطه  $A$  روی دایره مثلثاتی را به اندازه  $140^\circ$  دوران می‌دهیم تا به نقطه  $B$  برسیم و سپس نقطه  $B$  را به اندازه  $\frac{1}{4}$  دور کامل در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا به نقطه  $C$  برسد. طول کمان  $BC$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\frac{3\pi}{5}$  (۳)  $\frac{\pi}{3}$  (۴)  $\frac{5\pi}{18}$

## نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرزی

۱۰۸۷☆ حاصل عبارت  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ - \sqrt{3} \tan 60^\circ + 3 \cot 45^\circ - \sin^3 27^\circ$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{9}{4}$

۱۰۸۸☆ حاصل  $\frac{\sin 27^\circ + \cos 18^\circ - \tan 18^\circ}{\sin 9^\circ + \cos 0^\circ - \cot 27^\circ}$  کدام است؟

(۱)  $-1$  (۲)  $1$  (۳) صفر (۴)  $2$

۱۰۸۹☆ اگر  $5 = 3 \sin 2\alpha - 2 \cos 3\beta$  و  $\alpha$  و  $\beta$  زاویه‌های حاده باشند، حاصل  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $1$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۱۰۹۰☆ اگر  $2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$  و  $0 \leq x \leq 180^\circ$  باشد، حاصل  $\sin(180^\circ + x) + \cos(180^\circ + 2x) + \cos 3x$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $1$  (۳)  $-2$  (۴)  $-1$

## نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص بر حسب رادیان

۱۰۹۱☆ مقدار عددی عبارت  $\cos \frac{3\pi}{2} - \tan 2\pi + \frac{2}{\sqrt{3}} \cot \frac{\pi}{3}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $1$  (۳)  $2$  (۴)  $\frac{4}{3}$

۱۰۹۲☆ حاصل کسر  $\frac{\cot^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3}}{\tan^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{6}}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{3}$  (۲)  $\frac{7}{3}$  (۳)  $\frac{2}{9}$  (۴)  $\frac{7}{9}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۹۳☆ حاصل عبارت  $\tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} + \sin^2 \frac{\pi}{3}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{13}{4}$  (۲)  $\frac{15}{4}$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۰۹۴☆ مقدار عددی عبارت  $\cos^2 \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \cot \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

(۱)  $2$  (۲)  $-1$  (۳)  $1$  (۴) صفر

۱۰۹۵☆ اگر  $\theta \in [0, 2\pi]$  و  $\sin \theta = 1$  باشد، مقدار عددی  $\cos 2\theta + \sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} + \sin 3\theta$  کدام است؟

(۱)  $-1$  (۲)  $-2$  (۳)  $2$  (۴)  $1$

## علامت نسبت‌های مثلثاتی در ۴ ناحیه

$\sin \frac{4\pi}{7} < 0$  ,  $\cos \frac{6\pi}{5} < 0$  ,  $\tan \frac{11\pi}{6} < 0$  ,  $\cot \frac{13\pi}{8} > 0$

(۱) صفر (۲)  $1$  (۳)  $2$  (۴)  $3$

۱۰۹۶☆ چند تا از نامساوی‌های روبه‌رو صحیح است؟

۱۰۹۷☆ کدام یک از عبارت‌های زیر، عددی منفی است؟

(۱)  $\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{7}$  (۲)  $\sin \frac{3\pi}{5} - \tan \frac{7\pi}{8}$  (۳)  $\cos \frac{7\pi}{5} + \cot \frac{5\pi}{7}$  (۴)  $\sin \frac{4\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{6}$

## شیب خط

۱۰۹۸☆ خطی که با قسمت مثبت محور  $x$  زاویه  $45^\circ$  می‌سازد و از نقطه  $(1, 4)$  می‌گذرد، محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

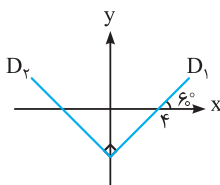
(۱)  $-5$  (۲)  $-3$  (۳)  $5$  (۴)  $3$

۱۰۹۹☆ به ازای چه مقداری از  $a$ ، خط گذرنده از دو نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ a \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ a+7 \end{bmatrix}$  با جهت مثبت محور  $x$  ها، زاویه  $45^\circ$  می‌سازد؟

(۱)  $2$  (۲)  $5$  (۳)  $7$  (۴)  $4$

۱۱۰۰☆ در شکل مقابل، خط  $D_1$  محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱)  $-12$  (۲)  $-9$  (۳)  $-3\sqrt{3}$  (۴)  $-4\sqrt{3}$



(سراسری تجربی- ۹۶)

☆ ۱۲۷۷. اگر  $\tan x = \frac{4}{3}$  باشد، مقدار  $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

☆ ۱۲۷۸. اگر  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$  باشد، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

☆ ۱۲۷۹. اگر  $\cos x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل کسر  $\frac{1 + \cos 2x + \cos 4x}{\sin 2x + \sin 4x}$  کدام است؟ ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ )

- (۱)  $\frac{7\sqrt{2}}{8}$  (۲)  $\frac{-7\sqrt{2}}{8}$  (۳)  $\frac{7\sqrt{2}}{4}$  (۴)  $\frac{-7\sqrt{2}}{4}$

## قسمت هفتم: معادلات مثلثاتی

حل معادله مثلثاتی  $\sin u = a$ 

(سراسری تجربی)

☆ ۱۲۸۰. یکی از جواب‌های معادله  $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2\pi}{3}$  (۲)  $\frac{5\pi}{6}$  (۳)  $\frac{7\pi}{6}$  (۴)  $\frac{4\pi}{3}$

☆ ۱۲۸۱. جواب‌های کلی معادله  $\Delta \sin x + 3 \cos(\frac{3\pi}{2} - x) - 1 = 0$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام‌اند؟

- (۱)  $\{1, 5\}$  (۲)  $\{1, 7\}$  (۳)  $\{5\}$  (۴)  $\{1, 5, 7\}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۲۸۲. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$  در بازه  $(0, \pi)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{8}$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۳)  $\frac{5\pi}{8}$  (۴)  $\frac{3\pi}{2}$

(سراسری تجربی- ۹۸)

☆ ۱۲۸۳. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$  (۲)  $3\pi$  (۳)  $4\pi$  (۴)  $5\pi$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۲۸۴. نمودار تابع  $y = \sin 3x$ ، خط  $y = -\frac{1}{4}$  را در بازه  $[0, \pi]$  در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(سراسری تجربی- ۹۰)

☆ ۱۲۸۵. جواب کلی معادله  $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی- ۸۷)

☆ ۱۲۸۶. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\pi + x) = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆ ۱۲۸۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $(1 + \cos 2x) \cot(\frac{\pi}{4} + x) = 1$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{3\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

☆ ۱۲۸۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۲۸۹. یکی از جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x + \sin x - 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{2\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۳)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

☆ ۱۲۹۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری ریاضی)

☆ ۱۲۹۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 3x + \sin x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $k\pi$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

☆ ۱۲۹۲. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $8\pi$  (۲)  $9\pi$  (۳)  $10\pi$  (۴)  $11\pi$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴)

☆ ۱۲۹۳. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{14\pi}{3}$  (۲)  $4\pi$  (۳)  $\frac{9\pi}{2}$  (۴)  $5\pi$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۲۹۴. چند مثلث با مساحت  $4\sqrt{3}$  و اندازه دو ضلع ۴ و ۶ وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

☆ ۱۲۹۵. نمودار تابع  $y = 1 - 3\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$  روی بازه  $[0, 2\pi]$  در چند نقطه، بیش‌ترین مقدار را دارد و مجموع طول این نقاط کدام است؟

- (۱)  $\frac{23\pi}{12}$ ، ۳ (۲)  $\frac{11\pi}{6}$ ، ۲ (۳)  $\frac{3\pi}{2}$ ، ۲ (۴)  $\frac{3\pi}{2}$ ، ۳

☆ ۱۲۹۶. تابع  $y = -3\sin(\frac{3\pi}{4}x)$  در بازه  $[0, 5]$  در نقطه‌ای با کدام طول، کم‌ترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳)  $3/5$  (۴)  $4/5$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

☆ ۱۲۹۷. نمودار تابع  $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$  روی بازه  $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$  در چند نقطه محور  $x$  را قطع می‌کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(سراسری ریاضی - ۹۵)

☆ ۱۲۹۸. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$  در بازه  $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{7\pi}{4}$  (۲)  $\frac{9\pi}{4}$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $\frac{11\pi}{3}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۸)

☆ ۱۲۹۹. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{5\pi}{2}$  (۲)  $3\pi$  (۳)  $\frac{7\pi}{2}$  (۴)  $4\pi$

حل معادله مثلثاتی  $\cos u = a$ 

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۱۳۰۰. جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $4\cos x(\cos x - 2) = -3$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی - ۸۶)

☆ ۱۳۰۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin^2 x = 3\cos x$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

☆ ۱۳۰۲. نمودار تابع  $y = x + 2\cos 2x$ ، خط  $y = x + 1$  را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$  (۴)  $\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{8}$

☆ ۱۳۰۳. نمودار تابع  $f(x) = 2\cos((2x-1)\pi)$  در بازه  $[-1, 1]$ ، محور  $x$  را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

☆ ۱۳۰۴. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

☆ ۱۳۰۵. در معادله مثلثاتی  $2\cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور)

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) مثلث قائم‌الزاویه (۳) دوزنقه (۴) مستطیل

(سراسری تجربی - ۸۷)

☆ ۱۳۰۶. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin(\pi - x) \cdot \cos(\frac{3\pi}{4} + x) + 3\cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

۱۳۰۷★ جواب کلی معادله مثلثاتی  $(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (2) k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (3) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

۱۳۰۸★ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(-x)$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2) 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (3) k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(سراسری تجربی)

۱۳۰۹ جواب کلی معادله مثلثاتی  $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2) k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (3) k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (4) k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(سراسری تجربی - ۹۵)

۱۳۱۰★ جواب کلی معادله مثلثاتی  $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (2) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (4) k\pi - \frac{\pi}{3}$$

(سراسری تجربی - ۹۴)

۱۳۱۱★ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (3) k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (4) k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۴ و ۹۸)

۱۳۱۲★ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x + \cos x = 0$ ، با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2) \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (3) k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4) k\pi + \frac{\pi}{4}$$

(سراسری تجربی - ۹۱)

۱۳۱۳★ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) \frac{k\pi}{3} \quad (2) \frac{2k\pi}{3} \quad (3) 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(سراسری تجربی - ۹۲)

۱۳۱۴★ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (2) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4) k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۳۱۵★ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x - 5\cos x + 4 = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$(1) 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3) 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4) 2k\pi$$

۱۳۱۶ معادله  $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  چند جواب دارد؟

$$(1) 3 \quad (2) 4 \quad (3) 5 \quad (4) 6$$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۳۱۷ مجموع جوابهای معادله  $\cos 3x - \sin x = 0$  در بازه  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  کدام است؟

$$(1) -\frac{\pi}{8} \quad (2) -\frac{\pi}{2} \quad (3) -\frac{3\pi}{8} \quad (4) -\frac{5\pi}{8}$$

۱۳۱۸ مجموع جوابهای معادله  $2\sin 2x + \sin 4x = 0$  در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, 2\pi)$  کدام است؟

$$(1) 2\pi \quad (2) 3\pi \quad (3) 4\pi \quad (4) 5\pi$$

۱۳۱۹ معادله  $1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$  در بازه  $(0, 2\pi)$  چند جواب دارد؟

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) 3 \quad (4) 4$$

۱۳۲۰ مجموع جوابهای معادله مثلثاتی  $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$  در بازه  $[-\pi, 2\pi]$  کدام است؟

$$(1) \frac{\pi}{2} \quad (2) \pi \quad (3) -\pi \quad (4) -\frac{\pi}{2}$$

(سراسری تجربی - ۹۱)

۱۳۲۱★ نمودار تابع  $y = -4\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ ، روی بازه  $[-1, 1]$  در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) 3 \quad (4) 4$$

۱۳۲۲★ نمودار تابع  $y = 5\cos(\frac{3\pi}{4} - \pi x) + 1$ ، روی بازه  $[-1, 2]$ ، در چند نقطه کمترین مقدار را دارد؟

$$(1) 4 \quad (2) 3 \quad (3) 2 \quad (4) 1$$

۱۳۲۳☆ نمودار تابع  $y = -2 \cos(\frac{\pi}{3} - 3x)$  در بازه  $[-\pi, \pi]$ ، محور  $x$  ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۳۲۴☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$  (که  $k \in \mathbb{Z}$ )، کدام است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۲)

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۳۲۵☆ در معادله مثلثاتی  $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ ، مجموعه تمام جواب‌ها در بازه  $[0, \pi]$ ، کدام است؟ (سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۳)

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{7\pi}{4}$

۱۳۲۶☆ نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله  $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$  بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۱)

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

۱۳۲۷☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 2x + \sin 3x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) (سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۷)

- (۱)  $\frac{k\pi}{5}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{5}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{5}$  (۴)  $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۱۳۲۸☆ یکی از جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \sqrt{3}$ ، کدام است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{7\pi}{6}$  (۲)  $k\pi + \frac{3\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

۱۳۲۹☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{4} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) (سراسری تجربی- ۹۳)

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

### حل معادله مثلثاتی $\tan u = a$

۱۳۳۰☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) (سراسری تجربی- ۹۷)

- (۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$  (۴)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۱۳۳۱☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \sin^2 x - \sin 2x = 1$ ، کدام است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) (سراسری تجربی)

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۳۳۲☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos x(\cos x - \sin x) = 1$ ، به کدام صورت است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) (سراسری ریاضی فارغ از کشور)

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۳۳۳☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) (سراسری تجربی- ۹۴)

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۳۳۴☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) (سراسری ریاضی- ۸۶)

- (۱)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۱۳۳۵☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) (سراسری تجربی فارغ از کشور- ۹۱)

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۱۳۳۶☆ اگر  $\tan x + \cot x = k - 1$ ، آن‌گاه حدود  $k$  برای آن‌که معادله جواب داشته باشد، کدام است؟

- (۱)  $-1 < k < 3$  (۲)  $k \geq 3$  یا  $k \leq -1$  (۳)  $k > 2$  (۴)  $k < -\frac{1}{2}$

۱۳۳۷☆ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $2\sqrt{3} \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = \cot \frac{x}{2}$  در بازه  $(0, 2\pi)$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{4\pi}{3}$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $\frac{7\pi}{3}$  (۴)  $\frac{11\pi}{3}$



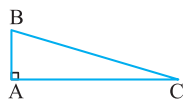
## مثلثات

۹

## پاسخ فصل

۱۰۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل، داریم:



$$\cos C = \frac{AC}{BC}, \sin B = \frac{AC}{BC}, \cos B = \frac{AB}{BC}$$

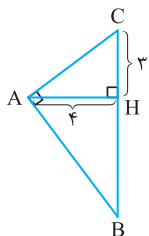
$$\Rightarrow \frac{\cos^2 C}{\sin B \cos B} = \frac{\frac{AC^2}{BC^2}}{\frac{AC}{BC} \times \frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB} = \tan B$$

۱۰۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم اگر دو زاویه  $x$  و  $y$  متمم باشند، آنگاه  $\sin x = \cos y$  و  $\cos x = \sin y$  از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه  $ACH$  داریم:

$$\cos C = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \cos y = \frac{k}{4} \Rightarrow k = 4 \cos y = 4 \sin x$$

۱۰۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\begin{aligned} \Delta AHC: AC^2 &= AH^2 + HC^2 \\ \Rightarrow AC^2 &= 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AC = 5 \end{aligned}$$

در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، دو زاویه  $B$  و  $C$  متمم یکدیگرند و در نتیجه داریم:

$$\cos B = \sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{4}{5}$$

۱۰۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴

مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه نیست

(تساوی  $a^2 = b^2 + c^2$  برقرار نیست)

پس با رسم یک ارتفاع، مثلث قائم‌الزاویه‌ای

به‌وجود می‌آوریم. با رسم ارتفاع  $AH$  و در

مثلث قائم‌الزاویه  $AHC$ ، داریم:

$$\cos C = \frac{CH}{AC} = \frac{9-x}{6}$$

برای به‌دست آوردن مقدار  $x$  از قضیه فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AH^2 &= AC^2 - CH^2, AH^2 = AB^2 - BH^2 \\ \Rightarrow AC^2 - CH^2 &= AB^2 - BH^2 \Rightarrow 6^2 - (9-x)^2 = (3\sqrt{3})^2 - x^2 \\ \Rightarrow 36 - (81 - 18x + x^2) &= 27 - x^2 \\ \Rightarrow -45 + 18x - x^2 &= 27 - x^2 \Rightarrow 18x = 45 + 27 = 72 \\ \Rightarrow x &= \frac{72}{18} = 4 \Rightarrow \cos C = \frac{9-x}{6} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

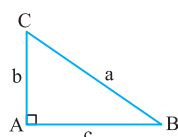
۱۰۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )،

نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده  $B$  به‌صورت زیر

تعریف می‌شوند:

$$\sin B = \frac{b}{a}, \cos B = \frac{c}{a}, \tan B = \frac{b}{c}, \cot B = \frac{c}{b}$$



در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، داریم:

$$\tan B = \frac{b}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}c, a = 3\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{رابطه فیثاغورس: } a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow (3\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2}c)^2 + c^2 \\ \Rightarrow 27 &= 2c^2 + c^2 \Rightarrow 3c^2 = 27 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \end{aligned}$$

۱۰۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل، مقدار  $\sin B$  با مقدار  $\frac{AC}{BC}$  برابر است، بنابراین:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17}$$

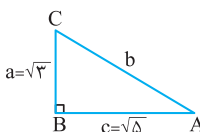
برای حل تست، می‌توان  $AC = 15$  و  $BC = 17$  در نظر گرفت. بنابر قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 - AC^2 = 17^2 - 15^2 = (17-15)(17+15) \\ &= 2 \times 32 = 64 \Rightarrow AB = 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos B + \sin C = \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{2AB}{BC} = \frac{2 \times 8}{17} = \frac{16}{17}$$

۱۰۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابر قضیه فیثاغورس داریم:



$$b^2 = a^2 + c^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 = 3 + 5 = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8}$$

$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل وتر}}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور طول ضلع مقابل}}{a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2 A + \cot^2 A = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{8} + \frac{5}{3} = \frac{9+40}{24} = \frac{49}{24}$$

۱۰۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos C = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{24}{BC} \Rightarrow BC = \frac{24 \times 5}{4} = 30$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 30^2 = AB^2 + 24^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 900 - 576 = 324 \Rightarrow AB = 18$$

$$\text{محیط مثلث} = AC + AB + BC = 24 + 18 + 30 = 72$$

# فصل ۹ مثلثات

## قسمت هفتم: معادلات مثلثاتی

**معادله مثلثاتی:** معادلاتی که بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند را معادله مثلثاتی می‌نامیم. به عنوان مثال، معادلات  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  و  $\tan x + \cot x = 1$  معادله‌های مثلثاتی هستند.

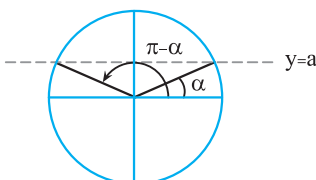
**جواب معادله:** مقدارهایی از زاویه مجهول که به ازای آن‌ها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادله مثلثاتی پیدا کردن کلیه جواب‌های آن معادله است.

به عنوان مثال، در معادله مثلثاتی  $\cos x = 1$  داریم:  $\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{1} = \cos \frac{\pi}{1} = \cos(-\frac{\pi}{1})$   
 به عنوان مثال، در معادله مثلثاتی  $\cos x = 1$  داریم:  $x = -\frac{\pi}{3}$  و  $x = \frac{\pi}{3}$  جواب‌هایی از معادله‌اند و تمام جواب‌های معادله  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$  می‌باشند.

### حل معادله مثلثاتی

برای حل یک معادله مثلثاتی، ابتدا به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستوره‌های جبری، آن را به معادله ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های  $\sin x = a$  یا  $\cos x = a$  یا  $\tan x = a$  یا  $\cot x = a$  تبدیل شود.

### حل معادله $\sin x = a$



برای حل معادله  $\sin x = a$  که  $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\sin \alpha = a$  شود تا معادله به صورت  $\sin x = \sin \alpha$  درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha, x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

**نکته** اگر معادله مثلثاتی را به صورت  $\sin u = \sin \alpha$  بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت  $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$  و  $u = 2k\pi + \alpha$  می‌باشد.

**مثال:** معادله  $\sin 2x + \sin x = 0$  را حل کنید.

**پاسخ:** برای حل معادله مثلثاتی  $\sin 2x + \sin x = 0$ ، معادله را به صورت  $\sin u = \sin \alpha$  می‌نویسیم:

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin(-x) \Rightarrow \sin \left( \frac{2x}{1} \right) = \sin \left( \frac{-x}{1} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

**نکته** اگر معادله مثلثاتی به صورت  $\sin u = -\sin \alpha$  باشد، برای حذف منفی، معادله را به صورت  $\sin u = \sin(-\alpha)$  می‌نویسیم.

**نکته** برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای  $k$  اعداد صحیح  $10^\circ, \pm 20^\circ, \dots$  را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به  $k$  عدد بدهیم.

**تست:** مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 3x = \cos x$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

$$\frac{11\pi}{8} \quad (4)$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{9\pi}{8} \quad (2)$$

$$\pi \quad (1)$$

**پاسخ:** برای آن‌که معادله داده‌شده را به صورت  $\sin u = \sin \alpha$  دریاوریم، به جای  $\cos x$ ، عبارت  $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$  را قرار می‌دهیم (یا می‌توانیم  $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$  نیز قرار دهیم). بنابراین داریم:

$$\sin 3x = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \xrightarrow[\alpha = \frac{\pi}{2} - x]{u = 3x} \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{4k\pi + \pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4k\pi + \pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در تسلی  $x = \frac{4k\pi + \pi}{4}$ ، اگر به جای  $k$  مقادیر صحیح را قرار دهیم، جواب‌های  $x = \frac{\pi}{4}$  و  $x = \frac{5\pi}{4}$  در بازه  $[0, \pi]$  به دست می‌آید و در معادله  $x = \frac{4k\pi + \pi}{4}$  فقط به ازای  $k = 0$ ، جواب  $x = \frac{\pi}{4}$  در بازه  $[0, \pi]$  به دست می‌آید. بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه  $[0, \pi]$  برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = \pi \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

**تست:** معادله  $2\sin^3 x - \sin x = 0$  در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  چند جواب دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

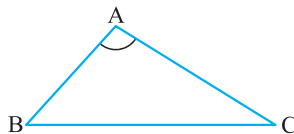
**پاسخ:** برای حل معادله، با استفاده از فاکتورگیری داریم:

$$\sin x (2\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow[k=0,1]{x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})} x = 0, x = \pi \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \xrightarrow[k=0]{x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7k\pi - \pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{8k\pi + 5\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow[k=0]{x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

معادله در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  ۶ جواب دارد، بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A$$

**یادآوری** مساحت مثلث ABC برابر است با:

(برگرفته از کتاب درسی)

سه (۴)

دو (۳)

یک (۲)

صفر (۱)

**پاسخ:** با فرض  $AB = 6$  و  $AC = 4$  داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A = 6 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$$

چون  $A$  اندازه یک زاویه مثلث است، پس  $0^\circ < A < 180^\circ$  می‌باشد، بنابراین:

$$\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \text{ یا } \hat{A} = 150^\circ$$

پس دو مثلث می‌توان رسم کرد. بنابراین گزینه (۳) درست است.

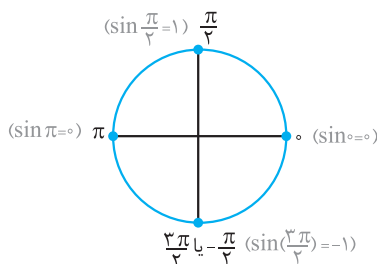
### حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط  $\sin u = 0$  و  $\sin u = \pm 1$  به‌دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد:

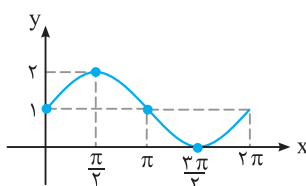
$$\sin u = 0 = \sin 0 \Rightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

$$\sin u = 1 = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

$$\sin u = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$



**نکته مهم** ریشه‌های معادلات  $\sin u = 1$  و  $\sin u = -1$ ، ریشه‌های مضاعف معادله مثلثاتی هستند و بقیه ریشه‌ها، جزء ریشه‌های ساده می‌باشند و در تعیین علامت عبارت‌های مثلثاتی، در دو طرف ریشه‌های مضاعف تغییر علامت نداریم و در دو طرف ریشه‌های ساده تغییر علامت داریم.



به عنوان مثال، نمودار تابع  $f(x) = 1 + \sin x$  به کمک انتقال در بازه  $[0, 2\pi]$  به صورت مقابل است:

با توجه به نمودار،  $x = \frac{3\pi}{2}$  ریشه مضاعف معادله  $f(x) = 0$  است و علامت  $f(x)$  در دو طرف

$x = \frac{3\pi}{2}$  مثبت است.

**نکته** گاهی اوقات نمی‌توان جواب‌های معادله مثلثاتی را به‌دست آورد ولی تعداد جواب‌های معادله را می‌توان تعیین کرد.

**تست:** معادله  $(3 \sin x - 1)(4 \sin x - 5)(\sin x + 1) = 0$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

**پاسخ:**

$(3 \sin x - 1)(4 \sin x - 5)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow 3 \sin x - 1 = 0$  یا  $4 \sin x - 5 = 0$  یا  $\sin x + 1 = 0$

معادله ریشه ندارد.  $\Rightarrow \sin x = \frac{5}{4} > 1$  ، معادله دو جواب در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد.  $\Rightarrow \sin x = \frac{1}{3}$

معادله دارای ریشه مضاعف  $x = \frac{3\pi}{2}$  است.  $\Rightarrow \sin x = -1$

بنابراین معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای سه ریشه است و در نتیجه، گزینه (۱) صحیح است.

**نکته مهم:** برای حل معادله مثلثاتی  $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$  از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

$$u = k\pi \pm \alpha, (k \in \mathbb{Z})$$

**مثال:**  $\sin^2 x = \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

اگر برای حل معادله مثلثاتی  $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ ، از فرمول گفته شده استفاده نکنیم، باید به صورت زیر حل کنیم:

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

باید یک بار جواب‌های معادله  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و بار دیگر جواب‌های معادله  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  را به دست بیاوریم. داریم:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

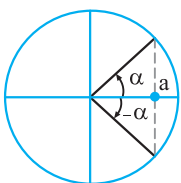
اگر اجتماع ۴ جواب را به دست آوریم، همان  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  خواهد بود.

### حل معادله $\cos x = a$

برای حل معادله  $\cos x = a$  و  $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\cos \alpha = a$  شود تا معادله به صورت  $\cos x = \cos \alpha$  درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

**نکته:** جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\cos u = \cos \alpha$  به صورت  $u = 2k\pi \pm \alpha$  است.



**مثال:** معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

(آ)  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$

(ب)  $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

**پاسخ:** (آ)

(ب) از اتحاد مثلثاتی  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  استفاده می‌کنیم و معادله داده شده را به صورت یک معادله درجه دوم بر حسب  $\cos x$  می‌نویسیم:

$$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow (2 \cos^2 x - 1) - 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

با انتخاب  $A = \cos x$ ، معادله به صورت  $2A^2 - 3A + 1 = 0$  درمی‌آید:

$$2A^2 - 3A + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب برابر صفر است.}} A = 1, A = \frac{1}{2}$$

$$A = 1 = \cos x = \cos \underset{\alpha}{0} \Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad , \quad A = \frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow \cos x = \cos \underset{\alpha}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

**نکته:** برای حل معادله مثلثاتی  $\cos u = -\cos \alpha$ ، برای حذف منفی، از رابطه  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$  استفاده می‌کنیم و معادله را به صورت  $\cos u = \cos(\pi - \alpha)$  می‌نویسیم.

**تست:** جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی  $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

**پاسخ:** با استفاده از اتحاد مثلثاتی  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ ، داریم:

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

### حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط  $\cos u = 0$  و  $\cos u = \pm 1$  به‌دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد: ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$۱) \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$۲) \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$$

$$۳) \cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$$

**نکته** ریشه‌های معادلات  $\cos u = \pm 1$ ، ریشه‌های مضاعف معادلات مثلثاتی هستند.

(سراسری تجربی فارغ از کشور)

**تست:** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $\cos^2 x + 3\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 2 = 0$  به کدام صورت است؟

$$(2k+1)\pi \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۳)$$

$$2k\pi \quad (۲)$$

$$k\pi \quad (۱)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos x \xrightarrow{\text{معادله}} \cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \cos x = -1, \cos x = -\frac{c}{a} = -2$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$$

معادله  $\cos x = -2$  جواب ندارد و داریم:

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**تست:** تابع  $y = 3\cos(2x) - 1$  در بازهٔ  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$  در چند نقطه ماکزیمم دارد؟

$$۵ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

**پاسخ:** تابع به ازای  $\cos 2x = 1$  دارای بیش‌ترین مقدار است:

$$\cos 2x = 1 \Rightarrow y = 3(1) - 1 = 2, \cos 2x = -1 \Rightarrow y = 3(-1) - 1 = -4$$

(به ازای  $\cos 2x = -1$  تابع کم‌ترین مقدار را دارد.)

با حل معادلهٔ مثلثاتی  $\cos 2x = 1$ ، تعداد  $x$ های بازهٔ  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$  را مشخص می‌کنیم:

$$\cos 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

به‌ازای  $k=0, k=1, k=2$  سه مقدار  $x=0, x=\pi, x=2\pi$  در بازهٔ  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$  به‌دست می‌آید و در نتیجه تابع در سه نقطه دارای ماکزیمم است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

$$u = k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

**نکته مهم** برای حل معادلهٔ مثلثاتی  $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$  از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\text{مثال: } \cos^2 x = \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

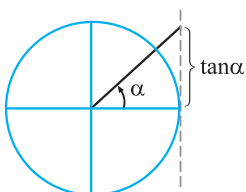
### حل معادلات $\cot x = a, \tan x = a$

برای حل معادلهٔ  $\tan x = a$  و  $a \in \mathbb{R}$  ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\tan \alpha = a$  شود تا معادله به‌صورت  $\tan x = \tan \alpha$  درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

برای حل معادلهٔ  $\cot x = a$  و  $a \in \mathbb{R}$  ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\cot \alpha = a$  شود تا معادله به‌صورت  $\cot x = \cot \alpha$  درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$



**مثال:** معادلات  $\tan x + \sqrt{3} = 0$  و  $\tan 2x = \cot x$  را حل کنید.

**پاسخ:**

$$\tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

برای آنکه معادله  $\tan 2x = \cot x$  را به صورت  $\tan u = \tan \alpha$  دریاوریم، به جای  $\cot x$  عبارت  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  را قرار می‌دهیم.

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \tan 2x = \cot x \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

**مثال:** معادله  $\cot 2x - 1 = 0$  را حل کنید.

**پاسخ:**

$$\cot 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cot 2x = 1 = \cot \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

### حل معادلات مثلثاتی کسری

در حل معادلات مثلثاتی کسری باید ریشه‌های مخرج را از مجموعه جواب حذف کنیم.

(سراسری تجربی)

**تست:** جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

**پاسخ:**

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

باید جواب‌های (۱) را از جواب‌های (۲) حذف کنیم:

$$\left\{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots\right\} - \left\{\dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots\right\} = \left\{\dots, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots\right\} = \left\{k\pi - \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

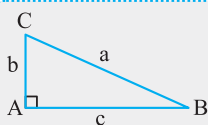
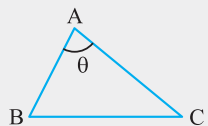
### خلاصه مطالب فصل

(۱) مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص در جدول‌های زیر آمده است:

| $\theta$<br>نسبت مثلثاتی | °          | ۳۰° یا $\frac{\pi}{6}$ | ۴۵° یا $\frac{\pi}{4}$ | ۶۰° یا $\frac{\pi}{3}$ | ۹۰° یا $\frac{\pi}{2}$ | ۱۸۰° یا $\pi$ | ۲۷۰° یا $\frac{3\pi}{2}$ | ۳۶۰° یا $2\pi$ |
|--------------------------|------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|---------------|--------------------------|----------------|
| $\sin \theta$            | °          | $\frac{1}{2}$          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$   | ۱                      | °             | -۱                       | °              |
| $\cos \theta$            | ۱          | $\frac{\sqrt{3}}{2}$   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$   | $\frac{1}{2}$          | °                      | -۱            | °                        | ۱              |
| $\tan \theta$            | °          | $\frac{\sqrt{3}}{3}$   | ۱                      | $\sqrt{3}$             | تعریف نشده             | °             | تعریف نشده               | °              |
| $\cot \theta$            | تعریف نشده | $\sqrt{3}$             | ۱                      | $\frac{\sqrt{3}}{3}$   | °                      | تعریف نشده    | °                        | تعریف نشده     |

(۲) علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ربع مثلثاتی در جدول زیر آمده است:

| ربع<br>نسبت   | ربع اول $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ | ربع دوم $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$ | ربع سوم $(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2})$ | ربع چهارم $(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi)$ |
|---------------|----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $\sin \alpha$ | +                                      | +                                        | -                                         | -                                            |
| $\cos \alpha$ | +                                      | -                                        | -                                         | +                                            |
| $\tan \alpha$ | +                                      | -                                        | +                                         | -                                            |
| $\cot \alpha$ | +                                      | -                                        | +                                         | -                                            |



(۳) در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، نسبت‌های مثلثاتی زاویه حاده  $B$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \tan B = \frac{b}{a}, \quad \cot B = \frac{a}{b}$$

(۴) اگر طول دو ضلع از مثلث و اندازه زاویه بین آن‌ها را داشته باشیم، مساحت مثلث از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \theta$$

**نکته** مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع  $a$  برابر  $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$  است.

(۵) اگر نقطه  $P(x, y)$  روی دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه  $x^2 + y^2 = 1$  و اگر  $\theta$  زاویه بین  $OP$  و جهت مثبت محور  $Ox$  باشد، آن‌گاه:

$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

**نکته** اگر  $\alpha$  زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه:

(۶) اگر اندازه زاویه‌ای بر حسب درجه برابر  $D$  و بر حسب رادیان برابر  $R$  باشد، آن‌گاه  $D = \frac{180^\circ R}{\pi}$  و  $R = \frac{\pi D}{180^\circ}$ ، البته اگر زاویه بر حسب رادیان باشد، می‌توان با قرار دادن  $180^\circ$  به جای  $\pi$ ، اندازه زاویه را بر حسب درجه به دست آورد.

(۷) اگر  $l$  طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی در دایره‌ای به شعاع  $r$  باشد ( $l$  و  $r$  هم‌واحد هستند)، آن‌گاه اندازه زاویه  $\alpha$  بر حسب رادیان برابر  $\alpha = \frac{l}{r}$  است.

(۸) روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

(۱) به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ، رابطه  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  برقرار است.

$$(۲) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$(۳) \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$(۴) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

(۹) روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

$$(۱) \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$(۲) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$(۳) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$(۴) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

$$(۵) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$(۶) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

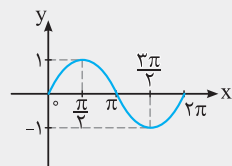
$$(۷) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

(۱۰) اگر  $k$  یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\sin(2k\pi \pm \alpha) = \sin(\pm \alpha), \quad \cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm \alpha)$$

$$\tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha), \quad \cot(k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha)$$

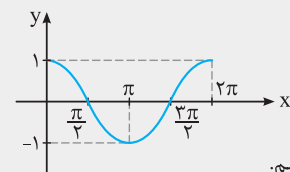
(۱۱) با توجه به نمودار تابع  $y = \sin x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  (شکل مقابل) نکات زیر را می‌توان مشخص کرد:



(۱) در بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، تابع صعودی است. (۲) در بازه  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ، تابع نزولی است.

(۳) در بازه  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ، تابع صعودی است. (۴) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر -۱ است.

(۱۲) با توجه به نمودار تابع  $y = \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  (شکل مقابل) نکات زیر را می‌توان نوشت:



(۱) در بازه  $[0, \pi]$ ، تابع نزولی است.

(۲) در بازه  $[\pi, 2\pi]$ ، تابع صعودی است.

(۳) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر -۱ می‌باشد.

(۱۳) کوچک‌ترین مقدار مثبت  $T$  را که به ازای آن تساوی  $f(x+T) = f(x)$  برقرار باشد، دوره تناوب تابع  $f$  می‌گوییم.

(۱۴) دوره تناوب تابع‌های  $y = a \sin(bx + c) + d$  و  $y = a \cos(bx + c) + d$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  و دوره تناوب تابع  $y = a \tan(bx + c) + d$  برابر  $\frac{\pi}{|b|}$  است.

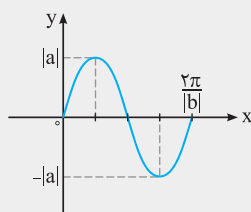
$$T = \frac{1}{n}$$

(۱۵) اگر قطعه‌ای از نمودار با دوره تناوب  $T$ ، در بازه‌ای به طول  $l$ ،  $n$  بار تکرار شده باشد، آن‌گاه:

(۱۶) اگر  $T$  دوره تناوب تابع  $f$  باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی  $n$ ، تساوی  $f(x + nT) = f(x)$  برقرار است.

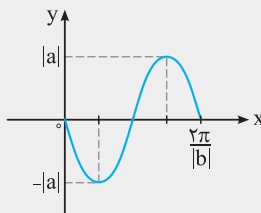
(۱۷) در توابع  $y = a \sin(bx) + c$  و  $y = a \cos(bx) + c$ ، داریم: مینیمم مقدار  $= -|a| + c$ ، ماکزیمم مقدار  $= |a| + c$

(۱۸) نمودار تابع  $y = a \sin(bx)$  با فرض  $ab > 0$  و در یک دوره تناوب به صورت  $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$  به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر  $ab > 0$ ، آن‌گاه در بازه  $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$  تابع ابتدا اکیداً صعودی است.

(۱۹) نمودار تابع  $y = a \sin(bx)$  با فرض  $ab < 0$  و در یک دوره تناوب به صورت  $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$  به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر  $ab < 0$ ، آن‌گاه در بازه  $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$  نمودار تابع ابتدا اکیداً نزولی است.

(۲۰) در تابع  $y = a \cos(bx + c) + d$ ، با فرض منفی بودن  $a$ ، داریم:

• طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند:

• طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند:

• اگر ضابطه تابع به صورت  $y = a \cos(bx + c)$  باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور  $x$  ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

$$bx + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$bx + c = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

(۲۱) در تابع  $y = a \cos(bx + c) + d$ ، با فرض مثبت بودن  $a$ ، داریم:

• طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند:

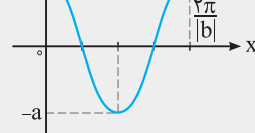
• طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند:

• اگر ضابطه تابع به صورت  $y = a \cos(bx + c)$  باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور  $x$  ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

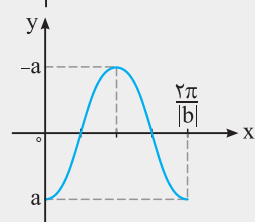
$$bx + c = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$bx + c = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$bx + c = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



(۲۲) نمودار تابع  $y = a \cos(bx)$  با فرض  $a > 0$  و در یک دوره تناوب به صورت روبه‌رو می‌باشد:



نمودار تابع  $y = a \cos(bx)$  با فرض  $a < 0$  و در یک دوره تناوب (بازه  $[0, \frac{2\pi}{|b|}]$ ) به صورت روبه‌رو می‌باشد:

(۲۳) دامنه تابع  $y = a + b \tan u$  به صورت  $\mathbb{R} - \{u = k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$  است.

(۲۴) با توجه به نمودار تابع  $y = \tan x$ ، تابع در بازه‌های  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ،  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ، ... و  $(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2})$  اکیداً صعودی می‌باشد، اما تابع در هر بازه‌ای که شامل این مقادیر باشد، غیریکتوا خواهد شد.

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{یا} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad (25)$$

(۲۶) اگر مقدار  $\sin x + \cos x$  یا  $\sin x - \cos x$  را داشته باشیم، می‌توان مقدار  $\sin 2x$  را با به توان رساندن تساوی‌های داده‌شده به‌دست آورد. همچنین اگر مقدار  $\cos 2x$  را بخواهیم به‌دست آوریم، باز هم ابتدا مقدار  $\sin 2x$  را به‌دست می‌آوریم و سپس مقدار  $\cos 2x$  را از رابطه  $\cos 2x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2x}$  مشخص می‌کنیم.

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (27)$$

(۲۸) عبارت  $1 + \sin 2x$  با عبارت  $(\sin x + \cos x)^2$  و عبارت  $1 - \sin 2x$  با عبارت  $(\sin x - \cos x)^2$  برابر است.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \quad (29)$$

(۳۰)  $\sin^2 x$  و  $\cos^2 x$  را می‌توان با فرمول‌های زیر بر حسب  $\cos 2x$  نوشت:

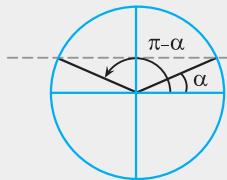
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (31)$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha \quad (32)$$

(۳۳) برای حل معادله  $\sin x = a$  و  $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\sin \alpha = a$  شود تا معادله به صورت  $\sin x = \sin \alpha$  درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:



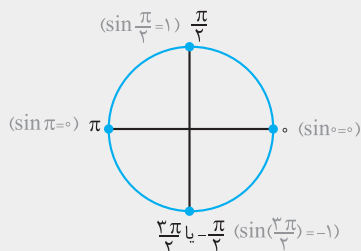
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) = (2k+1)\pi - \alpha, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(۳۴) اگر معادله مثلثاتی را به صورت  $\sin u = \sin \alpha$  بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادله مثلثاتی به صورت  $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$  و  $u = 2k\pi + \alpha$  می‌باشد.

(۳۵) برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای  $k$  اعداد صحیح  $10, \pm 2, \pm 3, \dots$  را قرار می‌دهیم و برای محاسبه راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به صورت کسر بنویسیم و سپس به  $k$  عدد بدهیم.

(۳۶) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط  $\sin u = 0$  و  $\sin u = \pm 1$  به دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد:



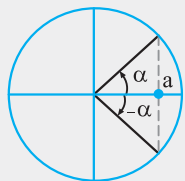
$$\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(۳۷) برای حل معادله مثلثاتی  $\sin^2 u = a^2 = \sin^2 \alpha$  از رابطه  $u = k\pi \pm \alpha, (k \in \mathbb{Z})$  استفاده می‌کنیم.

(۳۸) برای حل معادله  $\cos x = a$  و  $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\cos \alpha = a$  شود تا معادله به صورت  $\cos x = \cos \alpha$  درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

(۳۹) جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\cos u = \cos \alpha$  به صورت  $u = 2k\pi \pm \alpha$  است.

(۴۰) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط  $\cos u = 0$  و  $\cos u = \pm 1$  به دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد: ( $k \in \mathbb{Z}$ )

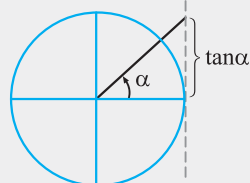
$$1) \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2) \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$$

$$3) \cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$$

(۴۱) برای حل معادله مثلثاتی  $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$  از رابطه  $u = k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$  استفاده می‌کنیم.

برای حل معادله  $\tan x = a$  و  $a \in \mathbb{R}$ ، ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\tan \alpha = a$  شود تا معادله به صورت  $\tan x = \tan \alpha$  درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

برای حل معادله  $\cot x = a$  و  $a \in \mathbb{R}$ ، ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\cot \alpha = a$  شود تا معادله به صورت  $\cot x = \cot \alpha$  درآید. در این صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$