

برادر بزرگ ترم محمود اردستانی

مصطفی دیداری

رفیق و همسر سارا که با بردباری، شرایط مناسبی

برایم فراهم آورد تا بتوانم بخش بزرگی از ساعات

حضورم در منزل را به تألیف و طرح سؤال اختصاص

دهم. کیوان دارابی

بچه‌های خفن گروه آموزشی لاپلاس

مسعود شفیعی

همسر مهربانم وحید ذوالفقاری

کار را که کرد؟ آن که تمام کرد.

این یه ضرب‌المثل قدیمیه که در اصل منظورش اینه که همیشه انتهای هر کار خیلی خیلی مهم‌تر از کارهاییه که توی مسیر منتهی به اون کار انجام می‌دید و برای موفق شدن استمرار در تلاش و خسته‌نشدن در آخر خیلی مهمه.

از اون جایی که فصل آزمون هم کتابی برای آخر کار هست، ما هم تلاش کردیم تا با طراحی و تألیف آزمون‌های خیلی خفن و مطابق با کنکورهای اخیر و خیلی استاندارد بتونیم تمام چیزهایی که هر دانش‌آموزی برای آزمون دادن و مرور تست‌ها و سنجش فردی نیاز داره رو توی این سری کتاب‌ها به خوبی پوشش بدیم. آزمون‌هایی که با تقسیم‌بندی موضوعی و یا مبحثی و جامع در هر فصل می‌تونه شما رو با بعدهای دست‌نیافتۀ هر مبحث روبه‌رو کنه تا در سر جلسه کنکور با طراحی جدیدی از سؤالات روبه‌رو نشید. فصل آزمون‌ها، جایی برای سنجش آزمون‌ی و موضوعی است که می‌تواند با تعدد سؤال‌ها و تعدد ایده‌های ناب شما را از هر آنچه که در هر درسی نیاز دارید، بی‌نیاز کند.

به نام او

بچه‌ها سلام امیدواریم حالتان خوب باشد. خب اسم کتاب روی خودش است؛ کتاب فصل‌آزمون! یعنی آن‌قدر آزمون می‌دهید که دیگر حالتان از آزمون‌دادن خوب می‌شود! بله بعد از یادگیری درس و حل تست‌های آموزشی! نوبت به محک‌زدن خودتان با چند آزمون درست و درمان می‌رسد. همین اول کار بگویم که در این کتاب سؤال‌های ساده و آموزشی نمی‌بینید، چون فرض بر این است که درس را یاد گرفته و به اندازه کافی سؤال از بانک تست‌تان حل کرده‌اید و بعد به سراغ این کتاب آمده‌اید. همه سؤال‌ها طوری طراحی شده‌اند که ممکن است در کنکور بیایند؛ پس از هیچ سؤالی به سادگی عبور نکنید.

خب این کتاب از فصل‌های زیر که شامل تعدادی آزمون و پاسخ‌های واقعاً تشریحی هستند، تشکیل می‌شود:

فصل	موضوع	پوشش کتاب درسی	تعداد سؤال کنکور
۱	نظریه اعداد	گسسته	۳
۲	گراف	گسسته	۲
۳	ترکیبیات	گسسته	۳
۴	شمارش	ریاضی دهم	حداکثر ۱
۵	مبانی ریاضی	آمار و احتمال	۲
۶	احتمال	آمار و احتمال	۲
۷	آمار	آمار و احتمال	۱ یا ۲
۸	آزمون جامع	هر سه کتاب	۱۲

هر فصل با دقت زیاد تیپ‌بندی شده و به تعدادی زیرموضوع تقسیم شده است. در هر زیرموضوع نیز، یک یا دو آزمون ۱۰ سؤالی داریم. اگر فرصت کافی دارید، برنامه‌ریزی کنید و شب‌های امتحان کنکورهای آزمایشی به آن موضوع بپردازید. در انتهای هر فصل، دو آزمون از کل مطالب آن فصل داریم که شامل انواع سؤال‌های ترکیبی آن فصل است. یک ویژگی خاص این کتاب که آن را از بقیه کتاب‌های مشابه بازار متمایز می‌کند، این است که در برخی از زیرموضوع‌ها، بنا بر اهمیت، تعدادی آزمون چالشی داریم که اگر عاشق سؤال‌های خفن و درصدهای فراتر از ۱۰۰ هستید، مخصوص شما طراحی شده است. اما پاسخ‌نامه؛ حتی اگر سؤالی را درست حل کرده‌اید از مطالعه پاسخ‌نامه پشیمان نمی‌شوید، چون علاوه بر حل تقریباً مفصل هر سؤال، نکته‌های خفن تستی نیز مشاهده می‌کنید. هم‌چنین در پاسخ‌ها، جمع‌بندی نکته‌های لازم آن آزمون هم یادآوری شده است. فصل آخر کتاب نیز از آزمون‌های جامع ۱۵ سؤالی شبیه کنکور تشکیل شده است. این‌ها نیز حسابی برای دوران جمع‌بندی به کارتان می‌آید. خلاصه این‌که بخوانید و حالش را ببرید و خیال خودتان را بابت ۱۲ سؤال کنکور گسسته و آمار راحت کنید.

در پایان تشکر می‌کنیم از همه مسئولین انتشارات، از دکتر نصری عزیز، از علیرضا شعبانی‌نصر (خدایی پوستم رو کند) تا ویراستاران محترم و خانم فلاحی و از تمام بر و بچه‌های خیلی سبز که بدون تلاش شبانه‌روزی آن‌ها این کتاب به دست شما نمی‌رسید.

دوستدار شما

مؤلفین

صفحه

آزمون ۲۵: درس اول: دور در گراف	۲۷
آزمون ۲۶: درس اول: چالشی (۱) درس اول	۲۸
آزمون ۲۷: درس اول: چالشی (۲) درس اول	۲۸
آزمون ۲۸: درس دوم: مجموعه‌های احاطه‌گر و ...	۲۹
آزمون ۲۹: درس دوم: عدد احاطه‌گری و تعداد ...	۳۰
آزمون ۳۰: درس دوم: مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال	۳۲
آزمون ۳۱: جامع فصل (۱)	۳۳
آزمون ۳۲: جامع فصل (۲)	۳۴

فصل ۳ روش‌هایی برای شمارش

آزمون ۳۳: درس اول: مرور شمارش + جایگشت با ...	۳۶
آزمون ۳۴: درس اول: معادله‌ی سیاله‌ی خطی با ... (۱)	۳۶
آزمون ۳۵: درس اول: معادله‌ی سیاله‌ی خطی با ... (۲)	۳۷
آزمون ۳۶: درس اول: مربع لاتین	۳۸
آزمون ۳۷: درس اول: چالشی درس اول	۳۹
آزمون ۳۸: درس دوم: اصل شمول (۱)	۴۰
آزمون ۳۹: درس دوم: اصل شمول (۲)	۴۱
آزمون ۴۰: درس دوم: تعداد تابع‌ها	۴۲
آزمون ۴۱: درس دوم: اصل لانه‌کبوتری (۱)	۴۲
آزمون ۴۲: درس دوم: اصل لانه‌کبوتری (۲)	۴۳
آزمون ۴۳: درس دوم: چالشی درس دوم	۴۴
آزمون ۴۴: جامع فصل (۱)	۴۵
آزمون ۴۵: جامع فصل (۲)	۴۶

فصل ۴ شمارش بدون شمردن

آزمون ۴۶: جامع فصل (۱)	۴۸
آزمون ۴۷: جامع فصل (۲)	۴۹

صفحه

فصل ۱ نظریه اعداد

آزمون ۱: درس اول: روش‌های استدلال (۱)	۸
آزمون ۲: درس اول: روش‌های استدلال (۲)	۸
آزمون ۳: درس دوم: رابطه‌ی عا دکردن	۹
آزمون ۴: درس دوم: ب.م.م و ک.م.م	۱۰
آزمون ۵: درس دوم: قضیه‌ی تقسیم و افراز اعداد صحیح (۱)	۱۱
آزمون ۶: درس دوم: قضیه‌ی تقسیم و افراز اعداد صحیح (۲)	۱۱
آزمون ۷: درس دوم: اعداد اول و تجزیه‌ی اعداد	۱۲
آزمون ۸: درس دوم: چالشی درس دوم	۱۳
آزمون ۹: درس سوم: ویژگی‌های همنهشتی	۱۳
آزمون ۱۰: درس سوم: پیدا کردن باقی‌مانده (۱)	۱۴
آزمون ۱۱: درس سوم: پیدا کردن باقی‌مانده (۲)	۱۵
آزمون ۱۲: درس سوم: قواعد بخش‌پذیری بر اعداد خاص	۱۶
آزمون ۱۳: درس سوم: تقویم‌نگاری - رقم یکان	۱۶
آزمون ۱۴: درس سوم: معادله‌ی همنهشتی - معادله‌ی سیاله	۱۷
آزمون ۱۵: درس سوم: معادله‌ی همنهشتی با سایر موضوعات	۱۸
آزمون ۱۶: درس سوم: چالشی (۱) درس سوم	۱۸
آزمون ۱۷: درس سوم: چالشی (۲) درس سوم	۱۹
آزمون ۱۸: جامع فصل (۱)	۲۰
آزمون ۱۹: جامع فصل (۲)	۲۱

فصل ۲ گراف و مدل‌سازی

آزمون ۲۰: درس اول: تعریف‌های مقدماتی گراف	۲۳
آزمون ۲۱: درس اول: درجه‌ی رأس‌های گراف	۲۴
آزمون ۲۲: درس اول: گراف‌های خاص (کامل، ... (۱))	۲۴
آزمون ۲۳: درس اول: گراف‌های خاص (کامل، ... (۲))	۲۵
آزمون ۲۴: درس اول: مسیر - گراف‌های همبند	۲۶

فصل ۵ آشنایی با مبانی ریاضیات

- آزمون ۴۸: درس اول: منطق ریاضی ۵۱
- آزمون ۴۹: درس اول: سورها ۵۱
- آزمون ۵۰: درس دوم: مقدمات مجموعه‌ها - زیرمجموعه ۵۲
- آزمون ۵۱: درس دوم: جبر مجموعه‌ها ۵۳
- آزمون ۵۲: درس دوم: ضرب دکارتی ۵۴
- آزمون ۵۳: جامع فصل (۱) ۵۵
- آزمون ۵۴: جامع فصل (۲) ۵۶

فصل ۶ احتمال

- آزمون ۵۵: درس اول: مقدمات احتمال + احتمال ... ۵۸
- آزمون ۵۶: درس اول: احتمال هم‌شانس ۵۹
- آزمون ۵۷: درس اول: قوانین احتمال ۵۹
- آزمون ۵۸: درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس ۶۰
- آزمون ۵۹: درس سوم: احتمال شرطی ۶۱
- آزمون ۶۰: درس سوم: کاربردهای احتمال شرطی ... ۶۲
- آزمون ۶۱: درس سوم: چالشی درس سوم (۱) ۶۳
- آزمون ۶۲: درس سوم: چالشی درس سوم (۲) ۶۴
- آزمون ۶۳: درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۶۵
- آزمون ۶۴: درس چهارم: انتخاب‌های با جای‌گذاری و ... ۶۶
- آزمون ۶۵: درس چهارم: چالشی درس چهارم ۶۷

آزمون ۶۶: جامع فصل (۱) ۶۸

آزمون ۶۷: جامع فصل (۲) ۶۹

فصل ۷ آمار توصیفی آمار استنباطی

- آزمون ۶۸: درس اول: جدول فراوانی - میانگین ۷۲
- آزمون ۶۹: درس اول: میانگین - میانه - مد ۷۳
- آزمون ۷۰: درس دوم: شاخص‌های پراکندگی ۷۳
- آزمون ۷۱: درس اول و درس دوم: اثر تغییرات ... ۷۴
- آزمون ۷۲: درس اول و دوم: چالشی فصل سوم ... ۷۵
- آزمون ۷۳: درس سوم: گردآوری داده‌ها ۷۶
- آزمون ۷۴: درس سوم: برآورد نقطه‌ای ۷۷
- آزمون ۷۵: درس سوم: آزمون برآورد بازه‌ای میانگین ... ۷۸
- آزمون ۷۶: جامع فصل (۱) ۷۹
- آزمون ۷۷: جامع فصل (۲) ۸۰

آزمون‌های جامع

- آزمون ۷۸: جامع گسسته و آمار و احتمال (۱) ۸۲
- آزمون ۷۹: جامع گسسته و آمار و احتمال (۲) ۸۳
- آزمون ۸۰: جامع گسسته و آمار و احتمال (۳) ۸۴
- آزمون ۸۱: جامع گسسته و آمار و احتمال (۴) ۸۵
- آزمون ۸۲: جامع گسسته و آمار و احتمال (۵) ۸۶
- ✓ پاسخ‌نامه تشریحی ۸۸
- ✓ پاسخ‌نامه کلیدی ۲۴۵



جامع

نوع آزمون: مبحثی

درصد	درصد	درصد	درصد	درصد
بالای ۸۰ درصد	۵۰ تا ۸۰ درصد	۲۰ تا ۵۰ درصد	زیر ۲۰ درصد	وضعیت
😊	😊	😊	😊	

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

درس اول: روش‌های استدلال (۱)

آزمون

۱

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

- گزاره «برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است.» در بین اعداد طبیعی کم‌تر از ۶ چند مثال نقض دارد؟
(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر
- چند عدد از ۳ عدد زیر مربع کامل هستند؟
(الف) $1 + 140 \times 1403$ (ب) $1 + 1402 \times 1401 \times 4$ (پ) $1 + 1403 \times 1402 \times 1401 \times 1400$
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر
- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A \subseteq S$ است. اگر برای هر $n \in A$ حاصل $\frac{(n+1)^2 - 1}{4}$ عددی صحیح و زوج باشد، A حداکثر چند عضو دارد؟
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- چه تعداد از عبارت‌های $n^3 - n$ ، $n^5 - n$ و $n^3 + 5n$ به ازای هر عدد طبیعی n بر ۶ بخش‌پذیر است؟
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- α و β دو عدد گنگ مختلف هستند به طوری که $\alpha - \beta$ گویای ناصفر است. چه تعداد از اعداد $\alpha + \beta$ و $\alpha^2 - \beta^2$ لزوماً گنگ هستند؟
(۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر
- در اثبات گزاره $ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$ ، از کدام هم‌ارزی منطقی استفاده می‌شود؟
(۱) $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ (۲) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$
(۳) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (۴) $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$
- اگر a_1, a_2, a_3 سه عدد صحیح باشند و b_1, b_2, b_3 همان اعداد با ترکیبی متفاوت باشند، کدام گزینه همواره زوج نیست؟
(۱) $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ (۲) $(a_1 - b_1)(a_2 - b_1)(a_3 - b_1)$
(۳) $(a_1 - b_2)(a_2 - b_1)(a_3 - b_2)$ (۴) $(a_1 - b_1)(a_2 - a_3)(a_3 - b_2)$
- اعداد طبیعی a و b در رابطه $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b}$ صدق می‌کنند، برای a چند جواب دورقمی وجود دارد؟
(۱) ۱ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) صفر
- x, y, z سه عدد حقیقی دلخواه هستند. در اثبات درستی رابطه $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ به روش بازگشتی به کدام رابطه همواره درست می‌رسیم؟
(۱) $(x+y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 0$ (۲) $(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$
(۳) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$ (۴) رابطه داده‌شده در حالت کلی نادرست است.
- به ازای چند مقدار دورقمی طبیعی n ، عبارت $\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-1}{3}$ زوج است؟
(۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۶۷ (۴) ۶۸

جامع

نوع آزمون: مبحثی

درصد	درصد	درصد	درصد	درصد
بالای ۷۰ درصد	۶۰ تا ۷۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	زیر ۴۰ درصد	وضعیت
😊	😊	😊	😊	

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

درس اول: روش‌های استدلال (۲)

آزمون

۲

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

- کدام حکم مقابل با مثال نقض رد نمی‌شود؟
(۱) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ (۲) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$
(۳) $A - B = A - C \Rightarrow B = C$ (۴) $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$
- α^2 و β دو عدد گنگ هستند و $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ عدد گویای ناصفر است. اعداد $\frac{\beta}{\alpha}$ و $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2}$ به ترتیب چگونه هستند؟
(۱) هر دو ممکن است گویا یا گنگ باشند. (۲) گنگ - گویا
(۳) گویا - گنگ (۴) گنگ - گنگ





۱۳. x و y دو عدد حقیقی نامنفی هستند که $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. چه تعداد از عبارت‌های $xy^2 + x^2y$ ، $x^2 + y^2$ و $\frac{x}{y}$ قطعاً برابر صفر است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴. برای این که ثابت کنیم «اگر n فرد باشد، آن گاه $n^2 - 5n + 7 = 2q + 1$ به نتیجه $n = 2k + 1$ با فرض $n = 2k + 1$ می‌رسیم. مجموع ضرایب عددی عبارت q کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۲

۱۵. چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(الف) اگر عدد $4k + 1$ مربع کامل باشد، k به صورت ضرب دو عدد متوالی است.

(ب) اگر $\alpha \neq 1$ عددی گویا و β عددی گنگ باشد، عدد $\alpha\beta - \beta$ گنگ است.

(پ) اعداد حقیقی و ناصفر a و b وجود ندارند که $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a+b \neq 0$).
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶. a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح و b_1, b_2, b_3 همان اعداد ولی با ترتیب دیگری هستند. چه تعداد از عبارت‌های A, B و C الزاماً زوج هستند؟

(الف) $A = (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)$ (ب) $B = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (b_1 + b_2 + b_3)^2$

(پ) $C = (\Delta a_1 - b_1)(\Delta a_2 - b_2)(\Delta a_3 - b_3)$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۷. شرط لازم و کافی برای آن که عدد $3n + 7$ عددی فرد باشد، کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۱) $4n + 3$ عددی فرد باشد. (۲) $5n + 8$ عددی فرد باشد. (۳) $7n - 2$ عددی زوج باشد. (۴) $2n + 6$ عددی زوج باشد.

۱۸. حاصل عدد 2^{2005} را بعد از حاصل عدد 5^{2005} می‌نویسیم (مثلاً اگر عدد ۱۲ را بعد از ۳۴ بنویسیم عدد چهاررقمی ۳۴۱۲ حاصل می‌شود). عدد حاصل چندرقمی است؟

(۱) ۲۰۰۳ (۲) ۲۰۰۴ (۳) ۲۰۰۵ (۴) ۲۰۰۶

۱۹. برای این که ثابت کنیم میانگین هندسی دو عدد مثبت $\frac{a}{p}$ و $2b$ بیشتر از میانگین حسابی آن‌ها نیست، به کدام نامساوی همواره درست می‌رسیم؟

(۱) $(\frac{a}{p} - 2b)^2 \geq 0$ (۲) $(\frac{a}{p} + 2b)^2 \geq 0$ (۳) $(a - \frac{b}{p})^2 \geq 0$ (۴) $(a + \frac{b}{p})^2 \geq 0$

۲۰. به ازای چند عدد فرد و دورقمی n ، عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۲۳

نوع آزمون: מבחן جامع

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت				

درس دوم: رابطه عا دکردن

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون

۳

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۳

۲۱. چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) $a | b + c \Rightarrow a | b$ و $a | c$ (ب) $ab | c \Rightarrow a | c$ و $b | c$

(پ) $ab = cd \Rightarrow c | a$ یا $c | b$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۲. چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(الف) به ازای هر عدد صحیح n ، رابطه $n^3 - n$ برقرار است.

(ب) کم‌ترین عدد طبیعی n که در رابطه $49 | n!$ صدق می‌کند برابر ۷ است.

(پ) n عددی طبیعی است. از درستی رابطه $2^{5n-2} | 8^{n+3}$ نتیجه می‌شود $n \geq 6$.

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۳. چند عدد صحیح a وجود دارد که عدد $9k + 7$ را عاد کرده و عدد $7k + 6$ بر a بخش پذیر باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۶۹. بزرگ ترین عدد مربع کاملی که ۱۲! را عاد می کند چند مقسوم علیه مثبت دارد؟

- (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۶۵ (۴) ۱۹۵

۷۰. برای هر عدد طبیعی a داریم $a = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \dots$ مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $a = \frac{15!}{7!}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۹

جامع

نوع آزمون: مبحثی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۲۰ درصد	۲۰ تا ۵۰ درصد	بالای ۵۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😄

درس دوم: چالشی درس دوم

آزمون



درصد پاسخ گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۸

۷۱. چند زوج مرتب (a, b) در اعداد طبیعی وجود دارد که $\frac{4}{3} = (1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})$ باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۷۲. اگر $(a, b) = d$ و $[a, b] = c$ باشد، حاصل $[c^2, ab], [c^2, (a, b)], [(2a - b), (a, b)]$ کدام است؟

- (۱) c^2 (۲) d (۳) $|2a - b|$ (۴) $|ab|$

۷۳. به ازای چند عدد دورقمی n ، عدد $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ بر ۸ بخش پذیر است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۷۴. ب.م.م دو عدد $2n + 3$ و $n^3 + 3n^2 + 1$ به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۵. دنباله $a_n = 10 + n^2$ تعریف شده است. اگر $d_n = (a_n, a_{n+1})$ بزرگ ترین مقدار d_n به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۴۱ (۳) ۲۰ (۴) ۱

۷۶. در سمت راست عدد $\frac{30!}{n!}$ ، دقیقاً شش رقم صفر وجود دارد. n کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۷۷. اگر a و b دو عدد یک رقمی باشد که $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ، آن گاه $\overline{ab \cdot ba}$ حداکثر چند مقسوم علیه طبیعی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۷۸. کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد، ۶ برابر عدد کوچک تر است، اگر مجموع دو عدد ۱۱۰ باشد، تفاضل این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۶۶ (۲) ۶۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

۷۹. باقی مانده تقسیم عدد a بر ۸ و ۹ به ترتیب برابر ۳ و ۷ است. مجموع ارقام باقی مانده تقسیم عدد a^2 بر ۱۴۴ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۸۰. در تقسیم سه عدد $5n + 11$ و $2n - 7$ و $6n + 1$ بر عدد $b > 1$ باقی مانده ها یکسان شده است. مجموع ارقام بزرگ ترین مقدار مقسوم علیه

کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۷

جامع

نوع آزمون: مبحثی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😄

درس سوم: ویژگی های همنهشتی

آزمون



درصد پاسخ گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۸۱. از درستی رابطه $2314 - 1234 = a$ کدام نتیجه گیری ممکن است درست نباشد؟

- (۱) $a \equiv 9 \pmod{11}$ (۲) $a \equiv 5 \pmod{21}$ (۳) $a \equiv 25 \pmod{23}$ (۴) $a \equiv 75 \pmod{77}$



جامع نوع آزمون: مبحثی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۷۰ درصد	بالای ۷۰ درصد
وضعیت				

آزمون ۱۵

درس سوم: معادلهٔ همنهشتی با سایر موضوعات

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۶

- ۱۴۱) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۹ برابر ۱۷ است. اگر به ۳ برابر عدد a یک واحد اضافه کنیم، مضرب ۱۷ می‌شود. چند عدد سه‌رقمی a وجود دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۴۲) به ازای بعضی از مقادیر طبیعی n ، اگر $11n + 3$ و $5n - 4$ و α و $\alpha > 1$ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی n کدام است؟
 (۱) ۷ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۷
- ۱۴۳) سه چراغ چشمک‌زن آبی، قرمز و زرد داریم که هر کدام به ترتیب ۵ ساعت یک بار، ۳ ساعت یک بار و ۷ ساعت یک بار چشمک می‌زنند. فرض کنید برای اولین بار چراغ آبی چشمک بزند، دو ساعت بعد چراغ قرمز برای اولین بار چشمک می‌زند و دو ساعت پس از این‌که چراغ قرمز برای اولین بار چشمک زد، چراغ زرد چشمک می‌زند. چند ساعت باید از اولین چشمک چراغ آبی بگذرد تا سه چراغ برای بار سوم هم‌زمان چشمک بزنند؟
 (۱) ۲۰۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۳۰۵ (۴) ۴۱۰
- ۱۴۴) در یک تقسیم، مقسوم برابر a ، خارج قسمت برابر با q و باقی‌مانده برابر با ۱۰۰ است. اگر a و $q + 1$ و 7 آن‌گاه رقم یکان کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۴۵) رقم یکان $2x - 5x^2$ برابر ۷ است. رقم یکان عدد x چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۱۴۶) خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b به ترتیب برابر ۱۷ و ۲۳ است. اگر باقی‌ماندهٔ عدد سه‌رقمی a بر ۵ برابر ۲ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۹
- ۱۴۷) باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۱۱، ۷ و ۳ به ترتیب برابر ۲، ۳ و صفر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۲۳۱ کدام است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۲۴ (۴) ۵۳
- ۱۴۸) اگر یک عدد دورقمی را بر رقم یکانش تقسیم کنیم، باقی‌مانده با رقم دهگان و خارج قسمت با رقم یکان آن برابر می‌شود. تفاضل دو رقم این عدد چه قدر است؟
 (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱
- ۱۴۹) مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی y که در معادلهٔ $(157, 713)y = 157x + 713y$ صدق می‌کند، کدام است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۱۴ (۴) ۲۲
- ۱۵۰) به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n ، معادلهٔ همنهشتی $1 + m^2 = (5n - 1)x + (7n + 2)y$ به ازای هر عدد صحیح m دارای جواب است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸۶ (۴) ۸۵

جامع نوع آزمون: مبحثی

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۷۰ درصد	بالای ۷۰ درصد
وضعیت				

آزمون ۱۶

درس سوم: چالشی (۱) درس سوم

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۸

- ۱۵۱) هشت برابر عدد دورقمی $\overline{ab}$ را در سمت چپ $\overline{ab}$ قرار داده و آن را m می‌نامیم. اگر m مربع کامل باشد، مجموع ارقام m کدام است؟
 (۱) ۱۷ (۲) ۲۷ (۳) ۳۴ (۴) ۴۲
- ۱۵۲) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2^{27}5^{57}$ بر ۱۷ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۲ (۴) ۱





۱۵۳ مجموع ارقام باقی‌مانده تقسیم عدد $(19)^2 + \dots + 5^2 + 3^2 + 1^2$ بر ۷۲ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۵

۱۵۴ معادله $x^2 + 14x \equiv 3 \pmod{18}$ چند جواب طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۱۵۵ n عددی طبیعی است به طوری که اولین رقم سمت چپ دو عدد 2^n و 5^n یکسان است. این رقم چند حالت مختلف ممکن است داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵۶ به ازای چند عدد سه‌رقمی n حاصل $(3n^2 + 5n - 3, 2n + 3)$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۶۰ (۴) ۶۸

۱۵۷ میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی به صورت $abab$ که بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) ۵۰۵۰ (۲) ۵۱۰۰ (۳) ۵۹۰۸ (۴) ۵۴۵۴

۱۵۸ می‌خواهیم با سکه‌های ۳، ۷ و ۱۳ تومانی، یک کتاب ۱۰۰۰ تومانی بخریم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به شرط آن که تعداد

کل سکه‌های استفاده‌شده ۱۲۶ تا باشد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۲۱ (۳) ۳۱ (۴) ۴۱

۱۵۹ اگر n بزرگ‌ترین عدد صحیحی باشد که $20!$ بر 2^n بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم n^{44} بر ۴۱ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۳۷

۱۶۰ $f(n)$ را برابر با مجموع ارقام عدد n تعریف می‌کنیم. باقی‌مانده تقسیم عدد $2^{f(2^{234})}$ بر ۵۱۱ کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۸ (۳) ۳۲ (۴) ۱۶

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	بالای ۶۰ درصد
وضعیت				

درس سوم: چالشی (۲) درس سوم

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون
۱۷

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۸

۱۶۱ عدد سه‌رقمی abc را در سمت چپ عدد abc می‌نویسیم و عدد ۶ رقمی حاصل را m می‌نامیم. اگر از یک روز دوشنبه به اندازه m جلو

برویم به کدام روز هفته می‌رسیم؟

- (۱) قطعاً دوشنبه (۲) سه‌شنبه یا پنج‌شنبه

- (۳) چهارشنبه یا جمعه یا یکشنبه (۴) به هر کدام از روزهای هفته ممکن است برسیم.

۱۶۲ باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۵ برابر ۳ است. رقم یکان عدد a^{12} چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟

- (۱) یک مقدار (۲) دو مقدار (۳) سه مقدار (۴) چهار مقدار

۱۶۳ دو عدد ۲۹۸ و ۱۱۴ به یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه عدد فرد $m \neq 1$ تعلق دارند. عدد $16! - 3 \times m^{m+1}$ به کدام دسته هم‌نهشتی

تعلق دارد؟

- (۱) $[1]_{m+3}$ (۲) $[13]_{m+3}$ (۳) $[3]_{m+3}$ (۴) $[7]_{m+3}$

۱۶۴ بزرگ‌ترین جواب دورقمی y از معادله $[120, 48, 72] = 4y - 13x$ چه مجموع ارقامی دارد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۴ (۳) ۱۳ (۴) ۱۲

۱۶۵ باقی‌مانده تقسیم 7^{31} بر ۱۹ چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۶۶ برای به دست آوردن جمله‌های دنباله a_n کافی است $1 - 7n$ رقم ۱ و در جلوی آن به تعداد $2 - 6n^2$ صفر قرار دهیم (مثلاً $a_1 = 1111110000$).

اولین جمله دنباله که تعداد ارقام عدد حاصل بر ۳۷ بخش‌پذیر می‌شود کدام است؟

- (۱) a_{12} (۲) a_{54} (۳) a_{25} (۴) a_{17}

۱۶۷ به ازای چند عدد دورقمی طبیعی n عدد $11 + 2^{3n+1} + 2^{6n+3}$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۴۴ (۲) ۴۵ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰



جامع

درصد	۲۰ زیر ۲۰ درصد	۶۰ تا ۷۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊

آزمون

۲۱

درس اول: درجه رأس‌های گراف

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۴

- ۲۰۱ یک گراف مرتبه ۱۰، دقیقاً ۶ رأس از درجه ۷ و $\Delta = 3$ رأس از درجه ۴ دارد. اندازه این گراف کدام است؟
 ۲۷ (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴)
- ۲۰۲ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یکدیگر دست می‌دهند. ۵ نفر از آن‌ها دقیقاً با ۴ یا ۶ نفر دست داده‌اند. نفر ششم و هفتم با چند نفر ممکن است دست داده باشند؟
 ۱ یا ۲ (۱) ۳ یا ۴ (۲) ۵ یا ۶ (۳) ۷ یا ۸ (۴)
- ۲۰۳ در گراف ساده G با ۸ رأس و ۱۴ یال، $\delta = 2$ و $\Delta = 4$ است. اگر تعداد رأس‌های درجه ۳ و ۴ برابر باشد، گراف چند رأس درجه ۳ دارد؟
 ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)
- ۲۰۴ گراف G دارای ۳ رأس درجه ۴ و $\Delta = 4$ و ۶ رأس درجه ۳ است. اگر این گراف ۱۸ یال داشته باشد، مجموع تعداد رأس‌های درجه ۱ یا ۲، چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟
 ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)
- ۲۰۵ گراف G از مرتبه ۹ دارای دو رأس از درجه ۳ است. $\delta = 3$ است. اگر $\Delta = 7$ باشد، بیشترین مقدار اندازه گراف چه قدر است؟
 ۲۷ (۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۰ (۴)
- ۲۰۶ در یک گراف از مرتبه ۱۷ تعداد رأس‌های زوج و تعداد رأس‌های فرد را به ترتیب a و b می‌نامیم. چه تعداد از اعداد ab ، $a^2 + b$ و $(b-3)a$ زوج است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۲۰۷ درجه رأس‌های یک گراف ساده به صورت $a, 4, 5, 4, 6, 5, 6, 4$ است. a چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۲۰۸ مرتبه یک گراف با اندازه‌اش برابر بوده و ۱۲ رأس تنها دارد. اگر رأس‌های دیگر فقط از درجه ۳ یا ۵ باشند، کم‌ترین مقدار مرتبه این گراف کدام است؟ (گراف رأس درجه ۳ و ۵ دارد.)
 ۲۰ (۱) ۲۱ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴)
- ۲۰۹ درجه رأس‌های یک گراف ساده به صورت $4, 3, 1, 6, a, b, c$ هستند. اگر $q+1 \geq 2p$ باشد، a + b + c چند مقدار مختلف ممکن است داشته باشد؟
 ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)
- ۲۱۰ درجه رأس‌های یک گراف ساده و فاقد رأس ایزوله، به صورت اعداد $a, b, c, 3, 4, 5$ است. اگر تعداد یال‌های این گراف ۱/۵ برابر $(a+b+c)$ باشد، چند حالت مختلف برای مجموعه $\{a, b, c\}$ وجود دارد؟ (a و b و c را مخالف ۶ فرض کنید.)
 ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

جامع

درصد	۳۰ زیر ۳۰ درصد	۷۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊

آزمون

۲۲

درس اول: گراف‌های خاص (کامل، منتظم، مکمل و زیرگراف) (۱)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

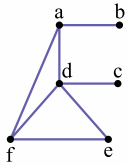
زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۳

۲۱۱ چه تعداد از گراف‌های ساده زیر وجود ندارند؟

- الف) گراف کاملی که منتظم نباشد.
 ب) گراف تهی از مرتبه ۴
 ج) گرافی که اندازه‌اش با اندازه مکملش برابر باشد.
 د) گراف کامل ۳- منتظم

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)





۲۱۲ یک یال از گراف زیر را حذف می کنیم و گراف به دست آمده را G می نامیم. اگر $\deg_{\bar{G}}(f) + |N_G[e]| = 6$ باشد، یال حذف شده کدام می تواند باشد؟ ($|A|$ برابر با تعداد عضوهای مجموعه A است.)

- fd (۱) fe (۲)
ed (۳) نشدنی (۴)

۲۱۳ با حذف یک یال از گراف کامل با بیشتر از دو رأس، گراف G به دست می آید. اگر $q(G) = \Delta(G)\delta(G) - 3\delta(G)$ باشد، $p(G)$ کدام است؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۲۱۴ مکمل گراف G دارای ۲۷ یال و ۲ - منتظم است. گراف G چند - منتظم است؟

- ۲۴ (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴)

۲۱۵ با کم کردن ۴۰ یال از یک گراف کامل، درجه هر رأس ۵ واحد کاهش می یابد. گراف به دست آمده چند یال دارد؟

- ۱۱۲ (۱) ۵۶ (۲) ۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۲۱۶ طه، یاسین، سپهر، عرفان و آبتین در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آن ها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد. اگر بدانیم طه در فهرست دوستان یاسین قرار دارد، چند حالت مختلف ممکن است وجود داشته باشد؟

- ۵۱۲ (۱) ۲۱۹ (۲) ۲۵۶ (۳) ۲۱۶ (۴)

۲۱۷ اگر به گراف G ، ۶ یال اضافه کنیم، به گرافی کامل تبدیل می شود. اگر از گراف G ، ۱۶ یال نیز کم کنیم، به گرافی ۶ - منتظم تبدیل می شود.

اندازه این گراف چند واحد از مرتبه اش، بزرگ تر است؟

- ۳۷ (۱) ۳۸ (۲) ۳۹ (۳) ۴۰ (۴)

۲۱۸ در گراف k - منتظم مرتبه ۱۱، رابطه $k^2 - 9k \leq 14$ برقرار است. بزرگ ترین اندازه گراف کدام است؟

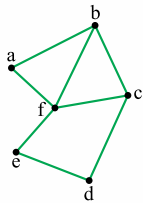
- ۳۳ (۱) ۳۸ (۲) ۳۹ (۳) ۴۰ (۴)

۲۱۹ درجات رئوس گراف G به صورت ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵ هستند، درجات رئوس گراف $\bar{G}$ به کدام صورت است؟

- ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، ۶، ۶ (۱) ۲، ۲، ۳، ۴، ۴، ۵، ۵، ۵ (۲) ۰، ۰، ۱، ۲، ۳، ۳، ۳ (۳) ۲، ۲، ۳، ۳، ۳، ۵، ۵ (۴)

۲۲۰ گراف مقابل، چند زیرگراف هم مرتبه با خود گراف دارد؟

- ۶۴ (۱) ۲۵۵ (۲) ۶۳ (۴) ۲۵۶ (۳)



نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد	درصد	درصد	درصد	درصد	درصد
بالای ۹۰ درصد	۹۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۴۰ درصد	زیر ۴۰ درصد	وضعیت	سنجش فردی
😊	😊	😐	😞		

درس اول: گراف های خاص (کامل - منتظم - مکمل - زیرگراف) (۲)

درصد پاسخ گویی داوطلب:

آزمون
۲۳

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۴

۲۲۱ چه تعداد از گراف های زیر وجود دارد؟

الف) ۷ - منتظم اندازه ۳۵ (ب) ۶ - منتظم اندازه ۱۶ (پ) ۷ - منتظم مرتبه ۱۳

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۲۲۲ در گراف ۷ - منتظم G رابطه $|N_G[a]| + |N_{\bar{G}}(a)| = 10$ برقرار است. گراف $\bar{G}$ را به چند صورت می توانیم رسم کنیم؟ ($|A|$ برابر با

تعداد عضوهای مجموعه A است.)

- ۷ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۲۲۳ در گرافی از مرتبه ۱۰ و اندازه ۴۲، حداکثر مقدار $\Delta^2 - \delta^2$ کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۴۵ (۲) ۶۴ (۳) ۱۹ (۴)

۲۲۴ چند گراف منتظم مرتبه ۷ وجود دارد؟

- ۶ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۲۵ گرافی از مرتبه ۱۱ با حذف ۳ یال منتظم می شود. با افزودن حداقل چند یال به این گراف، یک گراف منتظم تشکیل می شود؟

- ۱۱ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)



نوع آزمون: مبحثی

درصد	زیر ۲۰ درصد	۲۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😊	😊

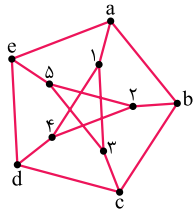
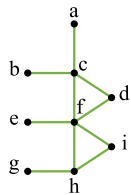
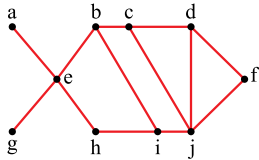
زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۳

درس دوم: مجموعه احاطه گر مینیمال

آزمون

۳۰

درصد پاسخ گویی داوطلب:



۲۹۱ کدام مجموعه یک مجموعه احاطه گر مینیمال برای گراف G است؟

(۲) $\{a, g, i, c, f\}$

(۱) $\{a, g, b, c, f\}$

(۴) $\{e, b, h, j, i\}$

(۳) $\{a, e, c, i, d\}$

۲۹۲ با حذف حداقل چند رأس از مجموعه $\{a, b, d, f, g\}$ ، می توانیم آن را تبدیل به مجموعه احاطه گر مینیمال کنیم؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) نشدنی

۲۹۳ کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه احاطه گر مینیمال نیست؟

(۱) $\{a, b, c, d, e\}$

(۲) $\{2, 3, 4, e\}$

(۳) $\{1, 3, c, d, 4\}$

(۴) $\{e, 1, 2, b\}$

۲۹۴ در گراف غیر تهی G با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ، بین همسایگی‌های باز رأس‌ها روابط $N_G(v_1) = N_G(v_2) = N_G(v_3)$

و $N_G(v_4) = N_G(v_5) = N_G(v_6)$ برقرار است. این گراف چند مجموعه احاطه گر مینیمال غیر مینیمم دارد؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

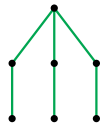
۲۹۵ گراف مقابل، چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد؟

(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۸



۲۹۶ در گراف P_n ، عدد احاطه‌گری برابر ۳ و حداکثر تعداد اعضای مجموعه احاطه گر مینیمال برابر ۵ است. در گراف C_n ، حداکثر تعداد اعضای

مجموعه احاطه گر مینیمال کدام است؟

(۴) ۳ یا ۴

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۳

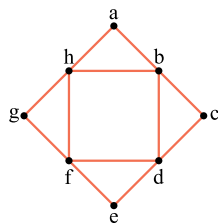
۲۹۷ چه تعداد از زیرمجموعه‌های مجموعه $\{b, d, f, g, h\}$ ، مجموعه احاطه گر مینیمال برای گراف مقابل‌اند؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶



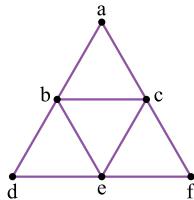
۲۹۸ گراف مقابل، چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد که مینیمم نیست؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲



۲۹۹ کدام گراف، مجموعه احاطه گر مینیمالی دارد که مینیمم نباشد؟

(۴) C_6

(۳) C_4

(۲) $\bar{K}_p$

(۱) K_p

۳۰۰ گراف G با درجه رأس‌های ۴، ۴، ۲، ۲، ۲، ۲ به طوری که رئوس درجه ۲ با یکدیگر مجاور نباشند، چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد؟

(۴) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۱۰





۳۳۳ معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ چند جواب صحیح نامنفی با شرط $x_i \geq i + 1$ دارد که $2 \leq i \leq 3$ باشد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴) ۳۶

۳۳۴ به چند طریق می‌توانیم ۸ جایزه یکسان را بین ۳ نفر توزیع کنیم، به طوری که به نفر دوم حتماً به تعداد طبیعی و زوجی جایزه رسیده و همه جوایز نیز به یک نفر نرسد؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۳۳۵ معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ دارای n جواب صحیح نامنفی است. معادله $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8$ چند جواب صحیح نامنفی دارد که $y_1 \geq \frac{n}{12}$ باشد؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۸۴ (۳) ۳۵ (۴) ۱۰

۳۳۶ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۲ شاخه انتخاب کرد به طوری که از گل نوع چهارم انتخاب نکرده و از گل نوع سوم حداکثر یک شاخه انتخاب کنیم؟

- (۱) ۱۷۸ (۲) ۱۶۹ (۳) ۹۱ (۴) ۷۸

۳۳۷ سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده برابر ۸ باشد، چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۸ (۴) ۲۱

۳۳۸ نامعادله $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

- (۱) ۹۴ (۲) ۹۱ (۳) ۹۲ (۴) ۸۱

۳۳۹ در بسط چندجمله‌ای $(a + b + c)^7$ چند جمله وجود دارد که شامل همه متغیرهای a, b, c باشد؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۶ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

۳۴۰ نامعادله $8 < x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 13$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرطی که $x_3 \geq 2$ و $x_4 > 1$ باشد؟

- (۱) ۴۲۵ (۲) ۳۹۰ (۳) ۵۲۶ (۴) ۶۱۰

نوع آزمون: מבחן جامع

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۷۰ درصد	بالای ۷۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😄

درس اول: معادله سیاله خطی با ضرایب واحد (۲)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون
۳۵

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۳۴۱ به چند طریق می‌توانیم ۱۳ خودکار یکسان را بین نفر اول و دوم و سوم توزیع کنیم به طوری که به نفر i حداقل i خودکار برسد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۴۵ (۳) ۸۴ (۴) ۳۶

۳۴۲ چند کلمه ۱۱ حرفی با حروف a, b, c, d, e می‌توان نوشت که در آن همه حروف به کار رفته باشد و حروف هر کلمه به ترتیب حروف الفبا مرتب شده باشند؟

- (۱) ۴۹۵ (۲) ۹۹۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۴۲۰

۳۴۳ ۳ مادر A و B و C و ۶ فرزند می‌خواهند در یک ردیف بایستند به طوری که B بین A و C بوده، بین A و B دقیقاً دو فرزند و بین B و C حداقل دو فرزند باشند. این کار به چند روش قابل انجام است؟

- (۱) ۷۲۰ (۲) ۲۱۶۰ (۳) ۸۶۴۰ (۴) ۴۳۲۰

۳۴۴ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ چند جواب صحیح نامنفی با شرایط $x_i \geq 3$ ($i = 1, 2, 3$)، $x_4 < 4$ دارد؟

- (۱) ۲۴۴ (۲) ۱۵۹ (۳) ۱۲۰ (۴) ۹۰

۳۴۵ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به طوری که $x_4 \neq 4$ باشد؟

- (۱) ۶۴۰ (۲) ۶۴۵ (۳) ۶۵۹ (۴) ۷۱۵

۳۴۶ معادله $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 19$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- (۱) $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ (۲) $\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ (۳) $\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$ (۴) $\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$



۳۴۷ به چند طریق می توانیم ۹ شاخه گل از بین گل های مریم، داوودی، رز و زنبق انتخاب کنیم به طوری که جمع تعداد گل های مریم و داوودی برابر ۴ باشد؟

- ۴۵ (۱) ۳۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۱ (۴)

۳۴۸ نامعادله $x^2 + y + z \leq 8$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

- ۹۱ (۱) ۳۷ (۲) ۴۵ (۳) ۹۶ (۴)

۳۴۹ گل فروشی تمام حالت های ممکن دسته گل های ۶ شاخه ای از ۳ نوع گل را درست کرده است. به تصادف یکی از دسته گل ها را انتخاب می کنیم. با کدام احتمال از هیچ نوع گلی تک شاخه استفاده نشده است؟

- ۲ (۱) $\frac{19}{28}$ (۲) $\frac{9}{14}$ (۳) $\frac{13}{28}$ (۴)

۳۵۰ نامعادله $(\sqrt{x_1 + x_2 + x_3})(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 36$ چند جواب طبیعی دارد به طوری که $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$ باشد؟

- ۴۶۲۰ (۱) ۱۰۵۰۰ (۲) ۱۲۵۴۰ (۳) ۵۸۸۰ (۴)

نوع آزمون: مبحثی

درصد	وضعیت
بالای ۹۰ درصد	😊
۳۰ تا ۹۰ درصد	🙂
۱۰ تا ۳۰ درصد	😐
زیر ۱۰ درصد	😞

درس اول: مربع لاتین

درصد پاسخ گویی داوطلب:

آزمون

۳۶

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۳۵۱ سه مدرس ۱، ۲ و ۳ قرار است در سه روز شنبه، یکشنبه و دوشنبه در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. قرار است هر مدرس در هر روز دقیقاً یک بار در یکی از کلاس ها تدریس داشته باشد. اگر بدانیم مدرس ۱ در روز شنبه در کلاس B و مدرس ۳ در روز یکشنبه در کلاس A تدریس می کند، کدام مدرس در روز یکشنبه در کلاس C تدریس دارد؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ یا ۲ هر دو می توانند. (۴)

۳۵۲ در مربع لاتین مقابل $b + c$ کدام است؟

a			b
	a + ۱		
		a + ۲	
۲a	c		a + ۳

- ۳ (۱)
۴ (۲)
۵ (۳)
۶ (۴)

۳۵۳ به چند صورت ممکن است تکمیل گردد تا با اعمال جایگشت روی آن، مربع لاتین چرخشی مرتبه ۴ به دست آید؟

۲			
		۳	
۳			۲

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ نشدنی (۴)

			a
		a	
	a		
a			

۳۵۴ چند مربع لاتین به صورت روبه رو وجود دارد؟

- ۲۴ (۱)
۷۲ (۲)
۹۶ (۳)
۱۴۴ (۴)

۳۵۵ اگر درایه های دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۴ را نظیر به نظیر در هم ضرب کنیم، چند عدد متفاوت پدید می آید؟

- ۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۳۵۶ در مربع لاتین A از مرتبه ۳، اول جای دو ستون را عوض می کنیم تا مربع B به دست آید. بعد جای دو سطر B را عوض می کنیم تا مربع C به دست آید. حالا روی C جایگشتی اعمال می کنیم تا مربع لاتین D به دست آید. A با چه تعداد از مربع های لاتین B و C و D لزوماً متعامد است؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)



۱۱	۲۲	۴۴	۳۳
۲۳	۱۴	۳۲	۴۱
a	۳۱		
		b	

۳۵۷ اگر دو مربع لاتین متعامد مرتبه ۴ را کنار هم قرار دهیم، مربع روبه‌رو حاصل می‌شود. حاصل $a + b$ کدام است؟

(۱) ۸۶

(۲) ۶۳

(۳) ۶۶

(۴) نشدنی

۱	۲	۳
a		
		۲

A

۱	۳	۲
	b	

B

۳۵۸ اگر دو مربع لاتین متقابل متعامد باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) نشدنی

۳۵۹ چند مربع لاتین متعامد با مربع چرخشی از مرتبه ۴ می‌توان نوشت؟

(۱) ۱

(۲) ۶

(۳) ۲۴

(۴) نشدنی

۳۶۰ به تصادف ۳ خانه از یک مربع لاتین مرتبه ۴ را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی حاصل ضرب اعداد این سه خانه برابر ۱۲ می‌شود؟

(۱) $\frac{3}{70}$

(۲) $\frac{4}{35}$

(۳) $\frac{11}{70}$

(۴) $\frac{9}{140}$

نوع آزمون: מבחן جامع

درس اول: چالشی درس اول

آزمون

۳۷

درصد	وضعیت	درصد	وضعیت	درصد	وضعیت	درصد	وضعیت
بالای ۸۰ درصد	😊	۸۰ تا ۷۰ درصد	🙂	۷۰ تا ۶۰ درصد	😐	زیر ۶۰ درصد	😞

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۷

۳۶۱ برای این که از نقطه A به نقطه B برویم، فقط مجاز به دو حرکت $\rightarrow$ و $\uparrow$ هستیم. اگر به صورت تصادفی از A به B حرکت کنیم، با کدام

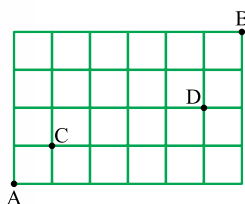
احتمال دو بار پشت سر هم به بالا حرکت نکرده‌ایم؟

(۱) $\frac{22}{35}$

(۲) $\frac{44}{91}$

(۳) $\frac{22}{91}$

(۴) $\frac{11}{35}$



۳۶۲ ۳ معلم و ۱۰ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که بین هر دو معلم حداقل دو دانش‌آموز نشسته باشند؟

(۱) $12 \times 10!$

(۲) $6 \times 10!$

(۳) $15 \times 10!$

(۴) $30 \times 10!$

۳۶۳ حاصل عبارت $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k}$ که در آن $0 \leq k \leq n$ برابر کدام می‌شود؟

(۱) $n \binom{n+1}{k+1}$

(۲) $k \binom{n+1}{k+1}$

(۳) $\binom{n+2}{k+2}$

(۴) $\binom{n+1}{k+1}$

۳۶۴ چند عدد پنج‌رقمی مضرب ۵ با مجموع ارقام ۱۱ وجود دارد که در آن دو رقم دهگان و صدگان مساوی باشند؟

(۱) ۴۸

(۲) ۳۶

(۳) ۲۴

(۴) ۶۴

	۱	x		
۴				۲
	۲			
۳		۲		
	۵		۲	

۳۶۵ در مربع لاتین روبه‌رو، x چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۳۶۶ اگر حاصل عبارت $(1 + x + x^2)^7$ را به دست آوریم، ضریب x^5 کدام است؟

(۱) ۲۱۰

(۲) ۴۸۷

(۳) ۴۸۰

(۴) ۲۶۶



۵۱۰ اگر A, B و C سه مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $C - (A - B)' - (B - C)'$ با کدام مجموعه برابر است؟

- (۱) $A - (B \cup C)$ (۲) $B - (A \cup C)$ (۳) $B - C$ (۴) $(A' \cup B') - C$

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد	وضعیت	درصد	وضعیت	درصد	وضعیت	درصد	وضعیت
زیر ۱۰ درصد	خوب	۱۰ تا ۵۰ درصد	متوسط	۵۰ تا ۹۰ درصد	خوب	بالای ۹۰ درصد	عالی

درس دوم: ضرب دکارتی

درصد پاسخ گویی داوطلب:

آزمون ۵۲

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۴

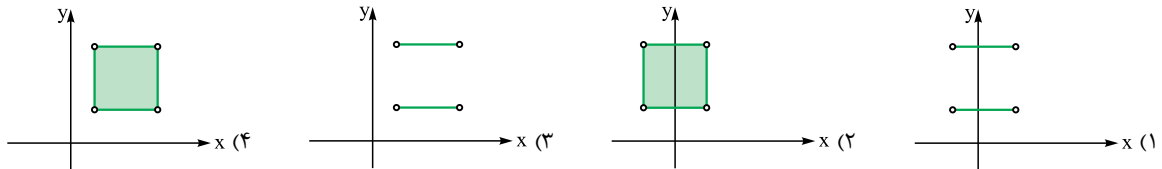
۵۱۱ اگر $n(A) = 7$ ، $n((A \times B) \cap (B \times A)) = 9$ و $n((B - A) \times (A \cup B)) = 18$ باشد، مجموعه $A \times A - A \times B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

۵۱۲ A و B دو مجموعه غیر تهی بوده و $(A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (A' \cup B')' = B$ است. چه تعداد از مجموعه های زیر ممکن است تهی نباشند؟

- الف) $A^2 - B^2$ (۱) ب) $A \times B - B \times A$ (۲) پ) $A \times B - B^2$ (۳) ت) $A^2 - A \times B$ (۴)

۵۱۳ زوج مرتب های $(15, x - y)$ و $(x^2 - y^2, 3)$ برابرند. نمودار ضرب دکارتی $\{x, y\} \times \{y, x\}$ به کدام صورت است؟



۵۱۴ اگر $A = \{y + 2, 5, z\}$ ، $B = \{x + 1, 4, -2\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه $\{x, 2, z\}$ و $\{4, x, z - 2\}$ حداقل چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۵۱۵ A و B دو مجموعه ناتهی بوده و $A \times B = B \times A$ است. با حذف یک عضو از مجموعه A مجموعه C ایجاد می شود که $C \times B = B \times C$ است. مجموعه $A \cup B \cup C$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۱۶ اگر $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $A \cap B = \{2, 5\}$ و $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۴ عضو باشد، مجموعه B چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۲ یا ۴ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۱۷ مجموعه جواب گزاره نمای $(|x + \frac{1}{x}| > 2)$ را A و مجموعه جواب گزاره نمای $\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{p} \Leftrightarrow (x^2 - 1) = 0$ را B می نامیم. نمودار $A \times B$ به کدام صورت است؟

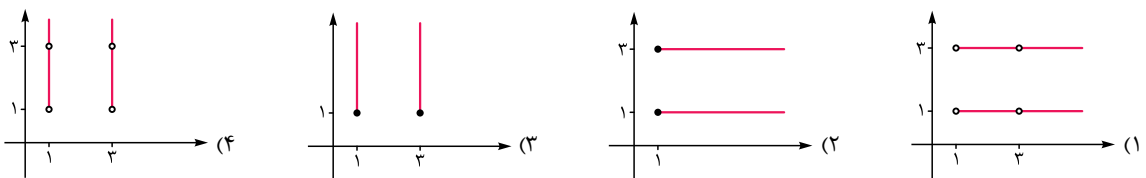
(۱) صفحه محورهای مختصات که دو خط عمودی و دو خط افقی از آن حذف شده است.

(۲) صفحه محورهای مختصات که سه خط عمودی و دو خط افقی از آن حذف شده است.

(۳) دو خط افقی که هر کدام در ۳ نقطه توخالی هستند.

(۴) صفحه محورهای مختصات که سه خط افقی از آن حذف شده است.

۵۱۸ مجموعه مرجع برابر $[1, +\infty)$ است. اگر $A = \{1, 3\}$ ، $A' \subseteq X$ و $A \subseteq X$ ، نمودار ضرب دکارتی $X \times A$ به کدام صورت است؟



۵۱۹ اگر $A = [1, a]$ ، $B = (-1, b]$ و مساحت نمودار $A \times A - B \times B$ برابر ۵ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ چگونه است؟ a و b دو عدد طبیعی بوده و $b < a$

(۴) مربع کامل

(۳) مضرب ۳

(۲) عدد اول

(۱) عدد زوج



۶۰۳ خانواده A دو فرزند دارد. پسر عموی این دو بچه برای بازی به آن‌ها اضافه شده است. حین بازی کردن یکی از ۳ بچه را به تصادف می‌بینیم.

احتمال آن که او پسر باشد، چه قدر است؟

$$\frac{2}{3} (1) \quad \frac{1}{2} (2) \quad \frac{1}{3} (3) \quad \frac{3}{4} (4)$$

۶۰۴ تجربه نشان داده است که در یک روز بهاری، ساحل به احتمال $\frac{6}{10}$ آفتابی و به احتمال $\frac{4}{10}$ ابری است. اگر یک روز آفتابی باشد فردا به احتمال $\frac{7}{10}$ آفتابی ولی اگر ابری باشد به احتمال $\frac{5}{10}$ فردا نیز ابری است. اگر بدانیم فردا ابری است با کدام احتمال امروز نیز ابری بوده است؟

$$\frac{5}{19} (1) \quad \frac{2}{19} (2) \quad \frac{3}{4} (3) \quad \frac{1}{19} (4)$$

۶۰۵ درون کیسه A، ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و درون کیسه B، ۲ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و درون کیسه C، ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه قرار دارد. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب و مهره‌ای خارج می‌کنیم. اگر مهره سفید باشد، آن را در کیسه دیگری که مهره سفید بیشتری دارد قرار داده و اگر مهره سیاه باشد آن را در کیسه دیگری که مهره سیاه بیشتری دارد، قرار می‌دهیم. دوباره مهره‌ای از کیسه‌ای که تعداد مهره‌های بیشتری دارد خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

$$\frac{2}{5} (1) \quad \frac{1}{2} (2) \quad \frac{3}{5} (3) \quad \frac{3}{7} (4)$$

۶۰۶ تیم ملی والیبال ایران ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. آن‌ها به تصادف یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر a زودتر از b وارد سالن شده باشد، احتمال آن که a به عنوان نفر هفتم وارد شده باشد، کدام است؟

$$\frac{7}{13} (1) \quad \frac{6}{91} (2) \quad \frac{1}{13} (3) \quad \frac{1}{182} (4)$$

۶۰۷ سه تاس آبی و سبز و قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع دو تاس آبی و سبز حداقل برابر ۷ است، با کدام احتمال مجموع سه تاس برابر ۱۰ می‌شود؟

$$\frac{8}{63} (1) \quad \frac{1}{2} (2) \quad \frac{5}{42} (3) \quad \frac{1}{6} (4)$$

۶۰۸ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. تعداد واجدین شرایط شهر A، n برابر تعداد واجدین شرایط شهر B است. اگر فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، با احتمال $\frac{5}{9}$ از شهر A خواهد بود. n کدام است؟

$$2 (1) \quad 3 (2) \quad 4 (3) \quad 5 (4)$$

۶۰۹ تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول n برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. در یک بار پرتاب این تاس اگر بدانیم عددی فرد رو شده، به احتمال $\frac{1}{5}$ عددی غیر اول ظاهر شده است. P(۳) کدام است؟

$$\frac{1}{6} (1) \quad \frac{1}{3} (2) \quad \frac{2}{9} (3) \quad \frac{1}{9} (4)$$

۶۱۰ در یک کلاس ۱۱ نفری قد هیچ دو دانش‌آموزی با هم برابر نیست. اگر بدانیم قد a بین قد b و c است و قد d از قد a بلندتر است، با کدام احتمال، a نفر پنجم از نظر قدی است؟

$$\frac{1}{11} (1) \quad \frac{6}{55} (2) \quad \frac{7}{55} (3) \quad \frac{3}{55} (4)$$

جامع

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	😊	😄

درس سوم: چالشی درس سوم (۲)

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون

۶۲

۶۱۱ در یک مسابقه دو، افراد a, b, c, d, e و f شرکت کرده‌اند. احتمال برد a، $\frac{1}{10}$ از هر کدام از شرکت‌کننده‌های دیگر بیشتر است. احتمال

آن که a یا b برنده شود به شرط آن که بدانیم d و c برنده نشده‌اند، چه قدر است؟

$$\frac{1}{7} (1) \quad \frac{2}{7} (2) \quad \frac{3}{7} (3) \quad \frac{4}{7} (4)$$

۶۱۲ در کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۶ مهره قرمز وجود دارد. هر بار به تصادف یک مهره خارج و بدون جای‌گذاری رنگ آن را مشاهده می‌کنیم. اگر مهره قرمز مشاهده شود ۴ مهره آبی به ظرف اضافه و اگر مهره آبی مشاهده شود، ۶ مهره قرمز به ظرف اضافه می‌کنیم. احتمال آن که مهره اول

آبی و مهره دوم قرمز باشد، چه قدر است؟

$$\frac{3}{10} (1) \quad \frac{8}{25} (2) \quad \frac{6}{25} (3) \quad \frac{24}{195} (4)$$





۶۱۳ احتمال آن که امیر به ورزشگاه برود برابر $\frac{3}{5}$ و احتمال آن که بهروز به ورزشگاه نرود $\frac{2}{3}$ است. احتمال آن که حداقل یکی از آنها به ورزشگاه برود برابر $\frac{9}{10}$ است. احتمال آن که امیر به ورزشگاه برود به شرط آن که بدانیم بهروز به ورزشگاه نرفته چه قدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{2}{5} \quad (4)$$

۶۱۴ ظرف A شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه و ظرف B شامل ۲ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. یک مهره به تصادف از A درون B و سپس مهره‌ای به تصادف از B درون A قرار می‌دهیم. مهره‌ای از ظرف A خارج کرده و مشاهده می‌کنیم که سفید است. احتمال آن که مهره‌ای که از A درون B و بالعکس قرار داده باشیم هر دو سیاه باشد، چه قدر است؟

$$\frac{109}{181} \quad (1) \quad \frac{18}{35} \quad (2) \quad \frac{108}{181} \quad (3) \quad \frac{9}{35} \quad (4)$$

۶۱۵ بین ۱۰ نفر اعضای یک تیم والیبال با قدهای متفاوت، رضا و علی از محسن بلندتر هستند. احتمال آن که رضا بلندترین عضو تیم باشد، چه قدر است؟

$$\frac{1}{20} \quad (1) \quad \frac{1}{10} \quad (2) \quad \frac{3}{20} \quad (3) \quad \frac{3}{10} \quad (4)$$

۶۱۶ ۱۰ نفر به چهار کاندیدی A, B, C, D رأی داده‌اند. اگر بدانیم رأی کاندید A حداقل ۳ رأی بوده با کدام احتمال او ۴ رأی آورده است؟ (هر فرد دقیقاً به یک کاندید رأی می‌دهد.)

$$\frac{7}{30} \quad (1) \quad \frac{4}{15} \quad (2) \quad \frac{2}{15} \quad (3) \quad \frac{3}{10} \quad (4)$$

۶۱۷ در یک خانواده ۶ فرزند، تعداد پسرها و دخترها برابر نیست. احتمال آن که جنسیت فرزند اول و آخر یکسان باشد، کدام است؟

$$\frac{5}{22} \quad (1) \quad \frac{8}{11} \quad (2) \quad \frac{6}{22} \quad (3) \quad \frac{6}{11} \quad (4)$$

۶۱۸ یک شرکت بیمه، بیمه‌گذاران خود را به دو گروه پرخطر که با احتمال $\frac{5}{10}$ در سال تصادف می‌کنند و گروه کم‌خطر که در سال با احتمال $\frac{2}{10}$ تصادف می‌کنند تقسیم کرده است. می‌دانیم ۳۰ درصد بیمه‌گذاران پرخطرند. احتمال آن که فرد A جزء گروه پرخطر باشد، قبل و بعد از این که بدانیم تصادف کرده، تقریباً چه قدر با هم اختلاف دارد؟

$$10\% \quad (1) \quad 20\% \quad (2) \quad 30\% \quad (3) \quad 40\% \quad (4) \text{ درصد}$$

۶۱۹ جعبه A شامل مهره‌هایی با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ..., ۴۰۰ و جعبه B شامل ۶ مهره سفید و ۴ مهره آبی و جعبه C شامل مهره‌های آبی است. دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع شماره‌ها عددی اول باشد، یک مهره از A و در غیر این صورت با انتخاب تصادفی B یا C یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره خارج شده نه مضرب ۳ و نه مضرب ۴ بوده یا آبی است؟

$$\frac{13}{30} \quad (1) \quad \frac{28}{45} \quad (2) \quad \frac{37}{60} \quad (3) \quad \frac{39}{120} \quad (4)$$

۶۲۰ دو ظرف داریم که در ظرف اول ۲ مهره سیاه و ۳ مهره سفید و در ظرف دوم ۴ مهره سیاه و ۱ مهره سفید داریم. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد تاس مضرب ۳ باشد یک مهره از ظرف اول و اگر مضرب ۳ نباشد، از ظرف دوم یک مهره حذف می‌کنیم. حالا مهره‌های باقی‌مانده دو ظرف را در یک ظرف می‌ریزیم و از این ظرف یک مهره برمی‌داریم. با چه احتمالی این مهره سفید است؟

$$\frac{8}{27} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{10}{27} \quad (3) \quad \frac{11}{27} \quad (4)$$

نوع آزمون: مبحثی جامع

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۵۰ درصد	۵۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت	☹️	😐	🙂	😊

درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون
۶۳

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۶۲۱ برای دو پیشامد مستقل A و B داریم $P(A - B | A) = \frac{2}{3}$ حاصل $P(B | A')$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{2}{3} \quad (4)$$

۶۲۲ در پرتاب دو تاس پیشامد «تاس اول ۳ بیاید.» با کدام پیشامد مستقل است؟

(۱) مجموع دو تاس ۷ باشد. (۲) مجموع دو تاس ۱۰ باشد. (۳) مجموع دو تاس ۶ باشد. (۴) مجموع دو تاس ۳ باشد.

۶۲۳ A و B دو پیشامد ناتمی مستقل‌اند که $P(A | B) = \frac{1}{5}$ است. اگر $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ باشد، $P(A \cup B')$ کدام می‌شود؟

$$\frac{4}{9} \quad (1) \quad \frac{5}{9} \quad (2) \quad \frac{8}{9} \quad (3) \quad \frac{9}{9} \quad (4)$$





۷۰۴ واریانس داده‌های a, b, c, d برابر ۹ و میانگین آن‌ها برابر ۴ است. اگر ضریب تغییرات داده‌های $1 + \frac{a}{k}, 1 + \frac{b}{k}, 1 + \frac{c}{k}, 1 + \frac{d}{k}$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، k کدام است؟ ($k > 0$)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۷۰۵ ضریب تغییرات داده‌های آماری برابر $8/0$ است. اگر به همه داده‌ها ۵ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات برابر $75/0$ می‌شود. واریانس داده‌ها کدام است؟

(۱) ۶۰ (۲) ۳۶۰۰ (۳) $2/8$ (۴) $7/84$

۷۰۶ مربع‌هایی با میانگین اضلاع ۲ در اختیار داریم. طول ضلع هر کدام را یک واحد اضافه کرده و سپس دو برابر می‌کنیم. ضریب تغییرات محیط مربع‌ها چه تغییری می‌کند؟

(۱) تغییری نمی‌کند. (۲) $\frac{4}{3}$ برابر می‌شود. (۳) $\frac{3}{4}$ برابر می‌شود. (۴) $\frac{2}{3}$ برابر می‌شود.

۷۰۷ ۱۱ داده آماری با میانگین ۱۵ و انحراف معیار ۳ داریم، داده ۱۴ را اضافه و داده‌های ۱۲ و ۱۷ را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های جدید چه قدر است؟

(۱) $8/7$ (۲) ۱۰ (۳) $11/1$ (۴) $12/4$

۷۰۸ اگر میانگین و واریانس داده‌های $1 + 2x_1, 1 + 2x_2, \dots, 1 + 2x_n$ به ترتیب برابر ۴ و ۹ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $x_1 - 1, x_2 - 1, \dots, x_n - 1$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۳ (۴) $4/5$

۷۰۹ میانگین ۱۲ عدد برابر ۱۶ است. با اضافه شدن اعداد ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹ ضریب تغییرات کل داده‌ها برابر $\frac{1}{8}$ می‌شود. واریانس ۱۲ داده اولیه کدام است؟

(۱) $\frac{11}{3}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{11}{4}$ (۴) $1/25$

۷۱۰ اگر میانگین و واریانس داده‌های x_i به ترتیب برابر $1/2$ و $25/0$ باشد. میانگین داده‌های $2x_i + y_i = x_i^2$ کدام است؟

(۱) $4/09$ (۲) $2/89$ (۳) $1/69$ (۴) $4/84$

نوع آزمون: מבחן جامع

درصد	زیر ۱۰ درصد	۱۰ تا ۴۰ درصد	۴۰ تا ۸۰ درصد	بالای ۸۰ درصد
وضعیت				

درس اول و دوم: چالشی فصل سوم آمار و احتمال

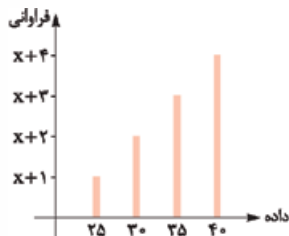
درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

آزمون

۷۲

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۶

۷۱۱ در نمودار میله‌ای مقابل اختلاف دو زاویه نمودار دایره‌ای متناظر با بلندترین و کوچک‌ترین میله برابر 60° است. میانگین داده‌ها تقریباً کدام است؟



(۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۴ (۴) ۳۵

۷۱۲ انحراف معیار ۱۲ داده آماری برابر ۲ است. اگر ۴ داده جدید که انحراف آن‌ها از میانگین داده‌های اولیه برابر ۳، ۳، ۱، -۱، -۵ است را به داده‌ها اضافه کنیم، واریانس کل داده‌ها کدام است؟

(۱) $2/39$ (۲) $7/66$ (۳) $2/76$ (۴) $5/75$

۷۱۳ واریانس ۱۷ داده $\cos 1^\circ, \cos 2^\circ, \cos 3^\circ, \dots$ و $\cos 17^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{8}{17}$ (۳) $\frac{9}{17}$ (۴) $\frac{7}{17}$

۷۱۴ دسته‌های ۴ تایی از اعداد اول را در نظر بگیرید. حداقل مقدار واریانس اعضای این دسته‌ها کدام است؟

(۱) $\frac{35}{4}$ (۲) $\frac{101}{2}$ (۳) $\frac{87}{4}$ (۴) $\frac{59}{16}$

۷۱۵ جدول فراوانی زیر مفروض است. اگر مقدار میانه برابر ۱۷ باشد، $a - b$ چه مقداری ممکن است داشته باشد؟ (داده‌ها لزوماً به

داده	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸	a
فراوانی	۳	۲	۶	۳	۱	۱	۵	b

(۱) ۸ یا ۱۴ (۲) ۹ یا ۱۳ (۳) فقط ۱۴ (۴) فقط ۹





۷۴۷ با انتخاب نمونه‌ای به اندازه ۱۴۴، از جامعه‌ای با انحراف معیار $2/4$ ، 95% اطمینان داریم که حداکثر میانگین جامعه، برابر $9/4$ است. مجموع عضوهای نمونه چه قدر است؟

- (۱) $1267/2$ (۲) 1296 (۳) $1324/8$ (۴) 1440

۷۴۸ در یک جامعه، انحراف معیار برآورد میانگین با نمونه‌های 100 تایی برابر $6/0$ است. میانگین یک نمونه تصادفی 100 عضوی برابر 30 شده است. میانگین این جامعه با اطمینان 95% چند عدد صحیح ممکن است داشته باشد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۷۴۹ طول بازه اطمینان 95% برآورد میانگین در جامعه‌ای با انحراف معیار $1/25$ توسط یک نمونه‌گیری برابر k درصد شده است. اگر تعداد نمونه‌ها را به 10000 تا برسانیم، طول بازه اطمینان نصف می‌شود. k کدام است؟

- (۱) 10 (۲) 5 (۳) 20 (۴) $2/5$

۷۵۰ انحراف معیار جامعه‌ای σ است. یک نمونه به اندازه $16\sigma^2$ و نمونه‌ای دیگر به اندازه $k^2\sigma^2$ انتخاب می‌کنیم به طوری که حداکثر خطا برای نمونه اول نصف حداکثر خطا برای نمونه دوم است. اگر نمونه‌ای به اندازه $9k^2\sigma^2$ انتخاب کنیم، حداکثر خطا کدام است؟

- (۱) 3 (۲) $1/3$ (۳) 1 (۴) $1/3$

جامع

نوع آزمون: مبحثی

درصد	زیرا	۱۰ تا ۶۰ درصد	۶۰ تا ۹۰ درصد	بالای ۹۰ درصد
وضعیت	خوب	متوسط	خوب	بسیار خوب

جامع فصل (۱)

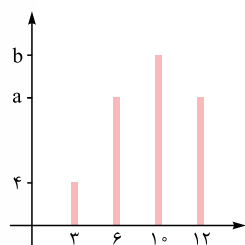
آزمون

۷۶

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۵

۷۵۱ در نمودار میله‌ای مقابل، فراوانی نسبی داده ۱۰ برابر $1/3$ و مجموع زوایای داده‌های ۳، ۶، ۱۰ در نمودار



دایره‌ای برابر با 264° است. اگر تعدادی داده طوری حذف کنیم که بلندترین میله هم ارتفاع دو میله کناری

شود، میانگین داده‌های جدید کدام است؟

- (۱) $59/7$ (۲) $116/15$ (۳) $55/7$ (۴) $23/3$

۷۵۲ در داده‌های $11, 10, 6, 8, 7, 7, 8, 6, 11, a$ ضریب تغییرات مقادیر میانگین، مد و میانه برابر صفر است. a کدام است؟

- (۱) 65 (۲) 70 (۳) 80 (۴) نشدنی

۷۵۳ مجموعه A با حداقل دو عضو طبیعی به گونه‌ای است که شامل اعداد متوالی با مجموع 100 است. نسبت واریانس اعداد عضو A در دو حالت مطلوب کدام است؟

- (۱) $3/4$ (۲) $8/9$ (۳) $8/21$ (۴) $2/3$

۷۵۴ داده‌های $0, 3, 1, 5, 7, 2$ را در نظر بگیرید. اضافه کردن کدام یک از اعداد به این داده‌ها میانه را بیشتر تغییر می‌دهد؟

- (۱) اعداد a, b با انحراف معیار صفر (۲) اعداد $a, 7, 3$ با تنها مد ۳

- (۳) اعداد a, b, c, d با میانه ۴ (۴) چارک سوم داده‌ها

۷۵۵ تعدادی داده در اختیار داریم. اگر انحراف معیار داده‌ها را به تمام داده‌ها اضافه کنیم ضریب تغییرات داده‌های جدید $25/0$ ضریب تغییرات داده‌های اولیه می‌شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- (۱) $1/25$ (۲) 1 (۳) $5/0$ (۴) $75/0$

۷۵۶ میانگین طول عمر لاستیک‌های تولیدی سه کارخانه A، B، C به ترتیب برابر با 80 و 60 و 98 بر حسب هزار کیلومتر و واریانس آن‌ها به ترتیب برابر با $2/25$ ، $1/81$ و $4/0$ است. کدام ترتیب برای کیفیت لاستیک‌های تولیدی مناسب است؟

- (۱) $C < B < A$ (۲) $C < A < B$ (۳) $B < A < C$ (۴) $A < B < C$

۷۵۷ ۱۵ تیم حاضر در لیگ هر کدام ۲۰ بازیکن دارند. می‌خواهیم از بین کل بازیکنان، نمونه‌ای ۶۰ نفره برای تست دوپینگ طوری انتخاب کنیم که از هر تیم به تعداد مساوی بازیکن انتخاب شود. نوع نمونه‌گیری و احتمال انتخاب هر بازیکن کدام است؟

- (۱) طبقه‌ای - $2/0$ (۲) سیستماتیک - $25/0$ (۳) طبقه‌ای - $25/0$ (۴) سیستماتیک - $2/0$

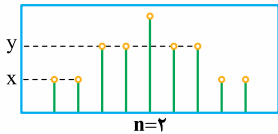




۷۵۸ برای این که انحراف معیار بر آورد میانگین حداکثر برابر با ۵ درصد انحراف معیار جامعه باشد، حداقل اندازه نمونه کدام است؟

- ۱۰۰ (۱) ۴۰۰ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴)

۷۵۹ جدول احتمال بر حسب میانگین با نمونه‌های دوعضوی داده‌های ۲، ۵، ۳، ۱، ۰، ۴ به صورت زیر است. حاصل $x + y$ کدام است؟



- ۱/۳ (۱) ۴/۱۵ (۲) ۰/۲۵ (۳) ۰/۲ (۴)

۷۶۰ بر آورد میانگین با اطمینان ۹۵٪ توسط نمونه‌ای ۱۰۰ عضوی به صورت $[4/4, 5/6]$ بر آورد شده است. اگر انحراف معیار جامعه و نمونه برابر

باشد، ضریب تغییرات نمونه چه قدر بوده است؟

- ۰/۶ (۱) ۱/۲ (۲) ۱۲ (۳) ۶ (۴)

جامع نوع آزمون: مبحثی

جامع فصل (۲)

آزمون

۷۷

درصد پاسخ‌گویی داوطلب:

زمان پیشنهادی (دقیقه): ۱۷

۳/۲، ۷/۵، ۱۱، ۱۲/۵، ۱۴، ۶/۳، ۷/۱، a

۷۶۱ در یک جامعه درآمد افراد بر حسب میلیون تومان به صورت مقابل است:

اگر خط فقر برابر ۵/۵ باشد میانه داده‌ها چه قدر است؟

- ۷/۳ (۱) ۱۰/۲ (۲) ۱۱/۷۵ (۳) ۹/۲۵ (۴)

۷۶۲ در داده‌های ۱۸، ۱۹، ۳۰، ۳۴، ۳۲، ۳۰، ۲۷، ۲۵، ۲۶ واریانس مقادیر R ، Q_1 ، Q_2 ، Q_3 ، IQR کدام است؟

- ۶۲ (۱) ۶۲/۲ (۲) ۶۱ (۳) ۶۱/۲ (۴)

۷۶۳ زاویه داده ۶ در نمودار دایره‌ای جدول زیر برابر 108° است. میانگین داده‌های x_i کدام است؟

$2x_i - 5$	۱۰	۶	۴	۱
فراوانی نسبی	۰/۱	b	a	۰/۱۵

- ۴/۸۷۵ (۱) ۴/۷۵ (۲) ۵/۲۵ (۴) ۵ (۳)

۷۶۴ انحراف معیار داده‌های ۶، a، b، c، d کم‌ترین مقدار خود را دارد و با اضافه کردن آن‌ها به داده‌های طبیعی ۷، ۱۱، x، ۳، y میانگین تغییری

نمی‌کند. کم‌ترین مقدار واریانس کل داده‌ها با هم کدام است؟

- ۴/۴ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $\sqrt{4/4}$ (۴)

۷۶۵ اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد اعضای هر دسته، برابر کوچک‌ترین عضو آن دسته باشد، یعنی:

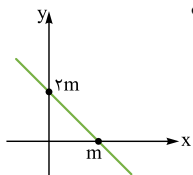
$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \dots$

چهارک سوم دسته دهم کدام است؟

- ۸۹۵/۵ (۱) ۸۹۶/۵ (۲) ۸۹۷/۵ (۳) ۸۹۸/۵ (۴)

۷۶۶ نقاط (x_i, y_i) که $x_i = 1, 2, 3, \dots, m$ را روی خط مقابل در نظر بگیرد. اگر $CV_y = 2CV_x$ باشد، m کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۴) ۵ (۳)



۷۶۷ در نمودار جعبه‌ای ۳۲ داده آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه ۲۰ و ۲۴ می‌باشد. اگر میانگین کل داده‌ها ۲۵ باشد، میانگین داده‌های

داخل جعبه چه قدر است؟

- ۲۳ (۱) ۲۴ (۲) ۲۶ (۳) ۲۸ (۴)

۷۶۸ می‌خواهیم از بین ۷۲۰ نفر نمونه‌ای به اندازه n به روش سامانمند انتخاب کنیم. اگر مجموع شماره‌های انتخاب‌شده برابر ۱۴۱۶۰ و از گروه

اول شماره ۳ انتخاب شده باشد کدام گزینه در مورد n درست است؟

- ۱) مضرب ۳ (۲) عددی اول (۳) مربع کامل (۴) مضرب ۴

۷۶۹ در جامعه $\{1, 2, 4, 6, 7\}$ احتمال این که یک نمونه ۳ عضوی مقدار میانگین را حداکثر با $\frac{1}{3}$ خطا بر آورد کند، چه قدر است؟

- ۱/۱۰ (۱) ۱/۵ (۲) ۳/۱۰ (۳) ۲/۵ (۴)

۷۷۰ شاخص پوسیدگی دندان، براساس نمونه‌ای به اندازه ۴۰۰، برابر ۶ ($\bar{x} = 2$) شده است. اگر انحراف معیار دندان‌های کشیده، پوسیده و

پرسده به ترتیب برابر ۱/۲، ۲ و ۱/۴ باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین دندان‌های پرسده کدام است؟

- [۱/۹۴، ۲/۰۶] (۱) [۱/۸۶، ۲/۱۴] (۲) [۱/۸۸، ۲/۱۲] (۳) [۵/۸۸، ۶/۱۲] (۴)





۳ ۳ یکی از اعداد ۱ تا ۶ می تواند باشد؛ پس کافی است یکی یکی آن ها را امتحان کنیم تا ببینیم به ازای کدام اعداد، حاصل

$$A = \frac{(n+1)^2 - 1}{4} \text{ زوج می شود.}$$

$$n=1 \Rightarrow A = \frac{3}{4} \times \quad n=2 \Rightarrow A=2 \checkmark$$

$$n=3 \Rightarrow A = \frac{15}{4} \times \quad n=4 \Rightarrow A=6 \checkmark$$

$$n=5 \Rightarrow A = \frac{35}{4} \times \quad n=6 \Rightarrow A=12 \checkmark$$

پس مجموعه A با حداکثر تعداد اعضا به صورت $\{2, 4, 6\}$ است، بنا بر A حداکثر ۳ عضو دارد.

توجه! برای پیدا کردن مجموعه A از روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالاتها استفاده کردیم.

۴ ۴

حاصل ضرب ۳ عدد صحیح متوالی، همواره بر $3!$ (یا ۶) بخش پذیر است. در حالت کلی، ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش پذیر است.

الف $n^3 - n$ را تجزیه می کنیم:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)(n)(n+1)$$

مضرب ۶ $\Rightarrow$ حاصل ضرب ۳ عدد صحیح متوالی $\Rightarrow$

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$$

$$= (n-1)(n)(n+1)(n^2 + 1) = 6q'$$

$6q =$ ضرب سه عدد متوالی

ب $n^3 + 5n$ هم همواره بر ۶ بخش پذیر است، چون اگر n را اضافه و کم کنیم داریم:

$$n^3 + 5n = n^3 - n + n + 5n = (n^3 - n) + 6n = 6q' \quad \text{طبق الف}$$

بنابراین هر سه عبارت همواره مضرب ۶ هستند.

۵ ۱

در مورد حالت های مختلف جمع، تفريق و ضرب اعداد گویا و گنگ داریم:

ضرب (نوع اثبات)	جمع و تفريق (نوع اثبات)	عملیات نوع اعداد
گویا (مستقیم)	گویا (مستقیم)	دو عدد گویا
ضرب گویای ناصفر در گنگ = گنگ (برهان خلف)	گنگ (برهان خلف)	یکی گویا و یکی گنگ
ممکن است گویا یا گنگ باشد.	ممکن است گویا یا گنگ باشد.	هر دو گنگ

سعی می کنیم اعداد داده شده را به صورت جمع و تفريق یا ضرب اعداد گویا و گنگ نوشته و از نکته بالا استفاده کنیم:

$$\alpha + \beta = \underbrace{\alpha}_{\text{گویا}} + \underbrace{\beta}_{\text{گنگ}} = \text{گنگ} \quad (\text{جمع گویا و گنگ، گنگ است.})$$

آزمون ۱

۱ ۲

مثال نقض مثالی است که درستی یک حکم کلی را نقض می کند. دقت کنید مثال نقض باید در فرض های سؤال صدق کند.

$n=1$ تا $n=5$ را امتحان می کنیم، اگر به ازای عددی $2^n + 1$ غیروال باشد، حکم نقض می شود:

$$n=1 \Rightarrow 2^1 + 1 = 3$$

$$n=2 \Rightarrow 2^2 + 1 = 5$$

$$n=3 \Rightarrow 2^3 + 1 = 9 \Rightarrow \text{غیروال}$$

$$n=4 \Rightarrow 2^4 + 1 = 17$$

$$n=5 \Rightarrow 2^5 + 1 = 33 \Rightarrow \text{غیروال}$$

فقط به ازای $n=3, 5$ حکم نادرست می شود؛ پس در بین اعداد طبیعی کم تر از ۶، دو مثال نقض، داریم.

۲ ۳

۱ اگر به حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج (یا فرد)، یک واحد اضافه کنیم، حاصل مربع کامل می شود:

$$\underbrace{k(k+2)+1}_{\text{حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج یا فرد}} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج یا فرد

۲ اگر k به صورت حاصل ضرب دو عدد متوالی باشد، $4k+1$ مربع کامل است:

$$k = \underbrace{t(t+1)}_{\text{حاصل ضرب دو عدد متوالی}} \Rightarrow 4k+1 = 4t(t+1)+1 = 4t^2 + 4t + 1$$

حاصل ضرب دو عدد متوالی

$$= (2t+1)^2$$

۳ اگر به حاصل ضرب ۴ عدد متوالی یک واحد اضافه کنیم، حاصل مربع کامل است:

$$\underbrace{k(k+1)(k+2)(k+3)+1}_{\text{حاصل ضرب ۴ عدد متوالی}} = \underbrace{k(k+3)}_{\text{حاصل ضرب دو عدد متوالی}} \underbrace{(k+1)(k+2)}_{\text{حاصل ضرب دو عدد متوالی}} + 1$$

$$= (k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1$$

فرض کنید $k^2 + 3k = A$ ، پس:

$$= A(A+2) + 1 = A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2$$

هر مورد را بررسی می کنیم:

الف فرض کنید $k=1401$ ، پس:

$$\text{طبق (۱) مربع کامل است.} \Rightarrow \frac{1401 \times 1403}{k} + 1 = k(k+2) + 1$$

ب دوباره فرض کنید $k=1401$ ، پس:

$$\text{طبق (۲) مربع کامل است.} \Rightarrow \frac{4 \times 1401 \times 1402}{k} + 1 = 4k(k+1) + 1$$

پ در آخر با فرض $k=1400$ ، داریم:

$$\frac{1400 \times 1401 \times 1402 \times 1403}{k} + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$$

پس طبق (۳) مربع کامل است. بنابراین هر سه عدد، مربع کامل اند.

اما عبارت ۴ همواره زوج نیست، به عنوان مثال نقض فرض کنید
 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 3$ ؛ پس:
 $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = (1 - 2)(2 - 1)(3 - 3) = -1$
 که عددی فرد است.

در مورد این تمرین خوب است نکات زیر را به یاد داشته باشید:

۱ این قضیه برای اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$ که b_i ها همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند، نیز برقرار است، به شرطی که n (تعداد اعداد) فرد باشد.

۲ اگر b_i در پرانتزها را جابه‌جا کنیم، باز هم قضیه برقرار است؛ مثلاً عدد $(a_1 - b_2)(a_2 - b_3)(a_3 - b_1)$ نیز زوج است.

۳ $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ (چون فقط ترتیب اعداد فرق دارد؛ پس مجموع اعداد یکسان می‌شود). تناقض حاصل در روش برهان خلف نیز از همین‌جا می‌آید.

۴ تساوی زیر همواره درست است:

$$a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_n$$

۸ از رابطه داده‌شده و با استفاده از روابط دوطرفه داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{4}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a-b=0$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

پس a هر عدد دورقمی که باشد، b هم باید برابر همان عدد باشد؛ بنابراین a می‌تواند برابر همه اعداد $10, 11, \dots, 99$ (یعنی ۹۰ عدد) باشد.

۹ طبق روش اثبات بازگشتی سعی می‌کنیم رابطه داده‌شده

را با اعمال دوطرفه به یک رابطه همواره درست برسانیم. دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم تا بتوانیم به اتحادهای مربع دو جمله‌ای برسیم:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y + x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

مجموع چند عبارت که همگی توان دوم دارند نامنفی است؛ پس رابطه آخر همواره درست است.

۱۰

$$\binom{k}{r} + \binom{k}{r+1} = \binom{k+1}{r+1}$$

اتحاد پاسکال:

با توجه به نکته، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-1}{3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\underbrace{\left(\binom{n-1}{2} \right)}_{\text{همون } a_1 + a_2 + a_3}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \text{گنگ} \times \text{گویای غیر صفر}$$

$$2\alpha + \beta = -(\alpha - \beta) + 3\alpha = \text{گنگ} + \text{گویا}$$

پس هر سه تا گنگ هستند.

۶ برای اثبات گزاره $a=0 \vee b=0 \Rightarrow ab=0$ از

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها استفاده می‌کنیم. یک بار فرض می‌کنیم $a=0$ باشد (که در این صورت حکم درست است). بار دیگر $a \neq 0$ می‌گیریم که در این صورت با ضرب دو طرف در $\frac{1}{a}$ نتیجه می‌شود $b=0$ است.

$$ab=0 \xrightarrow[\times(\frac{1}{a})]{a \neq 0} \frac{1}{a} \times a \times b = 0 \Rightarrow b=0$$

در اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها داریم از هم‌ارزی ۱ استفاده می‌کنیم. در واقع فرض را به دو قسمت (یا چند قسمت) مثل p و q تقسیم می‌کنیم و به جای این‌که نشان بدهیم از p یا q ($p \vee q$) به r می‌رسیم، نشان می‌دهیم هم از p به r می‌رسیم ($p \Rightarrow r$) و هم از q به r ($q \Rightarrow r$) می‌رسیم.

در حالت کلی، در اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها، از هم‌ارزی

زیر استفاده می‌کنیم:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow r$$

$$\equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

۷

تمرین مهمی در کتاب درسی وجود دارد که می‌گویید: «اگر a_1, a_2, a_3 سه عدد صحیح و b_1, b_2, b_3 همان اعداد ولی با ترتیب متفاوتی باشند، آن‌گاه $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است». اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد؛ پس فرد است. از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب چند عدد، فقط وقتی فرد می‌شود که تک‌تک آن اعداد فرد باشند، پس $(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), (a_3 - b_3)$ فرد هستند. جمع سه عدد فرد، فرد است ولی جمع این ۳ عدد صفر می‌شود چون:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)}_{\text{همون } a_1 + a_2 + a_3} - (b_1 + b_2 + b_3) = 0 \quad (\text{تناقض})$$

طبق نکته بالا، عبارت ۱ همواره زوج است. عبارت ۲ هم همواره زوج است، چون بالاخره b_1 با یکی از a_1, a_2, a_3 برابر است، پس $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = 0$ می‌شود.

عبارت ۳ هم مشابه استدلال گفته‌شده در نکته همواره زوج است:

$$a_1 - b_2 + a_2 - b_1 + a_3 - b_3$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 - \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3)}_{\text{همون } a_1 + a_2 + a_3} = 0$$

نماد ریاضی	توضیح	
$a \Rightarrow a = 0$	صفر فقط خودش را عاد می‌کند.	۸
$\begin{cases} a b \\ a c \end{cases} \Rightarrow a b \pm c$	اگر a دو عدد b و c را عاد کند، جمع و تفریق آن‌ها را هم عاد می‌کند.	۹
$a > 1, a^n a^m \Rightarrow n \leq m$	توان سمت راست باید بزرگ‌تر یا مساوی توان سمت چپ باشد.	۱۰
$a b, b c \Rightarrow a c$	ویژگی تعدی	۱۱
$ab c \Rightarrow a c, b c$	به جای سمت چپ می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم (لاغر کنیم).	۱۲

الف) نادرست است، مثلاً $5|2+3$ ولی $5 \nmid 2$ و $5 \nmid 3$.

ب) درست است. (ویژگی ۱۲ در جدول بالا)

پ) نادرست است، مثلاً $2 \times 3 = 6 \times 1$ اما $2 \nmid 3$ و $6 \nmid 1$. از تساوی

$ab = cd$ مثلاً می‌توانیم رابطه $c|ab$ را نتیجه بگیریم.

۲۲ طبق مورد ۸ نکته سؤال قبل داریم:

$$\begin{aligned} & n^2 - n \\ \Rightarrow n^2 - n = 0 & \Rightarrow n(n-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

پس به ازای ۳ مقدار صحیح، رابطه داده شده درست می‌شود نه هر عدد صحیح n .

ب) $7^2 | n! \Rightarrow 7^2 | n! \Rightarrow 7^2 | n!$ باید مقسوم‌علیه $n!$ باشد. $n!$ باید حداقل ۲ تا عامل ۷ داشته باشد.

کوچک‌ترین عدد طبیعی n به طوری که $n!$ حداقل ۲ تا عامل ۷ داشته باشد، ۱۴ است؛ پس این گزاره نادرست می‌شود.

$$8^{n+3} | 5^{5n-2} \xrightarrow{8=2^3 \Rightarrow 8^{n+3} = 2^{3n+9}} 2^{3n+9} | 5^{5n-2}$$

توان سمت راست باید بزرگ‌تر یا مساوی توان سمت چپ باشد:

$$\begin{aligned} & 3n+9 \leq 5n-2 \Rightarrow 11 \leq 2n \\ & \Rightarrow 5/5 \leq n \xrightarrow{\text{طبیعی } n} n \geq 6 \end{aligned}$$

بنابراین (الف) و (ب) نادرست و (پ) درست است.

۲۳ هر دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ بر a بخش‌پذیرند؛

پس a هر دو عدد را عاد می‌کند. با استفاده از ویژگی‌های عاد کردن سعی می‌کنیم k را از بین ببریم:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a|9k+7 \xrightarrow{\times 7} a|7(9k+7) \Rightarrow a|63k+49 \\ a|7k+6 \xrightarrow{\times 9} a|9(7k+6) \Rightarrow a|63k+54 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{طرف‌های راست}} a|63k+54-63k-49 \Rightarrow a|5 \end{aligned}$$

a مقسوم‌علیه ۵ است؛ پس:

$$a = \pm 1, \pm 5 \Rightarrow \text{چهار عدد صحیح وجود دارد.}$$

مرحله (*) دوشروطی است، چون اگر x و y دو عدد مثبت باشند، ترکیب دوشروطی $x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow x \leq y$ درست است.

۲۰ عبارت داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} & \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ & \frac{n(n+1)}{2} \text{ توان دوم یک عدد، وقتی زوج است که خود عدد زوج باشد؛ پس } \frac{n(n+1)}{2} \\ & \frac{n(n+1)}{2} = 2k \Rightarrow n(n+1) = 4k \end{aligned}$$

$n+1$ و n ، دو عدد متوالی‌اند، پس یکی فرد و دیگری زوج است؛ بنابراین ضرب آن‌ها وقتی مضرب هم می‌شود که یا n مضرب ۴ باشد یا $n+1$.

$$n = 4k \text{ یا } n+1 = 4k \Rightarrow n = 4k \text{ یا } n = 4k-1$$

پس n باید به صورت $4k-1$ یا $4k$ باشد. حالا چون n فرد است؛

پس n باید به صورت $4k-1$ باشد. از طرفی n دورقمی است؛ پس:

$$10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 4k-1 \leq 99$$

$$\Rightarrow k = 3, 4, 5, \dots, 25 \Rightarrow 25-3+1 = 23$$

پس ۲۳ تا عدد دورقمی داریم.

نکته: خوب است نکته زیر که در تمرین کتاب درسی آمده است را به یاد داشته باشید:

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ زوج} \Leftrightarrow n = 4k \text{ یا } n = 4k-1$$

آزمون ۳

۲۱

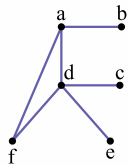
نکته:

ویژگی‌های عاد کردن در یک نگاه اگر $a|b$ ، آن‌گاه a مقسوم‌علیه b و b مضرب a است.

نماد ریاضی	توضیح
$a b \xrightarrow{m \neq 0} ma mb$	می‌توانیم دو طرف را در عدد صحیح m ضرب کنیم.
$a b \Rightarrow a mb$	می‌توانیم سمت راست را در عدد صحیح دلخواه m ضرب کنیم (چاق کنیم).
$a b \Rightarrow a^n b^n$	می‌توانیم دو طرف را به توان عدد طبیعی n برسانیم.
$a b \Rightarrow a b^n$	می‌توانیم فقط سمت راست را به توان عدد طبیعی دلخواه برسانیم (چاق کنیم).
$\pm a \pm a$	هر عدد صحیح خودش را عاد می‌کند.
$\pm 1 \pm a$	± 1 هر عددی را عاد می‌کند.
$a 0$	هر عدد صحیح، صفر را عاد می‌کند.

همچنین $N_G[e] = \{f, d, e\}$ ، پس تعداد عضوهای آن برابر $|N_G[e]| = 3$ می‌شود؛ پس همین گزینه جواب تست است.

توجه اگر یال fe را حذف می‌کردیم:

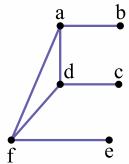


رأس f در گراف مکمل به b و c و e وصل است، پس $\deg_{\bar{G}}(f) = 3$.

اما $N_G[e] = \{d, e\}$ ؛ پس:

$$\deg_{\bar{G}}(f) + |N_G[e]| = 5$$

توجه اگر یال ed را حذف می‌کردیم:



$$\deg_{\bar{G}}(f) + |N_G[e]| = 2 + 2 = 4$$

۲۱۳

ویژگی‌های گراف کامل

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف کامل مرتبه p	K_p	گرافی که هر دو رأس آن مجاورند (به هم وصل‌اند).	(۱) درجه همه رأس‌ها $p-1$ است. (۲) گراف $(p-1)$ - منتظم است. (۳) $q = \frac{p(p-1)}{2}$ (۴) بیشترین یال را در بین گراف‌های هم‌مرتبه خود دارد.

در گراف کامل $q = \frac{p(p-1)}{2}$ و $\Delta = \delta = p-1$ است، اما اگر یک

یال از آن را حذف کنیم $q(G) = \frac{p(p-1)}{2} - 1$ و $\Delta = p-1$ و

$\delta = p-2$ (دقت دارید که $p > 2$) می‌شود. با جای‌گذاری در رابطه

$$\frac{p(p-1)}{2} - 1 = (p-1)(p-2) - 3(p-2)$$

$$= (p-2)(p-1-3) = (p-2)(p-4) = p^2 - 6p + 8$$

$$\Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = p^2 - 6p + 9 \Rightarrow p^2 - p = 2p^2 - 12p + 18$$

$$\Rightarrow p^2 - 11p + 18 = 0 \Rightarrow (p-2)(p-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p=2 \times \\ p=9 \checkmark \end{cases}$$

۲۱۴

ویژگی‌های گراف منتظم و مکمل

اسم	نماد	تعریف	ویژگی‌ها
گراف k - منتظم	-	گرافی که درجه هر رأس برابر k است.	(۱) $kp = 2q$ که $0 \leq k \leq p-1$ (۲) گراف فرد - منتظم مرتبه فرد نداریم (از بین p و k حداقل یکی باید زوج باشد).

مجموع درجات، دو برابر تعداد یال‌ها است، پس q

برابر با نصف مجموع درجات است. داریم:

$$q + 1 \geq 2p \Rightarrow \frac{a+b+c+6+1+3+4}{2} + 1 \geq 2 \times 7$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq 12$$

حالا با توجه به این که گراف رأس درجه یک دارد، پس حداکثر یک رأس فول می‌تواند داشته باشد، بنابراین هیچ‌کدام از a ، b و c نمی‌توانند برابر ۶ باشند، در نتیجه $a+b+c \leq 15$ می‌شود.

از طرفی مجموع درجه رأس‌های گراف باید زوج باشد، پس $a+b+c+14$ زوج و در نتیجه $a+b+c$ زوج است؛ پس $a+b+c = 12$ یا 14 می‌شود.

۲۱۵

گراف رأس ایزوله ندارد، پس $a, b, c \geq 1$ هستند.

$$2q = 5 + 4 + 4 + 3 + a + b + c \Rightarrow 2q = 16 + a + b + c$$

$$\Rightarrow a + b + c = 2q - 16 = 2(\frac{1}{2}(a+b+c)) - 16 \Rightarrow a + b + c = 8$$

$p = 7$ است، پس $\Delta \leq 6$ ؛ بنابراین بیشترین مقدار درجه‌ها ۶ می‌تواند باشد. تعداد رأس‌های فرد نیز باید زوج باشد، پس از بین a ، b و c دوتا فرد و یکی زوج یا هر سه تا باید زوج باشند. بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

$$\{a, b, c\} = \{5, 2, 1\}, \{4, 3, 1\}, \{3, 3, 2\}, \{4, 2, 2\}$$

در تمام حالت‌ها تعداد رأس‌های فرد، زوج بوده و گراف قابل رسم است؛ پس جواب برابر ۴ می‌شود. (دقت کنید حالت $\{6, 1, 1\}$ را در نظر نگرفتیم، چون در صورت سؤال گفته a و b و c مخالف ۶‌اند.)

توجه از نظر ریاضی بررسی گرافی بودن درجه‌ها لازم است ولی اگر تعداد حالت‌ها زیاد باشد، معمولاً نیازی به این کار نیست.

آزمون ۲۲

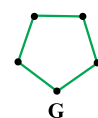
همه گراف‌های کامل K_p ، $(p-1)$ - منتظم هستند؛ پس:

گراف کاملی که منتظم نباشد وجود ندارد، اما سایر گراف‌ها وجود دارند:

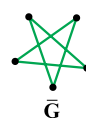
ب گراف K_4 که ۳ - منتظم است.

پ گراف $\cdot \cdot \cdot$ که تهی است و یال ندارد.

ت گراف G و مکمل آن که هر دو ۵ یال دارند:



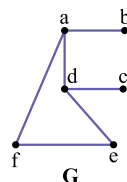
G



G

از گزینه‌ها کمک می‌گیریم:

ا اگر یال fd را حذف کنیم به گراف مقابل می‌رسیم:



G

رأس f در گراف G با رأس a و e مجاور است، پس در گراف مکمل G ، به d ، c و b وصل می‌شود؛ پس $\deg_{\bar{G}}(f) = 3$ است.

۱۹ یال دیگر که ممکن است عضو گراف باشند یا نباشند باقی می ماند (یعنی هر کدام دو حالت دارند)؛ پس در کل 2^{19} گراف با این شرایط می توانیم بسازیم.

۲۱۷ فرض کنیم گراف G دارای $q(G)$ یال و p رأس باشد.

$$\begin{cases} q(G) + 6 = q(K_p) \\ q(G) - 16 = q(\text{منتظم } 6) \end{cases} \Rightarrow q(K_p) - q(\text{منتظم } 6) = 22 (*)$$

از طرفی تعداد یال های گراف کامل و منتظم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} q(K_p) &= \frac{p(p-1)}{2}, \quad q(6) = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \\ \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} - 15 &= 22 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 37 \\ \Rightarrow p^2 - p - 74 &= 0 \Rightarrow p^2 - 7p - 44 = 0 \\ \Rightarrow (p-11)(p+4) &= 0 \Rightarrow p = 11 \end{aligned}$$

از یکی از دو معادله اولیه، $q(G)$ را پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} q(G) + 6 &= q(K_p) \Rightarrow q(G) + 6 = \frac{11 \times 10}{2} \\ \Rightarrow q(G) &= 55 - 6 = 49 \Rightarrow q - p = 49 - 11 = 38 \end{aligned}$$

۲۱۸ نامعادله داده شده را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} k^2 - 9k + 14 &\leq 0 \Rightarrow (k-7)(k-2) \leq 0 \\ \text{بین دو ریشه منفی است} \Rightarrow 2 &\leq k \leq 7 \\ \text{از طرفی } k &\text{ نمی تواند برابر } 7 \text{ باشد (چون گراف فرد منتظم مرتبه فرد نداریم)، پس بیشترین مقدار } k \text{ برابر } 6 \text{ بوده و بزرگترین اندازه گراف وقتی به دست می آید که گراف } 6 \text{ - منتظم مرتبه } 11 \text{ باشد، بنابراین:} \\ kp = 2q &\Rightarrow 6 \times 11 = 2q \Rightarrow q = 33 \end{aligned}$$

۲۱۹

جمع درجه رأس a در گراف G و در گراف کامل آن برابر $p-1$ می شود.

تعداد رأس ها ۸ تا است؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} p=8 \Rightarrow p-1=7 &\xrightarrow{\text{نکته}} \deg_{\bar{G}}(a) = 7 - \deg_G(a) \\ \text{پس درجات گراف } G &\text{ را باید از } 7 \text{ کم کنیم تا درجات رئوس گراف } \bar{G} \\ \text{پیدا شود. } G: 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2 &\Rightarrow \bar{G}: 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5 \end{aligned}$$

۲۲۰

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$p=6$ است. تعداد زیرگراف های هم مرتبه با خود گراف را می خواهیم؛ پس هیچ کدام از رئوس را نباید حذف کنیم، حالا برای به دست آوردن تعداد زیرگراف های عرآسی و q یالی کافی است q یال از بین ۸ یال انتخاب کنیم:

روش اول:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$$

تعداد زیرگراف های ۱ یالی از مرتبه ۶
تعداد زیرگراف های صفر یالی از مرتبه ۶

اسم	نماد	تعریف	ویژگی ها
گراف کامل G	$\bar{G}$	رأس های $\bar{G}$ همان رأس های G است. یال های $\bar{G}$ یال هایی هستند که در G وجود ندارد.	$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$ (۱)
			$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p-1$ (۲)

مجموع تعداد یال های گراف و مکمل آن برابر تعداد یال های گراف کامل می شود؛ پس:

$$\begin{aligned} q(G) + q(\bar{G}) &= \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow q(G) + 27 = \frac{p(p-1)}{2} \\ \Rightarrow q(G) &= \frac{p(p-1)}{2} - 27 \end{aligned}$$

از طرفی $\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p-1$ ، پس اگر گراف مکمل،

۲- منتظم باشد، خود گراف ۲-۱-۳ یعنی $p-1$ - منتظم می شود؛ بنابراین گراف G گرافی $(p-3)$ - منتظم از مرتبه p و اندازه

$$\frac{p(p-1)}{2} - 27$$

است؛ پس در گراف منتظم G داریم:

$$\begin{aligned} kp = 2q &\Rightarrow (p-3)p = 2\left(\frac{p(p-1)}{2} - 27\right) \\ \Rightarrow p^2 - 3p &= p^2 - p - 54 \Rightarrow 2p = 54 \\ p &= 27 \Rightarrow G, 24 \text{ - منتظم است.} \end{aligned}$$

۲۱۵

درجه هر رأس در گراف کامل برابر $p-1$ است و گراف

کامل $\frac{p(p-1)}{2}$ یال دارد. گراف جدید به دست آمده $(p-6)$ - منتظم می شود، پس با توجه به فرمول تعداد یال های گراف منتظم (همون $kp = 2q$)، این گراف $\frac{kp}{2}$ یا $\frac{p(p-6)}{2}$ یال دارد؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{p(p-1)}{2} - 40 &= \frac{p(p-6)}{2} \\ \Rightarrow \frac{p}{2}(p-1-(p-6)) &= 40 \Rightarrow \frac{p}{2} \times 5 = 40 \Rightarrow p = 16 \\ \text{پس گراف جدید به دست آمده، } \frac{p(p-6)}{2} &= \frac{16 \times 10}{2} = 80 \text{ یال دارد.} \end{aligned}$$

۲۱۶

گراف جهت دار بدون طوقه از مرتبه p ، حداکثر $p(p-1)$ یال دارد.

اگر فرد A در لیست دوستان فرد B قرار داشته باشد، یال را در گراف (با رأس های متناظر افراد) قرار می دهیم. باید ببینیم چند گراف جهت دار (بدون طوقه) با ۵ رأس می توانیم بسازیم. در گراف جهت دار ۵ رأسی حداکثر $5 \times 4 = 20$ یال جهت دار جا می گیرد (دو برابر تعداد یال های گراف K_5). از طرفی طه در فهرست دوستان یاسین است؛ پس طه به یاسین با یال وصل می شود.

(۲) مسیرهای به طول ۳: (که چهار رأس در آن حضور دارند)
یکی از سه رأس d, e, f → مکان c

$$a - - b \rightarrow 2 \times 3 = 6$$

(۳) مسیرهای به طول ۴: (که پنج رأس در آن حضور دارند)
مکان c

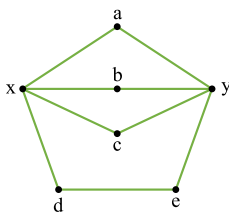
$$a - - - b \rightarrow 3 \times 3 \times 2 = 18$$

(۴) مسیرهای به طول ۵: (که شش رأس در آن حضور دارند).

$$a - - - - b \Rightarrow 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

پس در کل $6 + 18 + 24 = 48$ مسیر با شرایط داده شده وجود دارد.

آزمون ۲۵



۲۴۱ باید از روی درجه‌ها،

گراف را رسم کنیم. با شرایط داده شده،

دو گراف به شکل‌های زیر وجود دارد:

حالت اول: دو رأس $\max$ درجه، مجاور

نباشند:

دوره‌های $xaybx$, $xaycx$ و $xbycx$

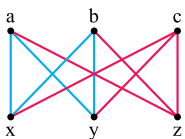
دوره‌های به طول ۴ این گراف هستند.

حالت دوم: دو رأس $\max$ درجه، مجاور

باشند:

این گراف دور به طول ۴ ندارد.

بنابراین، این گراف ۳ یا صفر مسیر به طول ۴ دارد.



مکمل این گراف به شکل مقابل است:

برای ساخته شدن هر دور به طول ۴، کافی است

۲ رأس از بین ۳ رأس a, b, c و ۲ رأس x, y, z انتخاب شود. به عبارت دیگر هر بار که دو

رأس از بین ۳ رأس x, y, z و ۲ رأس a, b, c انتخاب می‌کنیم، یک

و تنها یک دور به طول ۴ ساخته می‌شود. (مثلاً با انتخاب a و b از

رئوس بالایی و x و y از رئوس پایینی، دور $aybxa$ حاصل می‌شود).

گراف دور دیگری به طول ۴ ندارد؛ بنابراین تعداد دوره‌های به طول ۴

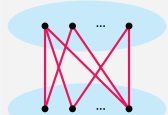
$$\binom{3}{2} \binom{3}{2} = 9 \text{ برابر است با:}$$

به گراف‌های به شکل زیر که تمام n رأس بالا به m رأس پایین

متصل باشند، گراف کامل دوبخشی گفته و آن را $K_{n,m}$ نمایش

می‌دهیم. (رأس‌های درون هر بخش به هم وصل نیستند).

رأس n



رأس m

$$K_{n,m} \text{ تعداد دوره‌های به طول ۴ در } = \binom{n}{2} \binom{m}{2}$$

گراف همبند فاقد دور را درخت می‌گوییم، مثل گراف‌های زیر:



۱ در هر درخت $q = p - 1$ است.

۲ درخت، گراف همبند با کم‌ترین تعداد یال است، پس برای

این که گراف G همبند باشد، باید حداقل $p - 1$ یال داشته باشد.

۳ از هر کدام از جمله‌های زیر می‌فهمیم که گراف G درخت است:

الف G همبند و فاقد دور است.

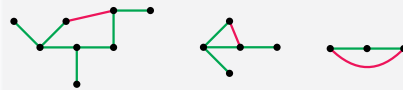
ب G همبند با کم‌ترین تعداد یال است.

پ G همبند بوده و $q = p - 1$ است.

ت بین هر دو رأس G دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

۴ در هر درخت با اضافه کردن یک یال دقیقاً یک دور به وجود

می‌آید، برای مثال:



۵ گراف‌های P_n همگی درخت هستند.

۶ بین هر دو رأس درخت، دقیقاً یک مسیر وجود دارد؛ پس تعداد

مسیرهای به طول مثبت در هر درخت برابر $\binom{p}{2}$ است.

۷ تعداد کل مسیرها در هر درخت برابر است با: $\binom{p}{2} + p$

(مسیرهای به طول صفر اضافه می‌شود).

گراف همبند با کم‌ترین تعداد یال است پس درخت است و چون

$\Delta = 2$ است، گراف همان P_4 می‌شود. حالا هر دو رأسی را که

انتخاب کنیم، دقیقاً یک مسیر بین آن‌ها وجود دارد، پس در کل

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ مسیر متفاوت بین رأس‌های مختلف وجود دارد.}$$

۲۳۹ درجه رأس‌های گراف مکمل به صورت ۱, ۱, ۲, ۲, ۲ می‌شود و چون این گراف همبند است، نمودار آن به صورت

P_4 وجود دارد.

(۱) هر یال یک زیرگراف به صورت P_2 است، پس ۴ زیرگراف به صورت

P_2 وجود دارد.

(۲) زیرگراف‌های به صورت P_3 هستند.

(۳) زیرگراف‌های به صورت P_4 هستند.

(۴) خود گراف نیز زیرگراف به صورت P_4 است.

بنابراین ۱۰ زیرگراف به شکل P_n داریم.

۲۴۰ رأس g را کنار می‌گذاریم. مسیرها را به صورت

$a - \dots - b$ در نظر می‌گیریم که یکی از رأس‌های میانی باید c باشد:

(۱) مسیر به طول ۲: acb

طبق نکته و فرض سؤال داریم: $\left\lceil \frac{14}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{14}{\Delta+1} \right\rfloor$ پس $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{14}{\Delta+1} \right\rfloor = 3$ است، بنابراین:

$$2 < \frac{14}{\Delta+1} \leq 3 \xrightarrow{\text{جستجو}} \Delta = 4, 5$$

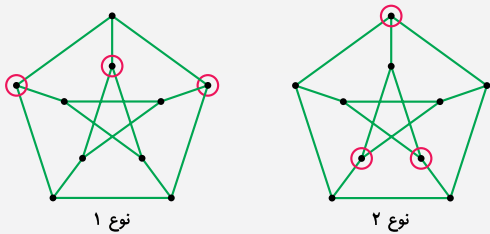
اگر بزرگ‌ترین درجه رأس در G برابر ۴ باشد، کم‌ترین درجه رأس در گراف مکمل برابر ۹ می‌شود، چون طبق نکته داریم:

$$4 + \delta(\bar{G}) = 14 - 1 \Rightarrow \delta(\bar{G}) = 9$$

شبه بالا اگر $\Delta(G) = 5$ باشد، $\delta(\bar{G}) = 8$ می‌شود پس کم‌ترین درجه رأس در گراف مکمل برابر ۹ یا ۸ می‌شود.

۲۸۵

عدد احاطه‌گری گراف پترسن برابر ۳ است و این گراف ۲ نوع γ - مجموعه به شکل‌های زیر دارد:



این گراف ۱۰ مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد.

با توجه به نکته، گراف ۳ تا γ - مجموعه شامل رأس a به صورت زیر دارد:

$$\{a, g, c\}, \{a, j, d\}, \{a, i, h\}$$

نوع ۱ نوع ۲

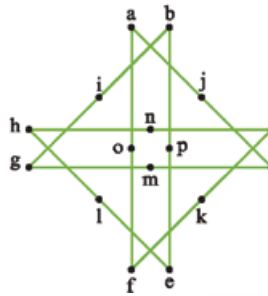
اما گراف پترسن در کل ۱۰ تا، γ - مجموعه دارد، پس $10 - 3 = 7$ مجموعه احاطه‌گر مینیمم فاقد رأس a دارد.

۲۸۶

بررسی عدد احاطه‌گری و تعداد γ - مجموعه‌های گراف‌های خاص:

گراف	عدد احاطه‌گری	تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم (γ - مجموعه‌ها)
K_p (کامل)	$\gamma(K_p) = 1$	p تا (هر رأس یک γ - مجموعه است.)
$\bar{K}_p$ (تهی)	$\gamma(\bar{K}_p) = p$	۱ (مجموعه کل رأس‌ها)
P_n (مسیر) ($n \geq 2$)	$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$	اگر n مضرب ۳ باشد فقط یک γ - مجموعه دارد، در غیر این صورت شمارش مستقیم می‌کنیم.
C_n (دور)	$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$	اگر n مضرب ۳ باشد سه تا γ - مجموعه دارد.
پترسن	$\gamma = 3$	۱۰ تا γ - مجموعه دارد.

آزمون ۲۹



۲۸۱ گراف مقابل همان

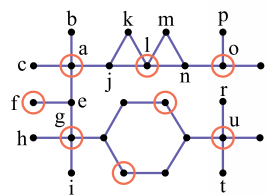
گراف ۲- منتظم مرتبه ۱۶ است (C_{16}) که عدد احاطه‌گری آن برابر

$$\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

$$\Rightarrow \gamma(C_{16}) = \left\lceil \frac{16}{3} \right\rceil = 6$$

۲۸۲ از بین a, b, c حداقل یکی را باید انتخاب کنیم که بهتر

است a را انتخاب کنیم. شبه همین استدلال u, g, o را انتخاب می‌کنیم. یکی از رأس‌های e و f را هم باید انتخاب کنیم (تا این‌جا شد ۵ تا). برای



احاطه‌شدن j, k, l, m, n هم بهتر

است l را بگیریم. حالا از آن دور

(۶ ضلعی) e رأسی هم حداقل دو رأس

باید انتخاب کنیم، پس $\gamma(G) = 8$

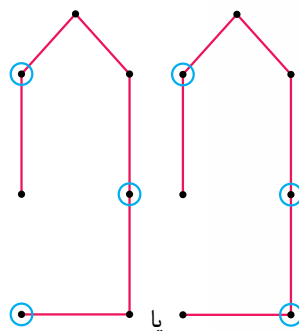
می‌شود.

۲۸۳ گزینه‌ای قابل قبول است که فقط یک مجموعه

احاطه‌گر مینیمم داشته باشد.

۱ مجموعه احاطه‌گر مینیمم به

صورت‌های مقابل می‌تواند باشد.

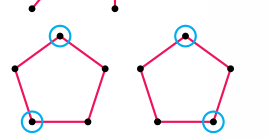


۲ تنها مجموعه احاطه‌گر مینیمم به صورت مقابل

است، پس این گزینه جواب است.

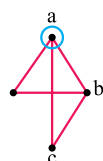
۳ دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم، به

صورت مقابل می‌توانند باشند:



۴ هر کدام از مجموعه‌های $\{a\}$ و $\{b\}$ احاطه‌گر

مینیمم هستند.



۲۸۴

در هر گراف از مرتبه n داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

$$\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1$$

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k \\ = n \\ x_i \geq 1, i=1,2,\dots,k \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$	جواب‌های طبیعی معادله
$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه می‌کنیم تا به معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n$ برسیم.

با توجه به فرمول تعداد جواب‌های صحیح نامنفی داریم:

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح} = \binom{3+n-1}{n-1} = \binom{n+2}{n-1}$$

$$= \frac{(n+2)!}{(n-1)! \times 3!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)}{6} = 165$$

با طرفین وسطین و تجزیه عدد سمت راست داریم:

$$\Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)(n)}{6} = 165 \Rightarrow (n+2)(n+1)(n) = 6 \times 165 = 6 \times 3 \times 5 \times 11$$

ضرب سه عدد متوالی

$$= 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11 = 9 \times 10 \times 11 \Rightarrow n = 9$$

۳۳۲ عدد چهاررقمی را به صورت $x_1x_2x_3x_4$ در نظر می‌گیریم. کافی است جواب‌های صحیح نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \quad \text{با شرایط } x_1 \geq 1 \text{ و } x_4 = 5$$

به دست آوریم. اگر در معادله اصلی به جای x_4 قرار دهیم ۵، به $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ می‌رسیم. حالا طبق نکته سؤال ۱، تعداد جواب‌های این معادله برابر است با:

$$\frac{n=6}{k=3} \rightarrow \binom{6+3-1-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

روشن دوم: معادله آخر را این‌جوری ببینید که می‌خواهیم ۶ توپ یکسان را در ۳ جعبه متمایز توزیع کنیم که $x_1 \geq 1$ باشد. اول یک توپ درون جعبه اول می‌گذاریم تا شرط $x_1 \geq 1$ برقرار شود (از ۶ توپ یکی رفت). حالا کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1' + x_2 + x_3 = 5$ را به دست آوریم. (دقت کنید که باز هم ممکن است توپ به نفر اول برسد).

$$\begin{cases} n=5 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7}{2} = 21$$

روشن سوم:

برای به دست آوردن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با شرط $x_1 \geq a$ ، کافی است در معادله اصلی به جای x_1 قرار دهیم $x_1' + a$ که در آن $x_1' \geq 0$ است. (به این روش تغییر متغیر می‌گوییم!)

برای حل معادله آخر یعنی $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ با شرط $x_1 \geq 1$ از تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 = x_1' + 1$$

توجه عدد ساخته شده با صفر نمی‌تواند شروع شود پس ۵ جا برای مکان صفر وجود دارد. (در جایگاه سمت چپ نمی‌توانیم صفر قرار دهیم.)

۳۲۸ دروازه‌بان و کاپیتان را در یک دسته قرار داده و یک شیء فرض می‌کنیم، پس ۱۰ شیء داریم که $2! \times 10!$ جایگشت دارند. (جابه‌جایی دروازه‌بان و کاپیتان ۲! حالت دارد.) فرض کنید یکی از حالت‌ها مثلاً به صورت زیر باشد:

در این حالت، شماره ۱۰ باید در سمت چپ کاپیتان قرار داشته باشد. (تا کاپیتان بین دروازه‌بان و شماره ۱۰ باشد.) دقیقاً در نصف $2! \times 10!$ حالت، شماره ۱۰ در سمت راست و در نصف حالت‌ها در سمت چپ کاپیتان قرار دارد که فقط یک طرف آن‌ها قابل قبول است پس تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با:

۳۲۹ ۸ کتاب را به همراه ۳ جداکننده در یک ردیف می‌چینیم. (مثلاً به صورت $\square | \square | \square \square \square | \square \square \square$)

حالا کتاب‌های قبل از جداکننده اول را در طبقه اول، کتاب‌های بین جداکننده‌های اول و دوم را در طبقه دوم، کتاب‌های بین جداکننده دوم و سوم را در طبقه سوم و سایر کتاب‌ها را هم در طبقه چهارم قرار می‌دهیم، پس کافی است جایگشت ۸ کتاب متفاوت و ۳ جداکننده یکسان را به دست آوریم که طبق قضیه جایگشت با تکرار، برابر است با:

۳۳۰ صندلی‌ها یکسان است پس این‌که پدر روی کدام صندلی بنشینند تفاوتی نمی‌کند. (مثلاً فرض می‌کنیم پدر در جایگاه

مشخص شده در مقابل باشد.) برای مادر سه حالت (جایگاه‌هایی که دایره کشیده‌ایم) وجود دارد. فرزندان نیز به $720 = 6! = 6$ روش می‌توانند در بقیه جایگاه‌ها قرار گیرند پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$3 \times 720 = 2160$$

۳۳۱

نکته تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله سیاله خطی با شرایط مختلف:

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر
$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$	$\binom{n+k-1}{k-1}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر (انتخاب n شاخه گل از بین k نوع)
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k \\ = n \\ x_1 \geq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد، آن را از n کم می‌کنیم.

۳۳۵ تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$ از رابطه $\binom{n+k-1}{k-1}$ به دست می‌آید، پس:

$$\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36 \Rightarrow n = 36$$

حالا کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8$ با شرط $y_1 \geq \frac{n}{12} = \frac{36}{12} = 3$ را به دست آوریم. طبق نکته سؤال ۱ با شرایط حداقلی داریم:

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{8+4-1-3}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$$

توجه می‌توانستیم معادله را با تغییر متغیر نیز حل کنیم. $y_1 \geq 3$ است، پس $y_1 = y'_1 + 3$ و $y'_1 \geq 0$ می‌شود. حالا با جای‌گذاری در معادله اصلی داریم:

$$y'_1 + 3 + y_2 + y_3 + y_4 = 8 \Rightarrow y'_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

۳۳۶ تعداد گل‌های انتخاب‌شده از نوع اول تا پنجم را به ترتیب

برابر x_1 تا x_5 در نظر می‌گیریم، پس باید $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 12$ باشد به طوری که $x_5 = 0$ و $x_4 \leq 1$ است. اگر $x_3 = 1$ باشد معادله به شکل $x_1 + x_2 + x_5 = 11$ یا همان $x_1 + x_2 + 1 + 0 + x_5 = 12$ می‌شود. $k = 3$ و $n = 11$ است. بنابراین:

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{13}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$$

و اگر $x_3 = 0$ باشد، کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_5 = 12$ را محاسبه کنیم:

$$\xrightarrow[k=3]{n=12} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{14}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = 91$$

بنابراین تعداد کل جواب‌ها برابر است با: $78 + 91 = 169$

۳۳۷ اعداد روشده در ۳ پرتاب را به ترتیب برابر x_1 ، x_2 و x_3

در نظر می‌گیریم، پس کافی است تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ با شرایط $1 \leq x_1 \leq 6$ ، $1 \leq x_2 \leq 6$ و $1 \leq x_3 \leq 6$ را به دست آوریم. (یعنی همان تعداد جواب‌های طبیعی معادله) کافی است تعداد حالت‌های توزیع ۸ توپ یکسان را در سه جعبه متمایز با شرایط داده‌شده به دست آوریم. ابتدا یک توپ در هر جعبه قرار می‌دهیم تا شرایط حداقلی رعایت شود، پس کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x'_1 + x'_2 + x'_3 = 5$ را به دست آوریم:

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

توجه طبق نکته می‌توانستیم از تعداد جواب‌های طبیعی معادله نیز استفاده کنیم:

$$\xrightarrow[k=3]{n=8} \binom{n-1}{k-1} = \binom{7}{2} = 21$$

روشن دوم: عدد روشده تاس اول تا سوم را به ترتیب برابر x_1 تا x_3 در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم جمع این ۳ عدد برابر ۸ شود، یعنی باید $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ باشد. دقت کنید که اعداد روشده در تاس‌ها

با جای‌گذاری در معادله داریم:

$$x'_1 + 1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow x'_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=5 \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7}{2} = 21$$

۳۳۸ اگر $i = 2$ باشد، $x_2 \geq 3$ و اگر $i = 3$ باشد $x_2 \geq 4$

می‌شود، پس کافی است تعداد جواب‌های معادله اصلی با این دو شرط را به دست آوریم. شبیه روش دوم سؤال قبلی، می‌خواهیم ۱۳ توپ یکسان را در ۳ جعبه متمایز توزیع کنیم. اول ۳ توپ درون جعبه دوم و ۴ توپ درون جعبه سوم می‌اندازیم تا آن دو شرط رعایت شود. حالا ۶ توپ دیگر باقی می‌ماند که هر طور که بخواهیم می‌توانیم درون سه جعبه توزیع کنیم، یعنی کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x'_2 + x'_3 = 6$ را به دست آوریم:

$$\begin{cases} n=6 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{2} = 28$$

روشن دوم: $2 \leq i \leq 3$ است، پس i می‌تواند برابر ۲ یا ۳ باشد، حالا داریم:

$$x_i \geq i+1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 \geq 3 \\ x_2 \geq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} x_2 = x'_2 + 3 \\ x_2 = x'_2 + 4 \end{cases}$$

مقادیر به دست آمده را در معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x_1 + x'_2 + 3 + x'_3 + 4 = 13 \Rightarrow x_1 + x'_2 + x'_3 = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=6 \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{2} = 28$$

توجه می‌توانستیم با الگوبری از نکته سؤال ۱ هم برای حل معادله، با شرط‌های حداقلی استفاده کنیم.

۳۳۹ تعداد جایزه‌هایی که به نفرات اول تا سوم می‌رسد را

به ترتیب برابر x_1 ، x_2 و x_3 در نظر می‌گیریم، پس کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ را با شرط « x_2 طبیعی و زوج» به دست آوریم. x_2 می‌تواند برابر ۲، ۴ یا ۶ باشد، پس ۳ حالت داریم:

$$\begin{cases} x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 = 6 \\ \xrightarrow[k=2]{n=6} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7}{1} = 7 \\ x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 = 4 \\ \xrightarrow[k=2]{n=4} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5}{1} = 5 \\ x_2 = 6 \Rightarrow x_1 + x_3 = 2 \\ \xrightarrow[k=2]{n=2} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3}{1} = 3 \end{cases}$$

پس این مسئله در کل $7 + 5 + 3 = 15$ جواب دارد.

توجه در هر سه حالت، جایزه به یک نفر خاص نمی‌رسد.

با ادامه روند مربع به صورت زیر می شود:

۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴

یعنی مربع به یک حالت پر می شود، (اگر ۳ هم باشد باز یک حالت داریم)، پس اگر عدد داخل خانه رنگی ۴ نباشد (۲ یا ۳ باشد)، ۲ حالت داریم.

بنابراین تعداد کل حالت ها برابر $96 = 24(2+2)$ می شود.

اگر درایه های دو مربع لاتین متعامد مرتبه ۴ را کنار هم قرار دهیم، عدد دورقمی تکراری نداریم پس از هر کدام از اعداد ۴۳، ۴۲، ۴۱، ۳۴، ۳۳، ۳۲، ۳۱، ۲۴، ۲۳، ۲۲، ۲۱، ۱۴، ۱۳، ۱۲ و ۱۱ دقیقاً یکی داریم. حالا اگر یکان و دهگان هر عدد را در هم ضرب کنیم، مثلاً این است که درایه های دو مربع لاتین متعامد را نظیر به نظیر در هم ضرب کنیم، که اعداد حاصل برابرند با: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۲، ۱۶

یعنی ۹ مقدار مختلف می توانند داشته باشند.

۳۵۶

اعمال روی مربع لاتین مرتبه ۳

- اگر در مربع های لاتین 3×3 ، جای دو سطر (یا فقط جای دو ستون) را عوض کنیم مربع به دست آمده با مربع اول، متعامد است اما اگر دو بار این کار را انجام دهیم متعامد نیستند.
- اگر A یک مربع لاتین باشد و با اعمال جایگشت روی آن، A' به دست آید، A و A' متعامد نیستند.
- اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و روی B جایگشتی اعمال کنیم تا B' به دست آید، A و B' نیز متعامد هستند.

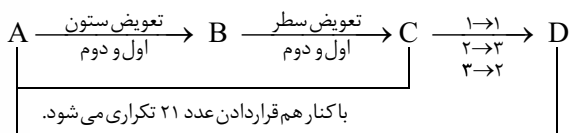
طبق نکته، A و B متعامدند اما A و C متعامد نیستند. A و D نیز متعامد نیستند چون اگر A و D متعامد باشند با اعمال جایگشت وارون روی D ، C به دست می آید که طبق نکته ۳ در این صورت A و C متعامد می شوند. پس A فقط با B متعامد است. خوب است این ها را روی یک مثال آزمایش کنیم:

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲



عدد ۲۱ تکراری است پس متعامد نیستند.

مربع لاتین چرخشی مرتبه ۴ به صورت زیر است:

پس داریم:

۲			
		۳	
۳			۲

(A)

$\xrightarrow{\begin{matrix} 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 2 \end{matrix}}$

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

مربع لاتین چرخشی

عدد ۲ باید به ۱ تبدیل شود و عدد ۳ نیز باید به ۲ تبدیل شود، پس در مربع داده شده درایه های روی قطر همگی باید برابر ۲ بوده و درایه های نظیر ۲ (در مربع لاتین چرخشی) در مربع لاتین A باید ۳ باشند، پس تا این جا مربع A به صورت زیر می شود:

۲	۳		
	۲	۳	
		۲	۳
۳			۲

عدد داخل مربع رنگی می تواند برابر ۱ یا ۴ باشد اما هر کدام که باشد، بقیه خانه ها به صورت یکتا تعیین می شوند پس دو مربع لاتین به این صورت داریم.

۳۵۴ a می تواند برابر ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد. اگر $a = 1$ باشد، در

۳ خانه اول سطر اول، ۳ عدد ۴، ۳، ۲ را به $3! = 6$ حالت می توانیم قرار دهیم. (مثلاً به شکل زیر، پس تا این جا $3! \times 4 = 24$ حالت داریم).

۲	۳	۴	۱
		۱	
	۱		
۱			

عدد داخل خانه رنگی دو حالت دارد، این که ۴ باشد یا ۱ نباشد:

(۱) اگر عدد داخل مربع رنگی ۴ باشد، سطر دوم به سادگی تکمیل می شود و بعد ستون اول و دوم نیز تکمیل می شوند. یعنی مربع تا این جا به صورت زیر پر می شود:

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱		
۱	۴		

واضح است که در ادامه مربع به دو صورت می تواند تکمیل گردد:

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

یا:

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۳	۲
۱	۴	۲	۳

(۲) حالا اگر عدد داخل مربع رنگی ۱ نباشد، ۲ یا ۳ است. فرض کنید ۲ باشد که در این صورت سطر دوم به سادگی تکمیل می شود و بعد ستون ها و ...