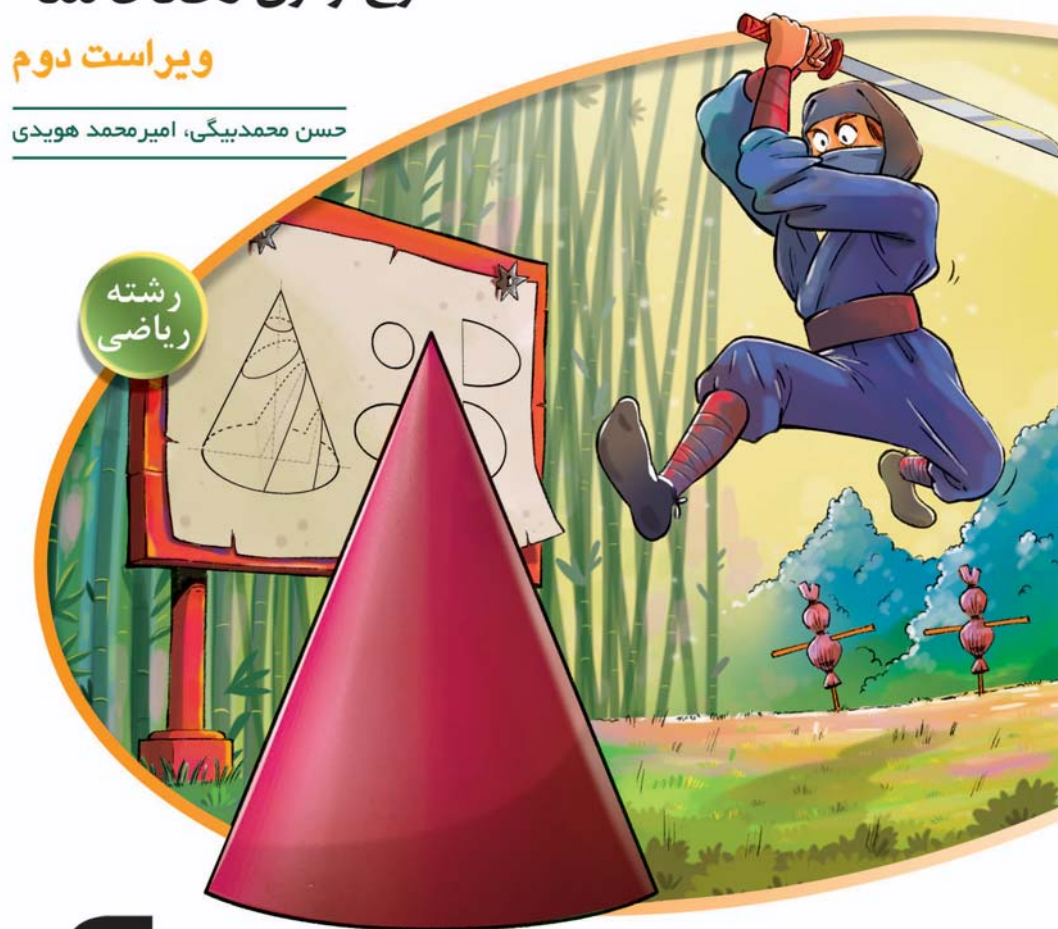


موج آزمون هندسه

ویراست دوم

حسن محمدبیگی، امیرمحمد هویدی

رشته
ریاضی



انتشرالگو

پیش‌گفتار

سال‌هاست که در کشور ما اصلی‌ترین راه ورود به دانشگاه، قبولی در کنکور سراسری است. آزمونی که ویژگی اصلی‌اش چهارگزینه‌ای بودن پرسش‌هاست، و البته دشواری‌اش بیشتر به دلیل کوتاه بودن زمان پاسخ‌گویی است تا دشواری سؤال‌ها. از این‌رو، رویکرد آموزشی بسیاری از معلمان، به ویژه در سال‌های پایانی دوره متوسطه، تدریس مطالب درسی بر پایه پرسش‌های چهارگزینه‌ای است. با این همه، هر چند که بعید است شما پیش از سال دوازدهم تحصیل‌تان با پرسش‌های چهارگزینه‌ای دست و پنجه نرم نکرده باشید، اگر قصد ورود به دانشگاه را دارید، گریزی از آن نیست!

از طرف دیگر، امتحانات تشریحی هماهنگ ملاک دیگری برای گزینش در دانشگاه‌ها شده است. به همین علت نشر الگو، برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، **کتاب سه‌بعدی** شامل درس‌نامه مفصل و تمرین‌های تشریحی و **کتاب تست** شامل درس‌نامه خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشر کرده است.

کتاب‌های **موج‌آزمون** ویژه آمادگی برای کنکور سراسری است. کتابی که در دست دارید، مربوط به درس‌های هندسه ۱ سال دهم، هندسه ۲ سال یازدهم و هندسه ۳ سال دوازدهم است. این کتاب چهار بخش دارد. بخش‌های اول، دوم و سوم به ترتیب شامل آزمون‌های هندسه ۱، هندسه ۲ و هندسه ۳ به تفکیک مباحث آموزشی است. در هر آزمون این بخش‌ها ده پرسش مربوط به همان مبحث را آورده‌ایم. توجه کنید که ممکن است تعداد آزمون‌های یک مبحث بیش از یکی باشد. در انتهای بخش‌های اول، دوم و سوم آزمون‌هایی جامع مربوط به آن بخش را آورده‌ایم. در بخش چهارم نیز آزمون‌هایی جامع به همراه آزمون‌های کنکور سال‌های اخیر را آورده‌ایم.

چون تلاش کرده‌ایم که تمام نکات مهم مباحث کتاب‌های درسی را در آزمون‌ها بگنجانیم، توصیه می‌کنیم که تمام آزمون‌ها را پاسخ دهید. بنابراین لازم است به آزمون‌های تشریحی و تستی تسلط کامل پیدا کنید و برای رسیدن به این هدف مطالعه کتاب‌های سه‌بعدی و تست نشر الگو بهترین مسیر است. توجه کنید که کتاب برای فکر کردن است نه حفظ کردن. پس کتاب‌ها را سریع بخريد ولی آرام و با دقت بخوانید.

در پایان وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم عاطفه ربیعی، دکتر ابوالفضل علی‌بمانی و دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروفچینی تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

● بخش اول: آزمون‌های هندسه ۱

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

- آزمون ۱: ترسیم‌های هندسی ۲
- آزمون ۲: استدلال ۳
- آزمون ۳: جامع هندسه ۱ / فصل اول (۱) ۴
- آزمون ۴: جامع هندسه ۱ / فصل اول (۲) ۵

فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

- آزمون ۵: نسبت و تناسب در هندسه ۶
- آزمون ۶: قضیه تالس ۷
- آزمون ۷: نسبت و قضیه تالس (۱) ۸
- آزمون ۸: نسبت و قضیه تالس (۲) ۹
- آزمون ۹: تشابه مثلث‌ها (۱) ۱۱
- آزمون ۱۰: تشابه مثلث‌ها (۲) ۱۲
- آزمون ۱۱: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها ۱۳
- آزمون ۱۲: جامع تشابه ۱۵
- آزمون ۱۳: جامع هندسه ۱ / فصل دوم (۱) ۱۶
- آزمون ۱۴: جامع هندسه ۱ / فصل دوم (۲) ۱۷
- آزمون ۱۵: جامع هندسه ۱ / فصل دوم (۳) ۱۸
- آزمون ۱۶: جامع هندسه ۱ / فصل دوم (۴) ۱۹
- آزمون ۱۷: جامع هندسه ۱ / فصل دوم (۵) ۲۰

فصل سوم: چندضلعی‌ها

- آزمون ۱۸: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها (۱) ۲۲
- آزمون ۱۹: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها (۲) ۲۳
- آزمون ۲۰: مساحت و کاربردهای آن (۱) ۲۴
- آزمون ۲۱: مساحت و کاربردهای آن (۲) ۲۵
- آزمون ۲۲: جامع هندسه ۱ / فصل سوم (۱) ۲۶
- آزمون ۲۳: جامع هندسه ۱ / فصل سوم (۲) ۲۸
- آزمون ۲۴: جامع هندسه ۱ / فصل سوم (۳) ۲۹

فصل چهارم: تجسم فضایی

- آزمون ۲۵: خط، نقطه و صفحه ۳۰
- آزمون ۲۶: تفکر تجسمی (۱) ۳۰
- آزمون ۲۷: تفکر تجسمی (۲) ۳۲
- آزمون ۲۸: جامع هندسه ۱ / فصل چهارم (۱) ۳۳
- آزمون ۲۹: جامع هندسه ۱ / فصل چهارم (۲) ۳۴
- آزمون ۳۰: جامع هندسه ۱ / فصل چهارم (۳) ۳۵

آزمون‌های جامع

- آزمون ۳۱: جامع هندسه ۱ (۱) ۳۶
- آزمون ۳۲: جامع هندسه ۱ (۲) ۳۷
- آزمون ۳۳: جامع هندسه ۱ (۳) ۳۹
- آزمون ۳۴: جامع هندسه ۱ (۴) ۴۰

● بخش دوم: آزمون‌های هندسه ۲

فصل اول: دایره

- آزمون ۳۵: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (۱) ۴۲
- آزمون ۳۶: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (۲) ۴۳
- آزمون ۳۷: رابطه‌های طولی در دایره (۱) ۴۴
- آزمون ۳۸: رابطه‌های طولی در دایره (۲) ۴۵
- آزمون ۳۹: چندضلعی‌های محاطی و محیطی (۱) ۴۷
- آزمون ۴۰: چندضلعی‌های محاطی و محیطی (۲) ۴۸
- آزمون ۴۱: جامع هندسه ۲ / فصل اول (۱) ۴۹
- آزمون ۴۲: جامع هندسه ۲ / فصل اول (۲) ۵۰
- آزمون ۴۳: جامع هندسه ۲ / فصل اول (۳) ۵۱
- آزمون ۴۴: جامع هندسه ۲ / فصل اول (۴) ۵۲

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

- آزمون ۴۵: تعریف تبدیل و نگاشت ۵۳
- آزمون ۴۶: بازتاب ۵۴

● بخش سوم: آزمون‌های هندسه ۳

فصل اول: ماتریس و کاربردها

- آزمون ۷۶: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (تا ابتدای ضرب ماتریس‌ها) ۸۶
- آزمون ۷۷: ضرب ماتریس‌ها (۱) ۸۷
- آزمون ۷۸: ضرب ماتریس‌ها (۲) ۸۸
- آزمون ۷۹: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۱) ۸۹
- آزمون ۸۰: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۲) ۹۰
- آزمون ۸۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۳) ۹۱
- آزمون ۸۲: وارون ماتریس (۱) ۹۲
- آزمون ۸۳: وارون ماتریس (۲) ۹۳
- آزمون ۸۴: وارون ماتریس (۳) ۹۴
- آزمون ۸۵: وارون ماتریس (۴) ۹۵
- آزمون ۸۶: دستگاه معادلات ۹۶
- آزمون ۸۷: دترمینان (۱) ۹۸
- آزمون ۸۸: دترمینان (۲) ۹۹
- آزمون ۸۹: دترمینان (۳) ۱۰۰
- آزمون ۹۰: وارون ماتریس و دترمینان ۱۰۱
- آزمون ۹۱: جامع هندسه ۳ / فصل اول (۱) ۱۰۲
- آزمون ۹۲: جامع هندسه ۳ / فصل اول (۲) ۱۰۴
- آزمون ۹۳: جامع هندسه ۳ / فصل اول (۳) ۱۰۵
- آزمون ۹۴: جامع هندسه ۳ / فصل اول (۴) ۱۰۶
- آزمون ۹۵: جامع هندسه ۳ / فصل اول (۵) ۱۰۷

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

- آزمون ۹۶: مکان هندسی (۱) ۱۰۹
- آزمون ۹۷: مکان هندسی (۲) ۱۱۰
- آزمون ۹۸: دایره (۱) ۱۱۱
- آزمون ۹۹: دایره (۲) ۱۱۲
- آزمون ۱۰۰: دایره (۳) ۱۱۳
- آزمون ۱۰۱: دایره (۴) ۱۱۴
- آزمون ۱۰۲: بیضی (۱) ۱۱۵
- آزمون ۱۰۳: بیضی (۲) ۱۱۶
- آزمون ۱۰۴: سهمی (۱) ۱۱۷
- آزمون ۱۰۵: سهمی (۲) ۱۱۸

- آزمون ۴۷: انتقال ۵۵
- آزمون ۴۸: مقدمات - بازتاب - انتقال ۵۶
- آزمون ۴۹: دوران ۵۷
- آزمون ۵۰: تجانس ۵۸
- آزمون ۵۱: دوران و تجانس ۵۹
- آزمون ۵۲: تبدیل‌های هندسی (۱) ۶۰
- آزمون ۵۳: تبدیل‌های هندسی (۲) ۶۱
- آزمون ۵۴: کاربرد تبدیل‌ها (۱) ۶۲
- آزمون ۵۵: کاربرد تبدیل‌ها (۲) ۶۳
- آزمون ۵۶: کاربرد تبدیل‌ها (۳) ۶۴
- آزمون ۵۷: جامع هندسه ۲ / فصل دوم (۱) ۶۵
- آزمون ۵۸: جامع هندسه ۲ / فصل دوم (۲) ۶۶
- آزمون ۵۹: جامع هندسه ۲ / فصل دوم (۳) ۶۷
- آزمون ۶۰: جامع هندسه ۲ / فصل دوم (۴) ۶۸

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

- آزمون ۶۱: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ۶۹
- آزمون ۶۲: قضیه سینوس‌ها ۷۰
- آزمون ۶۳: قضیه کسینوس‌ها ۷۱
- آزمون ۶۴: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها ۷۲
- آزمون ۶۵: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) ۷۳
- آزمون ۶۶: جامع هندسه ۲ / فصل سوم (۱) ۷۴
- آزمون ۶۷: جامع هندسه ۲ / فصل سوم (۲) ۷۵
- آزمون ۶۸: جامع هندسه ۲ / فصل سوم (۳) ۷۶

آزمون‌های جامع

- آزمون ۶۹: جامع هندسه ۲ (۱) ۷۷
- آزمون ۷۰: جامع هندسه ۲ (۲) ۷۸
- آزمون ۷۱: جامع هندسه ۲ (۳) ۷۹
- آزمون ۷۲: جامع هندسه ۱ و ۲ (۱) ۸۰
- آزمون ۷۳: جامع هندسه ۱ و ۲ (۲) ۸۲
- آزمون ۷۴: جامع هندسه ۱ و ۲ (۳) ۸۳
- آزمون ۷۵: جامع هندسه ۱ و ۲ (۴) ۸۴

آزمون ۱۰۶: بیضی و سهمی ۱۱۹
 آزمون ۱۰۷: جامع هندسه ۳ / فصل دوم (۱) ۱۲۰
 آزمون ۱۰۸: جامع هندسه ۳ / فصل دوم (۲) ۱۲۱
 آزمون ۱۰۹: جامع هندسه ۳ / فصل دوم (۳) ۱۲۲
 آزمون ۱۱۰: جامع هندسه ۳ / فصل دوم (۴) ۱۲۳
 آزمون ۱۱۱: جامع هندسه ۳ / فصل دوم (۵) ۱۲۴

فصل سوم: بردارها

آزمون ۱۱۲: نقطه و بردار در دستگاه مختصات دوبعدی ۱۲۵
 آزمون ۱۱۳: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ تا ابتدای بردار (۱) ۱۲۶
 آزمون ۱۱۴: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ تا ابتدای بردار (۲) ۱۲۷
 آزمون ۱۱۵: بردار (۱) ۱۲۸
 آزمون ۱۱۶: بردار (۲) ۱۲۹
 آزمون ۱۱۷: معرفی فضای $\mathbb{R}^3$ و بردار ۱۳۰
 آزمون ۱۱۸: ضرب داخلی بردارها (۱) ۱۳۱
 آزمون ۱۱۹: ضرب داخلی بردارها (۲) ۱۳۲
 آزمون ۱۲۰: ضرب خارجی بردارها (۱) ۱۳۳
 آزمون ۱۲۱: ضرب خارجی بردارها (۲) ۱۳۴
 آزمون ۱۲۲: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها (۱) ۱۳۵
 آزمون ۱۲۳: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها (۲) ۱۳۶
 آزمون ۱۲۴: جامع هندسه ۳ / فصل سوم (۱) ۱۳۷
 آزمون ۱۲۵: جامع هندسه ۳ / فصل سوم (۲) ۱۳۸
 آزمون ۱۲۶: جامع هندسه ۳ / فصل سوم (۳) ۱۳۹

آزمون‌های جامع

آزمون ۱۲۷: جامع هندسه ۳ (۱) ۱۴۰
 آزمون ۱۲۸: جامع هندسه ۳ (۲) ۱۴۱
 آزمون ۱۲۹: جامع هندسه ۳ (۳) ۱۴۲

بخش چهارم: آزمون‌های جامع

آزمون ۱۳۰: جامع (۱) ۱۴۴
 آزمون ۱۳۱: جامع (۲) ۱۴۵
 آزمون ۱۳۲: جامع (۳) ۱۴۶
 آزمون ۱۳۳: جامع (۴) ۱۴۸
 آزمون ۱۳۴: جامع (۵) ۱۴۹
 آزمون ۱۳۵: جامع (۶) ۱۵۱
 آزمون ۱۳۶: جامع (۷) ۱۵۳

آزمون ۱۳۷: جامع (۸) ۱۵۴
 آزمون ۱۳۸: جامع (۹) ۱۵۶
 آزمون ۱۳۹: جامع (۱۰) ۱۵۷
 آزمون ۱۴۰: جامع (۱۱) ۱۵۸
 آزمون ۱۴۱: جامع (۱۲) ۱۶۰
 آزمون ۱۴۲: جامع (۱۳) ۱۶۲
 آزمون ۱۴۳: جامع (۱۴) ۱۶۳
 آزمون ۱۴۴: جامع (۱۵) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۰ - داخل کشور) ۱۶۵
 آزمون ۱۴۵: جامع (۱۶) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۰ - خارج از کشور) ۱۶۶
 آزمون ۱۴۶: جامع (۱۷) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۱ - داخل کشور) ۱۶۸
 آزمون ۱۴۷: جامع (۱۸) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۱ - خارج از کشور) ۱۷۰
 آزمون ۱۴۸: جامع (۱۹) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۲ - نوبت اول) ۱۷۱
 آزمون ۱۴۹: جامع (۲۰) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۲ - نوبت دوم) - داخل کشور ۱۷۲
 آزمون ۱۵۰: جامع (۲۱) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۲ - نوبت دوم) - خارج از کشور ۱۷۴
 آزمون ۱۵۱: جامع (۲۲) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۳ - نوبت اول) ۱۷۵

بخش پنجم: پاسخ‌های تشریحی

پاسخ‌های تشریحی ۱۷۸

بخش ششم: پاسخنامه کلیدی

پاسخنامه کلیدی ۳۸۴

کنکور ۱۴۰۳ (نوبت دوم)

آزمون ۱۵۲: جامع (۲۳) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۳ - نوبت دوم) - داخل کشور ۳۸۹
 آزمون ۱۵۳: جامع (۲۴) (کنکور رشته ریاضی سال ۱۴۰۳ - نوبت دوم) - خارج از کشور ۳۹۰
 پاسخ تشریحی کنکور ۱۴۰۳ (نوبت دوم) ۳۹۲

۷۶ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (تا ابتدای ضرب ماتریس‌ها)



محاسبات

۷۵۱- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} j-i & i \leq j \\ j+i & i > j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $b_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ i-j & i \geq j \end{cases}$ ، ماتریس $A+B$ چگونه است؟

(۱) درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند. (۲) درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر قرینه‌اند.

(۳) قطری (۴) اسکالر

۷۵۲- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} b+2 & b \\ m^2+m & 0 \end{bmatrix}$ قطری باشد، مجموع مقادیر m کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۷۵۳- مجموع درایه‌های ماتریس $[ij - 3i^2]_{3 \times 3}$ برابر کدام است؟

(۱) -۹۰ (۲) -۹۲ (۳) -۸۸ (۴) -۸۶

۷۵۴- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ اگر $a_{ij} = \begin{cases} j-1 & i < j \\ i+j & i \geq j \end{cases}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

(۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۰

۷۵۵- در کدام ماتریس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند؟

(۱) $[i-j]_{3 \times 3}$ (۲) $[\cos(i-j)]_{3 \times 3}$ (۳) $[\sin(i-j)]_{3 \times 3}$ (۴) $[i+2j]_{3 \times 3}$

۷۵۶- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ اگر $a_{ij} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ستون دوم چقدر است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۵۷- درایه عمومی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $a_{ij} = i^2 - j$ (۲) $a_{ij} = i - j$ (۳) $a_{ij} = 2i - j$ (۴) $a_{ij} = i - j^2$

۷۵۸- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} \left[\frac{i+j}{3} \right] - 1 & i > j \\ i - j & i \leq j \end{cases}$ ، کدام درایه در ماتریس A وجود ندارد؟ ([] نماد جزء صحیح است)

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) -۲ (۴) ۲

۷۵۹- برای دو ماتریس A و B ، اگر $A+B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $2A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس A

چند برابر مجموع درایه‌های ماتریس B است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) ۱

۷۶۰- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ i - 2j & i \neq j \end{cases}$ و ماتریس $B = [b_{ij}]_{3 \times 4}$ با درایه‌های

$b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ j^2 - 1 & i \neq j \end{cases}$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های ماتریس $3A+B$ برابر کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) -۱۵ (۴) ۱۵

درصد	نزده	نادرست	درست

ارزیابی

ضرب ماتریس‌ها (۱)

۷۷



محاسبات

۷۶۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & a \end{bmatrix}$ و $A^T = A$ ، مقدار $a+x$ برابر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۷۶۲- ماتریس M مقدار علف، کاهو و کلمی را نشان می‌دهد که هر خرگوش و آهو به‌طور متوسط در روز می‌خورند و ماتریس N تعداد خرگوش و آهوهای را که گرگ یا شیر به‌طور متوسط در روز می‌خورند نشان داده است. در روز هر شیر به‌طور غیرمستقیم چقدر کاهو می‌خورد؟

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{خرگوش} \\ \text{آهو} \end{matrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{گرگ} \\ \text{شیر} \end{matrix}$$

- (۱) ۳۲ (۲) ۸ (۳) ۱۴ (۴) ۶

۷۶۳- چند ماتریس به فرم $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$ وجود دارد به‌طوری که $A^T = A$ ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) نامتناهی

۷۶۴- ماتریس‌های A و B در تساوی $(A+B)^T = A^T + 2AB + B^T$ صدق می‌کنند. در این صورت کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $AB = I$ (۲) $BA = I$ (۳) $AB = BA$ (۴) $AB = \bar{O}$

۷۶۵- اگر $A^T = A - 2I$ و $A^5 = \alpha A + \beta I$ ، مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) -۳ (۴) ۶

۷۶۶- اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{2n} - A^{2n+1}$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) $\sqrt{3}$

۷۶۷- اگر $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$ ، حاصل $A(A - 5I)^5$ برابر کدام است؟

- (۱) $5A$ (۲) $5^5 I$ (۳) $-5^5 A$ (۴) $-5^5 I$

۷۶۸- اگر $A = [(i+j)^n]_{3 \times 3}$ ، توان A^n برابر کدام است؟

- (۱) $3^{n-1} A$ (۲) $3^n A$ (۳) I (۴) $3^{n+1} A$

۷۶۹- ماتریس A به صورت $A = [2i - j]_{3 \times 3}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 برابر کدام است؟

- (۱) -۳۶ (۲) -۴۸ (۳) -۷۲ (۴) -۲۴

۷۷۰- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم $AB = \bar{O}$ ، چند مورد از گزاره‌های زیر

همواره صحیح است؟

(الف) $c+d=0$ (ب) $AB=BA$ (پ) اگر $AB=BA$ ، آن‌گاه ماتریس B قطری است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

درصد	نزده	نادرست	درست

ارزیابی

ضرب ماتریس‌ها (۲)

۷۸



محاسبات

۷۷۱- اگر a عددی طبیعی و b عددی صحیح باشد، آن گاه از تساوی‌های ماتریسی $\begin{bmatrix} a^2 & b \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ حاصل $a+b$ برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳

۷۷۲- ماتریس‌های مربعی A و B در تساوی $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ صدق می‌کنند. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) $AB = BA$ (۲) $A^2B = BA^2$

- (۳) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ (۴) $AB = I$

۷۷۳- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)(A-B) + C = 2I$ صدق می‌کنند.

ماتریس C کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

۷۷۴- ماتریس A ماتریس اسکالر غیر صفر از مرتبه ۳ است. اگر حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی آن ۱۲ برابر مجموع

درایه‌های آن باشد، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^2 برابر کدام است؟

- (۱) ۱۰۸ (۲) ۹۲ (۳) ۱۰۶ (۴) ۷۲

۷۷۵- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & -2 & m \\ 1 & y & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر -۲ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۶ (۳) -۷ (۴) -۸

۷۷۶- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $A^{17} + A^{13} + A^3 + A$ کدام است؟

- (۱) A (۲) I (۳) $4I$ (۴) $4A$

۷۷۷- ماتریس‌های A و B در تساوی‌های $AB = A$ و $BA^2 = B$ صدق می‌کنند. ماتریس A^5 برابر کدام است؟

- (۱) A (۲) I (۳) A^2 (۴) BA

۷۷۸- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & m \\ n & -1 \end{bmatrix}$ قطری باشد، ماتریس $\begin{bmatrix} 2m & n-3 \\ m-4 & 2n+2 \end{bmatrix}$ چگونه است؟

- (۱) اسکالر (۲) صفر (۳) قطری (۴) همانی

۷۷۹- ماتریس‌های A و B در تساوی‌های $3A + B = I_2$ و $B + 2A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های

قطر فرعی ماتریس $A^{10}B$ برابر کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) -۴ (۴) -۶

۷۸۰- اگر $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $AB + BA$ برابر

کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۹

درصد	نزد	نادرست	درست

ارزیابی

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۱)

۷۹



محاسبات

۷۸۱- اگر $A = [i - j]_{2 \times 2}$, $B = [i + j]_{2 \times 2}$, $X + Y = A$ و $X - Y = B$, مجموع درایه‌های ماتریس $2X + Y$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۶ (۴)

۷۸۲- ماتریس مربعی A در تساوی $A^2 - 2A + I = \bar{O}$ صدق می‌کند. ماتریس A^5 برابر کدام است؟

- ۲۸-۱ (۱) ۴۸-۳ (۲) ۵۸-۴ (۳) ۴۸+۳ (۴)

۷۸۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^3 + \alpha A + \beta I = \bar{O}$, مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

- ۷ (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۷ (۴)

۷۸۴- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & m & -1 \\ a & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. اگر درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم

ماتریس AB برابر ۶ باشد، مقدار m کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۸۵- اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ یک‌چهارم مجموع درایه‌های ماتریس A^2 باشد، مقدار $a + b$

کدام می‌تواند باشد؟

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۷۸۶- اگر $AB + BA = \bar{O}$ و $AB^2 = kB^2A$, مقدار k کدام است؟ ($AB \neq \bar{O}$)

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۷۸۷- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & c & -b \\ -3 & a & -5 \end{bmatrix}$ درایه‌های بالای قطر اصلی برابر صفر هستند و $B = \begin{bmatrix} 1 & c & 3 \\ 4 & a & -1 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$.

اگر $C = BA$ و $c_{21} = -1$, مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۸۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, در ماتریس $(A + I)(A - I)$ درایه سطر دوم و ستون دوم کدام است؟

- ۴ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴)

۷۸۹- اگر $A = [i + i^2]_{3 \times 4}$ و $B = [2i - 3j]_{3 \times 3}$, درایه واقع در سطر سوم و ستون سوم ماتریس BA کدام است؟

- ۱۲ (۱) -۱۵ (۲) ۱۸ (۳) -۳۰ (۴)

۷۹۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 101 & 100 \\ -1 & -100 \end{bmatrix}$, کدام تساوی درست است؟

- ۱ (۱) $A^2 - A = \bar{O}$ (۲) $A^2 - A - 101I = \bar{O}$ (۳) $A^2 - A - 100I = \bar{O}$ (۴) $A^2 - A - 10^4I = \bar{O}$

درست	نادرست	نزده	درصد

ارزیابی

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۲)

۸۰



محاسبات

۷۹۱- در ماتریس مربعی $A = [n + i^2 j]_{(5-n) \times (n+1)}$ مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس A برابر کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۶ (۴)

۷۹۲- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ ، $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ ، $C = [c_{ij}]_{2 \times 2}$ و $B \times (C \times A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع

درایه‌های ماتریس $(B \times C) \times A$ برابر کدام است؟

- صفر (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۲۷ (۴)

۷۹۳- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2a+c & 2a-b \\ 2b+4 & \frac{b}{2} \end{bmatrix}$ قطری و ماتریس A^2 اسکالر باشد، آنگاه حاصل $\frac{a}{2} - b + 2c$ برابر

کدام می‌تواند باشد؟

- ۷ (۱) ۵/۵ (۲) ۳/۵ (۳) ۶ (۴)

۷۹۴- ماتریس اسکالر B هم‌مرتبه با ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ماتریس AB

برابر ۱۲ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B^2 برابر کدام است؟

- ۳/۷۵ (۱) ۴/۳۲ (۲) ۴/۲۵ (۳) ۳/۶ (۴)

۷۹۵- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & n \\ e & f \end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ صدق می‌کنند.

نسبت $\frac{mn}{ef}$ برابر کدام است؟

- ۱/۲ (۱) ۱/۳ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۷۹۶- ماتریس A ماتریس اسکالر از مرتبه ۲ است. اگر $2A^2 - A - 3I = O$ ، آنگاه بیشترین مقدار ممکن حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس A برابر کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) ۹/۴ (۳) -۹/۴ (۴)

۷۹۷- اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{25}{16} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{14 \times 2}$ برابر کدام است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۷۹۸- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} \frac{4}{i+j} & i < j \\ i^2 j & i > j \\ 2i - mj & i = j \end{cases}$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A

سه برابر مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی این ماتریس باشد، مقدار m کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

۷۹۹- ماتریس $A = \begin{bmatrix} x^2-1 & 2x-4 \\ x^2-2x & 2x-y \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر است و $B+2I = \begin{bmatrix} x+1 & y \\ y-1 & x \end{bmatrix}$ در مورد ماتریس B

چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) ماتریس اسکالر (ب) ماتریس همانی (پ) ماتریس قطری (ت) ماتریس صفر
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۰۰- ماتریس‌های A و B در تساوی‌های $A+2B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $2A-B=C$ صدق می‌کنند. اگر C ماتریس اسکالر

و مجموع درایه‌های ماتریس B برابر ۱۲ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C برابر کدام است؟

(۱) -۴۸ (۲) -۷۲ (۳) -۳۶ (۴) -۹۶

درستی	نادرست	نزده	درصد

ارزیابی

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها (۳)

۸۱

۸۰۱- در ماتریس غیرمربعی $A = [v_i - 3j - 2ij]_{m \times n}$ درایه سطر آخر و ستون آخر برابر صفر است. این ماتریس چند

درایه دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۲۷

۸۰۲- اگر $A_{3 \times m \times n}$ ماتریس سطری و $B_{p \times p}$ ماتریس ستونی باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

(۱) ماتریس $C = \begin{bmatrix} m-1 & 0 & p-1 \\ 0 & -m+\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس صفر است.

(۲) ماتریس $D = \begin{bmatrix} 3m & p-1 \\ p-1 & p-2 \end{bmatrix}$ ماتریس همانی است.

(۳) ماتریس $M = \begin{bmatrix} p & m-\frac{1}{3} \\ p-1 & m \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر است.

(۴) ماتریس $N = \begin{bmatrix} p-1 & 3m-1 \\ \frac{1}{3}-m & p^2-1 \end{bmatrix}$ ماتریس قطری است.

۸۰۳- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2m & n^2+1 & 4 \\ 3 & mn & -n \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ مساوی هستند. مجموع درایه‌های ماتریس B

چقدر است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۲۲ (۴) ۱۲

۸۰۴- در ماتریس مربعی $A = [3i+2j-3]$ درایه سطر اول و ستون آخر $\frac{5}{3}$ برابر درایه سطر آخر و ستون اول است. این

ماتریس چند ستون دارد؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۳

۸۰۵- اگر مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $A = [2i+j]_{n \times n}$ مساوی ۴۵ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های سطر اول

این ماتریس چقدر است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۴۵ (۳) ۲۲/۵ (۴) ۱۵

۸۰۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه درایه واقع در سطر دوم و ستون اول

ماتریس CBA برابر کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۸۰۷- اگر $A = [ij-2]_{3 \times 2}$ ، $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ و $b_{ij} = \begin{cases} j+1 & i \geq j \\ i-2 & i < j \end{cases}$ ، آن گاه درایه سطر سوم و ستون اول ماتریس AB

کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۸۰۸- اگر $A^3 + A^2 + A + I = \bar{O}$ ، آن گاه ماتریس A^{65} برابر کدام است؟

- (۱) I (۲) A (۳) -A (۴) -I

۸۰۹- ماتریس‌های A و B مربعی و هم مرتبه هستند. از تساوی $(A-B)^2 = B^2 + A^2$ کدام نتیجه گیری همواره درست است؟

- (۱) $AB = \bar{O}$ (۲) $AB = BA$ (۳) $BA = \bar{O}$ (۴) $AB = -BA$

۸۱۰- مجموع درایه‌های ماتریس A برابر ۳- است. اگر $(A+I)^2 = I$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^5 برابر

کدام است؟

- (۱) -۲۴ (۲) -۴۸ (۳) ۴۸ (۴) ۲۴

ارزیابی	درست	نادرست	نزد	درصد

۸۲ وارون ماتریس (۱)

۸۱۱- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} -2 & a-3 \\ a+1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، آن گاه کدام یک از ماتریس‌های زیر وارون پذیر است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 1 & 2a \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} a & a+3 \\ a^3-1 & 0 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} a-2 & a+2 \\ a-1 & 1-a \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} a+1 & a^2+2 \\ a & a-1 \end{bmatrix}$

۸۱۲- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x+2y & -1 \\ t+1 & z \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 2x+3y \\ y-1 & 1-t \end{bmatrix}$ هر دو وارون ماتریس C هستند. حاصل

$x-y+z-t$ برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۱۸ (۴) ۶

۸۱۳- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ 1 & 2-m \end{bmatrix}$ ماتریسی مانند B وجود دارد به طوری که $AB=I$. مجموع درایه‌های

ماتریس B برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) $m+2$ (۴) $4-2m$

۸۱۴- ماتریس مربعی A در تساوی $A-I = \begin{bmatrix} |A| & -1 \\ 5|A| & -2 \end{bmatrix}$ صدق می‌کند. ماتریس A^{-1} کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -1 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

۸۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس $(2I + A)^{-1}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۱۶- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & \frac{3}{2} \\ -n & 1 \end{bmatrix}$ در تساوی $A^{-1}B = \frac{1}{2}A$ صدق می‌کنند. حاصل $m-n$ برابر کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۱۷- اگر $A^2 = \lambda I - 4A$ و $A^{-1} = aA + bI$ ، آن گاه حاصل $2a - b$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) ۱

۸۱۸- اگر $\sqrt{3}A = \begin{bmatrix} |A|+2 & |A| \\ |A|-2 & |A|+1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه دترمینان ماتریس $\frac{A^{-1}}{\sqrt{3}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۸۱۹- اگر $(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A(A - 2I)^{-1}$ برابر کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) -۸

۸۲۰- اگر $A^3 = \bar{O}$ ، آن گاه وارون ماتریس $2A + 3I$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{27}(4A^2 - 8A + 9I)$ (۲) $\frac{1}{27}(4A^2 - 6A + 9I)$
(۳) $\frac{1}{9}(4A^2 + 9I)$ (۴) $\frac{1}{9}(4A^2 - 8A + 9I)$

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

۸۳ وارون ماتریس (۲)

۸۲۱- A یک ماتریس وارون‌پذیر 3×3 است. اگر $A^{-1} = A$ ، دترمینان ماتریس $I - \lambda A^4$ برابر کدام است؟ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
و I ماتریس همانی 3×3 است.

- (۱) $1 - \lambda^2$ (۲) $(1 - \lambda)^2$ (۳) $1 - \lambda^3$ (۴) $(1 - \lambda)^3$

۸۲۲- اگر $A^3 = 2I$ ، وارون ماتریس $A + 2I$ کدام است؟

- (۱) $A^2 - I$ (۲) $\frac{1}{5}(A^2 - 2A + 4I)$ (۳) $\frac{1}{10}(A^2 - I)$ (۴) $\frac{1}{10}(A^2 - 2A + 4I)$

۸۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $(A^3 + A^2 - A + I)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $-\sqrt{3}$

۸۲۴- اگر ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B در رابطه $2A + 2B = 3AB$ صدق کنند، ماتریس $A^{-1} + B^{-1}$ برابر کدام است؟

- (۱) $2I$ (۲) $3I$ (۳) $\frac{2}{3}I$ (۴) $\frac{3}{2}I$

۸۲۵- اگر A یک ماتریس 2×2 باشد به طوری که $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس A چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{14}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $-\frac{3}{14}$ (۴) $-\frac{3}{7}$

۸۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 7|A|^2 & -|A| \\ -6 & 4|A| \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $-A^{-1} + 2I$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) ۱ (۴) -۸

۸۲۷- اگر A ماتریسی 2×2 و وارون‌پذیر باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $(A^{-1} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} A)^8$ کدام است؟

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۵۱۲ (۳) -۲ (۴) صفر

۸۲۸- اگر $A^2 = 4A - 3I$ و $A^{-1} = mA + nI$ ، مقدار $m + 4n$ کدام است؟ ($A \neq I$)

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۴

۸۲۹- اگر $(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل دترمینان ماتریس $A(A - I)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۸

۸۳۰- ماتریس $A = \begin{bmatrix} |A| & 3|A| \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ و وارون ماتریس ضرایب دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = -1 \\ cx + dy = 2 \end{cases}$ است. مقدار $xy + 4bc$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱۴۳ (۲) ۱۴۰ (۳) ۱۳۹ (۴) ۱۳۵

درستی	نادرستی	نزد	درصد

وارون ماتریس (۳)

۸۴



۸۳۱- ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ -n & 2 \end{bmatrix}$ در تساوی $A^{-1} = A$ صدق می‌کند. حاصل $m - n$ برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۵ (۳) -۵ (۴) ۱

۸۳۲- ماتریس A در تساوی $A^2 - A - I = \bar{O}$ صدق می‌کند. وارون ماتریس A^2 برابر کدام است؟

- (۱) $2I - A$ (۲) $I - A$ (۳) $A - I$ (۴) $A - 2I$

۸۳۳- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^2 - 3A$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۷

۸۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 3|A| & 2 \\ 5 & |A| \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل ضرب درایه‌های ماتریس A^{-1} کدام است؟ ($|A| > 0$)

- (۱) $5/5$ (۲) $7/5$ (۳) ۵ (۴) $2/5$

۸۳۵- اگر $A^2 = 2I$ ، آنگاه وارون ماتریس $A - 2I$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}(A^2 + 2A + 4I)$ (۲) $-\frac{1}{3}(A^2 + 2A + 2I)$ (۳) $-\frac{1}{2}(A^2 - 2A + 4I)$ (۴) $-\frac{1}{8}(A^2 - 2A + 4I)$

۸۳۶- ماتریس وارون پذیر $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ n & -3 \end{bmatrix}$ با درایه‌های غیرصفر مفروض است. اگر $A + A^{-1}$ یک ماتریس قطری باشد.

حاصل $|A + A^{-1}|$ برابر کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۸۳۷- اگر $-2A = \begin{bmatrix} 4|A| & 2 \\ -2 & \frac{|-A|}{4} \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه قدرمطلق تفاضل درایه‌های قطر فرعی ماتریس A^{-1} چند برابر

قدرمطلق مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{-1} است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{17}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{15}{8}$

۸۳۸- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ در تساوی $\alpha A + \beta A^{-1} = I$ صدق می‌کند. حاصل $2\alpha - \beta$ برابر کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۸۳۹- اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد و $A^2 + A = \bar{O}$ ، آن‌گاه وارون ماتریس $A^3 + A^2 + 2I$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}I$ (۲) $-\frac{1}{2}I$ (۳) $2I$ (۴) $-2I$

۸۴۰- اگر $\sqrt{5}A = \begin{bmatrix} |A|+1 & |A|-3 \\ 2|A| & |A| \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه در مورد دستگاه معادلات $\begin{cases} |A|x - 5y = 1 \\ |2A|x - |A^{-1}|y = -1 \end{cases}$ کدام درست است؟

(۱) جواب ندارد. (۲) یک جواب منحصر به فرد دارد.

(۳) بی‌شمار جواب دارد. (۴) دو جواب متمایز دارد.

درستی	نادرست	نزده	درصد

ارزیابی

وارون ماتریس (۴)

۸۵

۸۴۱- ماتریس A هم‌مرتبه با ماتریس B است. اگر $B = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ |A| & 2|A| \end{bmatrix}$ و $AB^{-1} = 4I$ ، حاصل $-\frac{1}{2}|A^{-1}|$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{63}{8}$ (۲) $-\frac{8}{63}$ (۳) $\frac{8}{63}$ (۴) $\frac{63}{8}$

۸۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه حاصل $(A^5 + A^4 - A^3 + I)^{-1}$ برابر کدام است؟

- (۱) I (۲) $2I$ (۳) $\frac{1}{2}I$ (۴) $\frac{1}{3}I$

۸۴۳- اگر $3(A+B)^{-1} = 2(A^{-1} + B^{-1})$ ، آن‌گاه ماتریس $A^{-1}B + B^{-1}A$ برابر کدام است؟

- (۱) I (۲) $\bar{O}$ (۳) $-\frac{1}{2}I$ (۴) $-I$

۸۴۴- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس $(A+B^{-1})^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

۸۴۵- دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} 3x + my = 2 \\ 2x + ny = 3 \end{cases}$ برابر ۵ است. مقدار y برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۵

۸۴۶- دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - (m+6)y = m-8 \\ (3m-1)x + (2m+3)y = m+4 \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد. کدام یک از ماتریس‌های زیر وارون‌پذیر است؟

(۱) $\begin{bmatrix} m & 2 \\ 2m & -4 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 2-m \\ m & m \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & m+1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} m+1 & m^2+1 \\ m & m-1 \end{bmatrix}$

۸۴۷- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 7x+1 & m+2 \\ n-1 & y+3 \end{bmatrix}$ قطری باشد، آن‌گاه در تساوی $X = \begin{bmatrix} 3 & -m \\ n & 1 \end{bmatrix}$ مجموع $\begin{bmatrix} m & n+1 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix}$ درایه‌های قطر فرعی ماتریس X برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۳ (۳) $-\frac{7}{2}$ (۴) -۲

۸۴۸- دو ماتریس A و B وارون‌پذیرند، $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+B$ برابر کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) -۱۲ (۳) -۱۶ (۴) -۸

۸۴۹- مجموع درایه‌های ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ برابر ۹ است. اگر $\begin{cases} 2m-1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ ، در مورد دستگاه معادلات

کدام گزینه درست است؟ $\begin{cases} (m-3)x + (3m-4)y = 1-2m \\ mx - 4my = 3m \end{cases}$

- (۱) دو خط موازی (۲) دو خط متقاطع (۳) دو خط عمود بر هم (۴) دو خط منطبق

۸۵۰- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه از تساوی ماتریسی $I + AB = 2A^{-1}$ درایه‌های سطر اول ماتریس B برابر کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 17 & -11 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 20 & -13 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -13 & 17 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 9 & -2 \end{bmatrix}$

درصد	نزد	نادرست	درست

ارزیابی

دستگاه معادلات

۸۶

۸۵۱- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} (2-m)x + my = m^2 + 4 \\ (2m-1)x + my = m-2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد، آن‌گاه دترمینان وارون ماتریس

برابر کدام است؟ $\begin{bmatrix} m^2+1 & 3-m \\ \frac{2}{m} & -m \end{bmatrix}$

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

۸۵۲- در دستگاه معادلات $AX = B$ ، اگر $A = \begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} = \begin{bmatrix} n-2 & m \\ -1 & n-1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه

مجموع درایه‌های ماتریس X برابر کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۹۴- اگر A ماتریسی قطری با درایه‌های روی قطر اصلی -۱ ، ۳ و ۲ باشد و $|B|=۲$ ، حاصل $|A^T B^T - 2AB^T + B^T|$ کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) -۶۴ (۳) ۷۲ (۴) ۶۸

۸۹۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $-2A^T B^T$ کدام است؟

- (۱) -۳۲ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) -۶۴

۸۹۶- حاصل $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) a (۲) $4a$ (۳) صفر (۴) ۱

۸۹۷- اگر $|A^{-1}| = m$ ، حاصل $|kA|$ با فرض 2×2 بودن ماتریس A برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{k}{m}$ (۲) $\frac{k}{m^2}$ (۳) $\frac{k^2}{m}$ (۴) $\frac{k^2}{m^2}$

۸۹۸- اگر ماتریس‌های $A+2I$ و $I-3A$ هر دو وارون‌های ماتریس $B_{3 \times 3}$ باشند، دترمینان ماتریس $8A$ برابر کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۴ (۳) -۱۶ (۴) -۶۴

۸۹۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A - A^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) I (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

۹۰۰- اگر $A^3 + A^2 + A + I = \bar{O}$ ، وارون ماتریس A کدام است؟

- (۱) $A^3 - I$ (۲) $A^3 + I$ (۳) $-A^3$ (۴) A^3

ارزیابی	درست	نادرست	نزده	درصد

جامع هندسه ۳ / فصل اول (۱)

۹۱



۹۰۱- اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد که $A^T = I$ ، $B = A + I$ و $C = A - I$ ، ماتریس $B^T + C^T$ کدام است؟

- (۱) $\bar{O}$ (۲) I (۳) $2I$ (۴) $4I$

۹۰۲- اگر درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ را سه برابر کنیم، از حاصل دترمینان آن ۹ واحد

کاسته می‌شود. مقدار x کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۹۰۳- حاصل عبارت $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ 9 & 15 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) صفر (۴) -۳

۹۰۴- اگر $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ و $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $(P^{-1}AP)^6$ کدام است؟

(۱) 2^{12} (۲) 2^{10} (۳) 2^{24} (۴) 2^{20}

۹۰۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \alpha \\ \tan \alpha & 0 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبه ۲ باشد، سطر اول ماتریس $(I-A)^{-1}(I+A)$ کدام است؟

ریاضی ۹۲

(۱) $\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$

۹۰۶- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با درایه‌های $i=j$ $\log 1$ و $i \neq j$ $\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1$ یا $\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 1$ باشد، حاصل $|A|$ برابر کدام است؟

([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) 2^{10} (۲) -2^{10} (۳) -2^{13} (۴) 2^{13}

۹۰۷- اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبه ۲ باشند به طوری که $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $A+B=AB$ ، وارون ماتریس B کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۹۰۸- اگر $A^2 = 2A - 2I$ ، حاصل $A(2A - I)^2$ کدام است؟

(۱) $A - 8I$ (۲) $A + 8I$ (۳) $20I + A$ (۴) $-20A - I$

۹۰۹- معادله $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = k$ مفروض است. اگر به عناصر سطر اول k واحد اضافه کنیم، دترمینان برابر ۶ می‌شود.

مقدار k کدام است؟

(۱) -۲ و -۳ (۲) ۲ و ۳ (۳) -۲ و ۳ (۴) ۲ و -۳

۹۱۰- اگر در دستگاه $\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=-2 \end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $x+y$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱

ارزیابی	درست	نادرست	نژده	درصد

جامع هندسه ۳ / فصل اول (۲)

۹۲



محاسبات

۹۱۱- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} e & m+2 & 0 \\ 0 & 3 & 3-2n \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار $2mne$ برابر کدام است؟

- (۱) -۱۲ (۲) -۱۶ (۳) -۸ (۴) -۱۸

۹۱۲- اگر $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = A \times B = [c_{ij}]$ ، حاصل $c_{23} + 2c_{31}$ کدام است؟

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

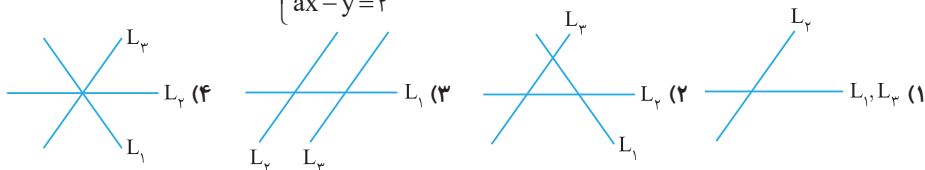
۹۱۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{1397} برابر کدام است؟

- (۱) A (۲) $-A$ (۳) I (۴) $-I$

۹۱۴- اگر $\overline{O} = 3AB + 4BA$ و $AB^3 = mB^3A$ ، مقدار m برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{64}$ (۲) $\frac{64}{27}$ (۳) $-\frac{27}{64}$ (۴) $-\frac{64}{27}$

۹۱۵- کدام یک از شکل‌های زیر نمی‌تواند نمایانگر دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 7 \\ ax - y = 2 \end{cases}$ باشد؟



۹۱۶- به ازای کدام m دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & m & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ برابر صفر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۹۱۷- حاصل $\begin{vmatrix} 3x & z-y & d-3z \\ -5 & b & 0 \\ -m & n & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & y-z & 3z-d \\ 5 & -b & 0 \\ m & -n & -d \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $5bdx$ (۳) $-3bdx$ (۴) mdx

۹۱۸- اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^2 \neq \overline{O}$ و $A^3 = \overline{O}$ ، معکوس ماتریس $I - A$ به کدام صورت است؟

- (۱) $A^2 - A$ (۲) $A^2 + A$ (۳) $A^2 - A + I$ (۴) $A^2 + A + I$

۹۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ، حاصل $(A^5 + 3A^2 - A)^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}I$ (۲) $3A$ (۳) $\frac{1}{3}A$ (۴) $3I$

۹۲۰- اگر جواب x از دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - y = 1 \\ bx + 2y = 3 \end{cases}$ برابر $2/5$ باشد، مقدار $2a + b$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

درصد	نزد	نادرست	درست

ارزیابی



۹۲۱- ماتریس‌های $A = [i^2 - 3j]_{3 \times 3}$ و $B = [\frac{2ij}{j^2 + 1}]_{3 \times 3}$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های ماتریس $4A + 10B$ برابر کدام است؟

- (۱) ۹۲ (۲) ۹۸ (۳) ۹۶ (۴) ۹۴

۹۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 \\ m \\ 3 \\ n \\ -1 \end{bmatrix}$ و $AB = \frac{2}{3}$ ، مقدار m برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{38}{9}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{34}{9}$

۹۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، کدام یک از ماتریس‌های زیر برابر ماتریس A نیست؟

- (۱) A^{1387} (۲) A^{1388} (۳) A^{1389} (۴) A^{1391}

۹۲۴- اگر برای دو ماتریس A و B بدانیم $AB - BA = I$ ، حاصل $AB^2 - B^2A$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) 0 (۲) $2I$ (۳) $2A$ (۴) $2B$

۹۲۵- در دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & b & 3 \\ a & c & 2 \\ 4 & d & -2 \end{vmatrix}$ مقدار a چقدر باشد تا با اضافه کردن هر مقدار دلخواه به b دترمینان تغییر نکند؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۹۲۶- اگر دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & k & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & k \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ برابر باشد، مجموع مقادیر k برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{9}{2}$

۹۲۷- به ازای کدام مقدار a دو خط D و D' به ترتیب به معادلات $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ y & 2a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ موازی باشند؟

- (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۹۲۸- معادله دترمینانی $\begin{vmatrix} 3 & x & x^3 \\ 3 & x^2 & x^2 \\ 3 & x^3 & x \end{vmatrix} = 0$ چند جواب متمایز دارد؟

- (۱) ۳ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) نامتناهی

۹۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ و α و β دو عدد حقیقی باشند به طوری که $\alpha A + \beta I = A^{-1}$ ، مقدار β کدام است؟

(I ماتریس همانی است)

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۹۳- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=-1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ است. حاصل عبارت $bx+cy$ برابر کدام است؟

(۱) ۵ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۱

درستی	نادرستی	نزد	درصد

جامع هندسه ۳ / فصل اول (۴)

۹۴



۹۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه درایه سطر دوم و ستون اول ماتریس AB^T برابر کدام است؟

(۱) -۳۳ (۲) -۱۵ (۳) ۱۵ (۴) ۳۳

۹۳۲- در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} x & 2x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ مجموع مقادیر ممکن x برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $-\frac{2}{9}$ (۳) -۱ (۴) $\frac{2}{9}$

۹۳۳- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{m}{2} & 0 & n \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A ماتریس قطری باشد،

مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس AB چقدر از مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس AB بیشتر است؟

(۱) ۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) -۱

۹۳۴- اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ -1 & |A| \end{bmatrix}$ و $|A| > \frac{3}{2}$ ، آنگاه حاصل $|A^2 - 2A + I|$ کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۸

۹۳۵- ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & m \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست. حاصل دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} m & 0 & 2m-1 \\ 1 & -m & m-\frac{1}{2} \\ m^2+1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست. حاصل دترمینان ماتریس

برابر کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۱ (۳) -۴ (۴) -۱

۹۳۶- ماتریس A وارون پذیر است و $A = \begin{bmatrix} |A| & 3|A| \\ 3 & |A| \end{bmatrix}$. اگر A ماتریس ضرایب دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=5 \end{cases}$ باشد،

آنگاه حاصل xy برابر کدام است؟

(۱) ۴ (۲) -۵ (۳) -۱۰ (۴) ۱۵

۷۵۶ ۲ درایه‌های ستون دوم ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$a_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0, \quad a_{22} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1, \quad a_{32} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

اکنون می‌نویسیم

$$\text{مجموع درایه‌های ستون دوم} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0 + 1 + 1 = 2$$

۷۵۷ ۱ برای هر گزینه ماتریس مربوط به ضابطه را می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 1 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{گزینه (۴)}$$

۷۵۸ ۴ ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این ماتریس درایه ۲ وجود ندارد.

۷۵۹ ۲ از دستگاه صورت سؤال ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A+B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ 2A+B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

معادله بالا را از معادله پایین کم می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس A را در معادله اول قرار می‌دهیم:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

در نهایت می‌نویسیم

$$\frac{\text{مجموع درایه‌های ماتریس A}}{\text{مجموع درایه‌های ماتریس B}} = -\frac{3}{7}$$

۷۵۱ ۱ درایه‌های هر دو ماتریس را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{پس در ماتریس } A+B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

اصلی نظیر به نظیر مساوی‌اند.

۷۵۲ ۴ در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطری اصلی صفر هستند.

پس

$$m^2 + m = 0 \Rightarrow m(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر -۱ است.

۷۵۳ ۱ ابتدا درایه‌های این ماتریس را با تعریف داده شده به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -10 & -8 & -6 \\ -24 & -21 & -18 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس برابر -۹۰ است.

۷۵۴ ۳ درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ماتریس} = 29$$

۷۵۵ ۲ در ماتریس گزینه (۱) چون $a_{ij} = -a_{ji}$ ، پس درایه‌های

نظیر بالا و پایین قطر اصلی قرینه یکدیگر می‌شوند. پس گزینه (۱) درست نیست.

در ماتریس گزینه (۳) چون $\sin(i-j) = -\sin(j-i)$ ، پس درایه‌های

نظیر بالا و پایین قطر اصلی قرینه یکدیگر می‌شوند، بنابراین گزینه (۳) نیز

نمی‌تواند درست باشد.

در ماتریس گزینه (۴) به ازای هر $j, i, i \neq j, a_{ij} \neq a_{ji}$ ، به عنوان مثال $a_{12} = 1+4=5$

ولی $a_{21} = 2+2=4$ ، پس گزینه (۴) نیز نمی‌تواند درست باشد.

در گزینه (۲) به ازای هر $i, j, i \neq j, \cos(i-j) = \cos(j-i)$ ، پس گزینه (۲)

ماتریس مورد نظر است.

$$[\cos(i-j)]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos(-1) & \cos(-2) \\ \cos 1 & \cos 0 & \cos(-1) \\ \cos 2 & \cos 1 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos 1 & \cos 2 \\ \cos 1 & \cos 0 & \cos 1 \\ \cos 2 & \cos 1 & \cos 0 \end{bmatrix}$$

۷۶۰ ۲ ابتدا ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 5 & 8 & 15 \\ 0 & 3 & 10 & 15 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

بنابراین

$$3A+B = 3 \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 5 & 8 & 15 \\ 0 & 3 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -6 & -7 & -6 \\ 0 & 8 & -4 & -3 \\ 3 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $3A+B$ مساوی ۳ است.

۷۶۱ ۳ ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم و سپس آن را مساوی A قرار می‌دهیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-x & 2x+ax \\ -2-a & -x+a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-x & 2x+ax \\ -2-a & -x+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4-x=2 \Rightarrow x=2 \\ -2-a=-1 \Rightarrow a=-1 \end{cases}$$

۷۶۲ ۳ ماتریس NM را به دست می‌آوریم. درایه سطر دوم و ستون

دوم این ماتریس میزان کاهویی است که شیر به صورت غیرمستقیم خورده است:

$$NM = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & 14 & ? \end{bmatrix}$$

۷۶۳ ۲ ماتریس A^2 را محاسبه کرده و با ماتریس A^2 داده شده

در صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ 2ac+b^2 & 2ab & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

از این تساوی نتیجه می‌گیریم

$a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$ چون $2ab=8$ ، پس به ازای $a=2$ به دست می‌آید $b=2$ و به ازای $a=-2$:

به دست می‌آید $b=-2$. اکنون از تساوی $2ac+b^2=6$ به ازای $a=b=2$:

به دست می‌آید $4c+4=6 \Rightarrow c=\frac{1}{2}$

و به ازای $a=b=-2$ به دست می‌آید $-4c+4=6 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$

بنابراین دو دسته جواب به دست می‌آید

$$a=b=2, \quad c=\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$a=b=-2, \quad c=-\frac{1}{2} \quad (2)$$

۷۶۴ ۳ توجه کنید که

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

بنابراین از فرض مسئله نتیجه می‌شود

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Rightarrow BA = AB$$

۷۶۵ ۱ دو طرف تساوی $A^2 = A - 2I$ را به توان دو می‌رسانیم:

$$A^4 = A^2 - 4A + 4I = (A - 2I) - 4A + 4I = -3A + 2I$$

دو طرف تساوی را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^5 = -3A^3 + 2A = -3(A - 2I) + 2A = -A + 6I$$

با توجه به فرض سؤال چون $A^5 = \alpha A + \beta I$ ، پس $\alpha = -1$ و $\beta = 6$.

در نتیجه $\alpha + \beta = 5$.

۷۶۶ ۲ ابتدا ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین $A^{2n} = I$ و $A^{2n+1} = A$ پس

$$A^{2n} - A^{2n+1} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

۷۶۷ ۳ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $A^n = \bar{O}$ ($n \geq 2$). پس در محاسبه ماتریس $A(A - \delta I)^5$ تمام

جملات به صورت A^n ($n \geq 2$) برابر ماتریس صفر هستند، در نتیجه

$$A(A - \delta I)^5 = A(\underbrace{A^5 - 5\delta A^4 + \dots + 5\delta^4 A - \delta^5 I}_{\bar{O}})$$

$$= A(\underbrace{\delta^5 A - \delta^5 I}_{\bar{O}}) = \underbrace{\delta^5 A^2 - \delta^5 A}_{\bar{O}} = -\delta^5 A$$

۷۶۸ ۱ عبارت $(i+j)^n$ همواره برابر یک است، پس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

$$A^3 = A^2 \times A = 3A \times A = 3A^2 = 9A = 3^2 A$$

$$A^4 = A^3 \times A = 9A \times A = 9A^2 = 27A = 3^3 A$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که $A^n = 3^{n-1} A$

۷۷۲ ۴ از تساوی $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ نتیجه می‌گیریم $AB=BA$. چون ضرب ماتریس‌های A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، پس می‌توانیم از اتحادها در ضرب ماتریس‌ها استفاده کنیم. بنابراین تساوی $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ درست است. از طرف دیگر،

$$\begin{cases} AB=BA \xrightarrow{\text{از چپ در } A \text{ ضرب می‌کنیم}} A^2B=ABA \\ AB=BA \xrightarrow{\text{از راست در } A \text{ ضرب می‌کنیم}} ABA=BA^2 \end{cases}$$

$$A^2B=BA^2$$

بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست هستند ولی رابطه $AB=I$ لزومی ندارد برقرار باشد.

۷۷۳ ۳ از تساوی داده شده به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ A-B &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ (A+B)(A-B) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

بنابراین

$$(A+B)(A-B)+C=2I \xrightarrow{\text{از (1)}} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

۷۷۴ ۱ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

(مجموع درایه‌های ماتریس A) $= 12 \Rightarrow$ حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی A

$$m^3 = 12(3m) \Rightarrow m^3 - 36m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 36) = 0$$

$$m=0 \text{ یا } m=6 \text{ یا } m=-6$$

چون ماتریس A غیر صفر است، پس $m=0$ قابل قبول نیست. بنابراین

$$m=\pm 6 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \pm 6 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 6 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 6 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \pm 6 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 6 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 6 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 6 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A^2 مساوی $3 \times 36 = 108$ است.

۷۷۵ ۳ درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB برابر حاصل ضرب سطر دوم A (به عنوان یک ماتریس سطری) در ستون سوم B (به عنوان یک ماتریس ستونی) است:

$$(A \text{ سطر دوم}) (B \text{ ستون سوم}) = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -2$$

$$m+6-1=-2 \Rightarrow m=-7$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{bmatrix} \\ A^3 &= A^2 \times A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 14 & 8 & 2 \\ 32 & 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -36 & -24 & -12 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس مجموع درایه‌های سطر اول A^3 برابر $-72 = -36 - 24 - 12$ است.

۷۷۰ ۱ چون $AB=\bar{O}$ ، پس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=0 \end{cases}$$

بنابراین رابطه (الف)، یعنی $c+d=0$ درست است. اکنون تساوی $AB=BA$

را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس رابطه (ب) لزوماً درست نیست.

مسلاً اگر $AB=BA$ ، آن‌گاه $a=0$ ، پس $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و ماتریس B

لزوماً قطری نیست. در نتیجه گزاره (پ) نیز درست نیست.

۷۷۱ ۳ از تساوی‌های داده شده به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a^2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ a^2 - a \\ a^2 - a - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 2 \\ a^2 - a - 2 = 0 \end{cases}$$

$$a=-1 \text{ یا } a=2$$

چون a عددی طبیعی است، پس $a=-1$ قابل قبول نیست. در نتیجه

$$\begin{bmatrix} 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{O} \Rightarrow 2b+a=0 \xrightarrow{a=2} b=-1$$

بنابراین $a+b=1$.

۷۸۱ ۴ از برابری‌های $X+Y=A$ و $X-Y=B$ به دست می‌آید

$$X = \frac{A+B}{2}, \quad Y = \frac{A-B}{2}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 2X+Y &= 2\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{A-B}{2}\right) = A+B + \frac{A-B}{2} = \frac{2A+2B+A-B}{2} \\ &= \frac{3A+B}{2} = \frac{[3(i-j)+i+j]}{2} = [2i-j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس $2X+Y$ برابر ۶ است.

۷۸۲ ۳ توجه کنید که

$$A^2 - 2A + I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = 2A - I \Rightarrow A^4 = (2A - I)^2$$

$$A^4 = 4A^2 + I - 4A \xrightarrow{A^2=2A-I} A^4 = 4(2A-I) + I - 4A$$

$$A^4 = 4A - 3I \xrightarrow{\text{در } A \text{ ضرب می‌کنیم}} A^5 = 4A^2 - 3A$$

$$A^5 = 4(2A-I) - 3A \Rightarrow A^5 = 5A - 4I$$

۷۸۳ ۱ می‌دانیم اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ آن‌گاه

$$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$$

در اینجا $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ پس

$$A^2 = 2A - (1-2)I = 2A + I \xrightarrow{Ax} \rightarrow$$

$$A^3 = 2A^2 + A = 2(2A+I) + A = 4A + 2I + A = 5A + 2I$$

بنابراین $A^3 - 5A - 2I = \bar{O}$

با مقایسه این تساوی با $\alpha A + \beta I = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم $\alpha = -5$ و $\beta = -2$.

بنابراین $\alpha + \beta = -7$.

۷۸۴ ۱ کافی است درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس AB را

به دست آوریم:

$$(AB)_{23} = (A \text{ سطر دوم}) \cdot (B \text{ ستون سوم})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3m + 1 + 2 = 3m + 3$$

این درایه برابر ۶ است، پس $3m + 3 = 6 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$

۷۸۵ ۲ ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+ab & ab+b^2 & 0 \\ a^2+ab & ab+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس

$$(A \text{ مجموع درایه‌های}) = \frac{1}{4}(A^2 \text{ مجموع درایه‌های})$$

$$2(a+b) = \frac{1}{4}(2a^2 + 4ab + 2b^2) \Rightarrow 4(a+b) = (a+b)^2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$a+b=4$ در بین گزینه‌ها هست، پس گزینه (۲) درست است.

۷۷۶ ۴ با پیدا کردن ماتریس A^2 سعی می‌کنیم الگوی برای

محاسبه توان‌های دیگر A به دست آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

بنابراین $A^2 = A$ ، پس هر توان دیگر ماتریس A برابر A است. بنابراین

$$A^{17} + A^{13} + A^3 + A = A + A + A + A = 4A$$

۷۷۷ ۱ از فرض‌های سؤال به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$BA^2 = B \xrightarrow{Ax} \rightarrow ABA^2 = AB \xrightarrow{AB=A} \rightarrow AA^2 = A \Rightarrow A^3 = A$$

$$\xrightarrow{Ax} \rightarrow A^4 = A^2 \xrightarrow{Ax} \rightarrow A^5 = A^3 \xrightarrow{A^3=A} \rightarrow A^5 = A$$

۷۷۸ ۱ در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند:

$$\begin{bmatrix} 4 & m \\ n & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3m & -8+2m \\ n-3 & -2n-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -8+2m=0 \Rightarrow m=4 \\ n-3=0 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

پس ماتریس $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ برابر $\begin{bmatrix} 2m & n-3 \\ m-4 & 2n+2 \end{bmatrix}$ است که یک

ماتریس اسکالر است. (دقت کنید شاید در نظر شما گزینه (۳) یعنی ماتریس قطری هم درست است ولی ماتریس اسکالر گزینه کامل‌تری است).

۷۷۹ ۴ ابتدا ماتریس‌های A و B را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2A+B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^{10} = I$$

$$A^{10}B = IB = B = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A^{10}B$ برابر $-9+3=-6$ است.

۷۸۰ ۳ می‌دانیم $(A+B)^2$ برابر $A^2+AB+BA+B^2$ است، پس

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2+AB+BA+B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$AB+BA+(A^2+B^2) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$AB+BA + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

$$AB+BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $AB+BA$ برابر ۱۲ است.

۷۹۲ ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد، پس
بنابراین $(B \times C) \times A = B \times (C \times A)$

$$(B \times C) \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 3$$

۷۹۳ ماتریس A قطری است، پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند:

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ 2b + 4 = 0 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} 2a+c & 2a-b \\ 2b+c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} -2+c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2+c)^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال A^T ماتریس اسکالر است، پس درایه‌های قطر اصلی A^T برابرند. در نتیجه

$$(-2+c)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -2+c=1 \Rightarrow c=3 \Rightarrow \frac{a}{2} - b + 2c = -\frac{1}{2} + 2 + 6 \\ \quad \quad \quad = \frac{15}{2} = 7/5 \\ -2+c=-1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow \frac{a}{2} - b + 2c = -\frac{1}{2} + 2 + 2 \\ \quad \quad \quad = \frac{7}{2} = 3/5 \end{cases}$$

۷۹۴ فرض کنید ماتریس اسکالر B از مرتبه 3×3 به صورت

$$B = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{باشد. در این صورت}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -2m & 2m \\ 3m & -m & 4m \\ m & 0 & 2m \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 12 \Rightarrow 10m = 12 \Rightarrow m = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

بنابراین

$$B = \begin{bmatrix} 6/5 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix}$$

$$B^T = B \times B = \begin{bmatrix} 6/5 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36/25 & 0 & 0 \\ 0 & 36/25 & 0 \\ 0 & 0 & 36/25 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس B مساوی $3 \times 6/5 = 18/5$ است.

۷۸۶ ۱ با توجه به فرض $AB = -BA$ ، بنابراین

$$AB = -BA \xrightarrow{\times B} AB^T = -B \frac{AB}{-BA}$$

$$AB^T = -B(-BA) = B^T A \Rightarrow AB^T = B^T A$$

از مقایسه این رابطه و رابطه $AB^T = kB^T A$ نتیجه می‌شود $k=1$.

۷۸۷ ۲ بنابر فرض سؤال درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس A صفر است، بنابراین $b=0$. از طرف دیگر طبق فرض تست،

$$c_{21} = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & a \\ a & -3 \end{bmatrix} = -1 \Rightarrow 4a + a^2 + 3 = -1$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a+2)^2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

در نتیجه $a+b=-2$.

۷۸۸ ۴ ابتدا ماتریس A^T را به دست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$(A+I)(A-I) = A^T - I^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

درایه سطر دوم و ستون دوم ماتریس $(A+I)(A-I)$ برابر صفر است.

۷۸۹ ۴ با فرض $C=BA$ معلوم می‌شود که

$$c_{33} = (B \text{ سطر سوم}) (A \text{ ستون سوم}) = \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = 6 + 0 - 36 = -30$$

۷۹۰ ۴ می‌دانیم هر ماتریس به صورت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در رابطه

$$A^T - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$$

زیر صدق می‌کند

$$\text{در اینجا } A = \begin{bmatrix} 101 & 100 \\ -1 & -100 \end{bmatrix}, \text{ پس}$$

$$a+d=1, \quad ad-bc = -101 \times 100 + 1 \times 100 = -10000 = -10^4$$

بنابراین ماتریس A در معادله مقابل صدق می‌کند: $A^T - A - 10^4 I = \bar{O}$

۷۹۱ ۴ ماتریس A مربعی است، پس

$$\Delta - n = n + 1 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow A = [2 + i^2]_{2 \times 2}$$

اکنون درایه‌های قطر فرعی ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$a_{11} = 2 + (1)^2(2) = 5, \quad a_{22} = 2 + (2)^2(2) = 10, \quad a_{33} = 2 + (3)^2(1) = 11$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس A برابر است با

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5 + 10 + 11 = 26$$

۷۹۹ ۱ در ماتریس اسکالر درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و

درایه‌های روی قطر اصلی مساوی هستند، پس

$$\begin{cases} 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=2 \end{cases}$$

مسلماً $x=2$ که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی را به‌طور همزمان صفر می‌کند قابل قبول است. پس ماتریس A به صورت زیر درمی‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4-y \end{bmatrix} \Rightarrow 3=4-y \Rightarrow y=1$$

در نتیجه

$$B+2I = \begin{bmatrix} x+1 & y \\ y-1 & x \end{bmatrix} \xrightarrow[y=1]{x=2} B+2I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس B اسکالر یا قطری یا همانی یا صفر نیست.

۸۰۰ ۱ ابتدا ماتریس B را پیدا می‌کنیم:

$$(-2) \times \begin{cases} A+2B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ 2A-B = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2A-4B = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \\ 2A-B = C \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} -\delta B = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + C$$

اگر $C = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، آن‌گاه از فرض سؤال و

تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم مجموع درایه‌های ماتریس $-\delta B$ برابر $-60 = (-5) \times 12$ و مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + C$

برابر $12+2m$ است، پس

$$-12+2m = -60 \Rightarrow m = -24$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی C مساوی $-48 = -24-24$ است.

۸۰۱ ۴ بنابر فرض سؤال درایه سطر آخر و ستون آخر ماتریس A

صفر است. پس

$$a_{mn} = 0 \Rightarrow 7m - 3n - 2mn = 0 \Rightarrow m(7-2n) = 3n \Rightarrow m = \frac{3n}{7-2n}$$

چون m و n به ترتیب تعداد سطرها و تعداد ستون‌های ماتریس A هستند، پس m و n اعداد طبیعی‌اند. پس $m > 0$ و $n > 0$ ، در نتیجه $7-2n > 0$.

پس $n < 3.5$. بنابراین حالت‌های زیر را می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول: $n=3$. در این صورت $m = \frac{9}{1} = 9$ ، پس ماتریس A از مرتبه 9×3 است و ۲۷ درایه دارد.

حالت دوم: $n=2$. در این صورت $m = \frac{6}{3} = 2$ ، پس ماتریس A از مرتبه 2×2 است.

چون A غیرمربعی است، پس این حالت قابل قبول نیست.

حالت سوم: $n=1$. در این صورت $m = \frac{3}{5}$ ، چون m باید طبیعی باشد، پس این حالت هم غیرقابل قبول است.

بنابراین ماتریس مورد نظر به صورت $A_{9 \times 3}$ است و ۲۷ درایه دارد.

۷۹۵ ۳ از تساوی $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ نتیجه می‌گیریم

$AB=BA$. در حالت کلی در صورتی می‌توان از اتحادها در ضرب

ماتریس‌ها استفاده کرد که ضرب آن‌ها خاصیت جابه‌جایی داشته باشد. پس

$$AB=BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & n \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m+2e=m+n \\ n+2f=2m+n \\ m+e=e+f \\ n+f=2e+f \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2e=n \\ f=m \end{cases}$$

$$\frac{mn}{ef} = \frac{(f)(2e)}{ef} = 2$$

بنابراین

۷۹۶ ۳ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر مورد نظر باشد.

در این صورت

$$2A^2 - A - 3I = \vec{0} \Rightarrow 2 \begin{bmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$2k^2 - k - 3 = 0 \Rightarrow k = -1, k = \frac{3}{2}$$

بنابراین

اگر $k = -1$ ، آن‌گاه $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی A

برابر ۱ است. اگر $k = \frac{3}{2}$ ، آن‌گاه $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ و حاصل ضرب درایه‌های

قطر اصلی A برابر $\frac{9}{4}$ است. چون $\frac{9}{4} > 1$ ، پس جواب سؤال $\frac{9}{4}$ است.

۷۹۷ ۱ ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{25}{16} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{25}{16} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{1402} = (A^2)^{701} = (-I)^{701} = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

پس مجموع درایه‌های ماتریس A^{1402} برابر -2 است.

۷۹۸ ۲ ابتدا درایه‌های ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 4 & 4-2m & 0 \\ 9 & 18 & 6-3m \end{bmatrix}$$

بنابر فرض سؤال مجموع درایه‌های قطر اصلی A سه برابر مجموع

درایه‌های بالای قطر اصلی A است، پس

$$2-m+4-2m+6-3m = 3(2) \Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$$

۸۰۶ برای پیدا کردن درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس MNE به صورت زیر عمل می کنیم: (ستون j ام ماتریس N (سطر i ام ماتریس M) بنابراین

$$\begin{aligned} & \text{درایه سطر دوم و ستون اول ماتریس CBA} \\ & = (\text{ستون اول ماتریس A})(\text{سطر دوم ماتریس C}) \\ & = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = [4+0+12] = [16] = 16 \end{aligned}$$

۸۰۷ ابتدا درایه های سطر سوم ماتریس A و درایه های ستون اول ماتریس B را پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} a_{31} &= 3-2=1, & a_{32} &= 6-2=4 \\ b_{11} &= 1+1=2, & b_{21} &= 1+1=2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \text{درایه سطر سوم و ستون اول ماتریس AB} \\ & = (\text{ستون اول ماتریس B})(\text{سطر سوم ماتریس A}) \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [2+8] = [10] = 10 \end{aligned}$$

۸۰۸ از فرض سؤال به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} A^T + A^T + A + I &= \bar{O} \Rightarrow I = -A^T - A^T - A \quad (1) \\ A^T + A^T + A + I &= \bar{O} \Rightarrow A^T = -A^T - A - I \xrightarrow{Ax} \\ A^F &= -A^T - A^T - A \xrightarrow{(1)} A^F = I \end{aligned}$$

بنابراین $A^{65} = (A^F)^{16} \times A = I^{16} \times A = I \times A = A$
توجه کنید که برای رسیدن به برابری $A^F = I$ ، می توانستیم طرفین فرض را در $A - I$ نیز ضرب کنیم.

۸۰۹ توجه کنید که در ضرب ماتریس ها نمی توان از اتحاد های جبری استفاده کرد. پس

$$(A-B)^T = (A-B)(A-B) = A^T - AB - BA + B^T \quad (1)$$

اکنون بنابر فرض می نویسیم:

$$\begin{aligned} (A-B)^T &= B^T + A^T \xrightarrow{(1)} A^T - AB - BA + B^T = B^T + A^T \\ -AB - BA &= \bar{O} \Rightarrow AB = -BA \end{aligned}$$

۸۱۰ ضرب ماتریس های A و I خاصیت جابه جایی دارد، پس می توان از اتحاد های جبری استفاده کرد. بنابراین

$$\begin{aligned} (A+I)^T &= I \Rightarrow A^T + 2A + I = \bar{O} \Rightarrow A^T + 2A = \bar{O} \\ A^T &= -2A \xrightarrow{Ax} A^T = -2A^T \xrightarrow{A^T = -2A} A^T = -2(-2A) \\ A^T &= 4A \xrightarrow{Ax} A^T = 4A^T \xrightarrow{A^T = -2A} A^T = 4(-2A) = -8A \\ \xrightarrow{Ax} A^T &= -8A^T \xrightarrow{A^T = -2A} A^T = -8(-2A) = 16A \end{aligned}$$

بنابراین مجموع درایه های ماتریس A^5 ، ۱۶ برابر مجموع درایه های ماتریس A یعنی برابر $16 \times (-3) = -48$ است.

۸۰۲ ماتریس $A_{m \times n}$ سطری است، پس $m=3$ ، در نتیجه $m = \frac{1}{3}$. ماتریس $B_{p \times p}$ ستونی است، پس $p=1$ ، در نتیجه

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ که ماتریس صفر نیست و } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی نیست و $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ که ماتریس اسکالر نیست.

بنابراین گزینه های (۱)، (۲) و (۳) نادرست هستند. ولی

ماتریس قطری است. دقت کنید ماتریس قطری باید ماتریس مربعی باشد و درایه های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر باشد که ماتریس N این شرایط را دارد. به عبارت دیگر ماتریس صفر مربعی ماتریس قطری است.

۸۰۳ دو ماتریس مساوی هم مرتبه هستند. چون مرتبه A برابر 2×3 است، پس مرتبه ماتریس B نیز باید 2×3 باشد، بنابراین $m=3$ و $n=2$. اکنون توجه کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های ماتریس B برابر ۲۲ است.

۸۰۴ فرض کنید ماتریس مربعی A از مرتبه $n \times n$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} a_{1n} &= \frac{\Delta}{\gamma} a_{n1} \Rightarrow 3+2n-3 = \frac{\Delta}{\gamma} (3n+2-3) \Rightarrow 2n = \frac{\Delta}{\gamma} (3n-1) \\ 14n &= 15n-5 \Rightarrow n=5 \end{aligned}$$

پس ماتریس A از مرتبه 5×5 است و ۵ ستون دارد.

۸۰۵ راه حل اول ماتریس A مربعی است و درایه های ستون سوم آن عبارتند از $a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}, a_{53}$. اکنون این درایه ها را تا جایی حساب می کنیم که مجموع آن ها برابر ۴۵ شود:

$$\begin{aligned} a_{13} &= 2+3=5, & a_{23} &= 4+3=7, & a_{33} &= 6+3=9 \\ a_{43} &= 8+3=11, & a_{53} &= 10+3=13 \end{aligned}$$

چون $n=5$ و ماتریس A از مرتبه 5×5 است، در نتیجه مجموع درایه های سطر اول این ماتریس برابر است با $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$

$$= (2+1) + (2+2) + (2+3) + (2+4) + (2+5) = 3+4+5+6+7 = 25$$

راه حل دوم درایه های ستون سوم ماتریس A عبارتند از $a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}, a_{53}$ و a_{n3} . چون مجموع این درایه ها برابر ۴۵ است، پس

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{i3} &= \sum_{i=1}^n (2i+3) = 2 \sum_{i=1}^n i + 3n = n(n+1) + 3n = n^2 + 4n = 45 \\ n^2 + 4n - 45 &= 0 \Rightarrow (n-5)(n+9) = 0 \Rightarrow n=5 \end{aligned}$$

اکنون مجموع درایه های سطر اول این ماتریس را به دست می آوریم:

$$\sum_{j=1}^5 a_{1j} = \sum_{j=1}^5 (2+j) = 2 \times 5 + \sum_{j=1}^5 j = 10 + \frac{5 \times 6}{2} = 25$$