

کتاب شب امتحان ریاضیات گسسته از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمون‌هایی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۴، امتحان‌های نهایی برگزار شده در سال‌های ۱۴۰۰، ۱۴۰۱، ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸، امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ و دی ۱۴۰۱ و ۱۴۰۲ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۲، خرداد ۱۴۰۳، شهریور ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۳ و دو آزمون چالشی‌تر با عنوان «بیست پلاس» هستند.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم. پاسخ‌ها مطابق با فرمت پاسخ‌برگ مورد تأیید آموزش و پرورش دارای ریزبارم‌بندی و آدرس محیی می‌باشند.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضیات گسسته نیاز دارید، تنها در ۱۶ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

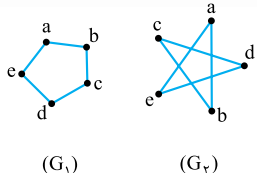
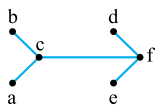
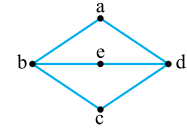
بارم‌بندی درس ریاضیات گسسته

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اول	۱۵	۶	۷
فصل دوم	۵	۲	۶
	-	۵	
فصل سوم	-	۷	۷
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

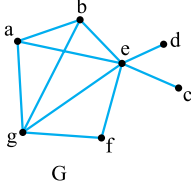
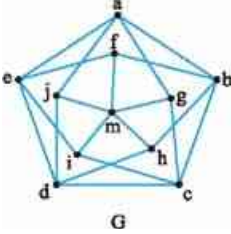
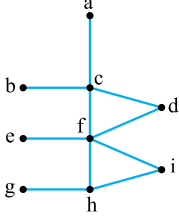
صفحه صفحه

نوبت آزمون پاسخ‌نامه

آزمون شماره ۱	(طبقه‌بندی شده)	اول	۳	۲۱
آزمون شماره ۲	(طبقه‌بندی شده)	اول	۴	۲۲
آزمون شماره ۳	(طبقه‌بندی نشده)	اول	۵	۲۳
آزمون شماره ۴	(طبقه‌بندی نشده)	اول	۶	۲۵
آزمون شماره ۵	نهایی خرداد ۱۴۰۰	دوم	۷	۲۶
آزمون شماره ۶	نهایی خرداد ۱۴۰۱	دوم	۸	۲۷
آزمون شماره ۷	نهایی دی ۱۴۰۱	دوم	۱۰	۲۸
آزمون شماره ۸	نهایی دی ۱۴۰۲	دوم	۱۲	۳۰
آزمون شماره ۹	نهایی خرداد ۱۴۰۲	دوم	۱۴	۳۱
آزمون شماره ۱۰	نهایی خرداد ۱۴۰۳	دوم	۱۵	۳۲
آزمون شماره ۱۱	نهایی شهریور ۱۴۰۲	دوم	۱۶	۳۴
آزمون شماره ۱۲	نهایی شهریور ۱۴۰۳	دوم	۱۷	۳۵
آزمون شماره ۱۳	بیست پلاس (چالشی‌تر)	دوم	۱۸	۳۷
آزمون شماره ۱۴	بیست پلاس (چالشی‌تر)	دوم	۱۹	۳۸

۱ آزمون		ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	تاریخ آزمون: دی ماه
		نوبت اول	پایه دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	فصل اول			
۱	الف) آیا اعداد صحیحی مانند x و y وجود دارند که: $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ ب) آیا مقادیر حقیقی و غیر صفر x و y وجود دارند که: $x+y \neq 0$, $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	۱/۵		
۲	جاهای خالی را پر کنید. الف) $[-4, 16] = \dots\dots\dots$ ب) اگر $a \mid b$, آن گاه $\dots\dots\dots (a, b) = \dots\dots\dots$ پ) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a \mid p$ در این صورت $a = \dots\dots\dots$ یا $a = \dots\dots\dots$	۱		
۳	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) $\begin{cases} a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ب) $ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b$ پ) شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که $[a, b] \mid c$.	۰/۷۵		
۴	اگر x و y گنگ ولی $x+y$ گویا باشد، ثابت کنید: $x-y$ و $x+2y$ گنگ هستند. (به روش برهان خلف)	۱	یادت باشه در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم کلمه برقرار نباشد.	
۵	برای هر x و y حقیقی که $x+y > 0$ باشد، به روش بازگشتی ثابت کنید: $\frac{x^3 + y^3}{x+y} \geq xy$	۱/۵	در روش بازگشتی هر وقت به یک عبارت همواره درست رسیدی کار تمام است.	
۶	خاصیت تعدی در رابطه عاد کردن را بیان و اثبات نمایید.	۱/۲۵	گفته: بیان و اثبات.	
۷	در یک تقسیم، مقسوم مضربی از ۶ و مقسوم علیه مضربی از ۱۵ است، ثابت کنید باقی مانده همواره بر ۳ بخش پذیر است. بخش پذیر بودن یعنی باقی مانده صفر داشتن.	۱/۲۵		
۸	اگر $d = (n^2 + 9n + 1, n + 1)$ باشد، ثابت کنید $d = 1$ یا $d = 7$.	۱/۵		
۹	اگر $a \equiv b$ و $c \in \mathbb{Z}$, آن گاه ثابت کنید: $a + c \equiv b + c$	۱		
۱۰	باقی مانده تقسیم عدد $16 + (23)^6$ را بر ۱۱ بیابید.	۱/۲۵		
۱۱	تمام اعداد صحیحی که ۷ برابر آن‌ها منهای ۳ بر ۹ بخش پذیر باشند را بیابید.	۱/۲۵	اول سعی کن صورت سوال را به زبان ریاضی بنویسی.	
۱۲	نشان دهید معادله سیاله $10 = 6x + 14y$ در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد. سپس آن را حل کنید.	۱/۵		
۱۳	فصل دوم برای دو نمودار مقابل با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر کدام، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.	۱/۲۵		
۱۴	نمودار گراف G به صورت مقابل است: الف) مقدار $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را بنویسید. ب) چه یال‌هایی به گراف G اضافه کنیم تا گراف ۳ - منتظم مرتبه ۶ شود؟	۱/۵		
۱۵	گراف G , ۳ - منتظم است و با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گراف کامل به دست می‌آید: الف) مرتبه و اندازه گراف را به دست آورید. ب) نموداری از این گراف رسم کنید.	۱/۵	یادت که هست در گراف ۳ - منتظم، درجه همه رئوس ۳ است.	
۱۶	نمودار گراف G به صورت مقابل است: الف) طولانی‌ترین مسیرهای ممکن از a به c را بنویسید. ب) دو دور به طول ۴ در این گراف بنویسید.	۱		
۲۰	جمع نمرات	۲۰	موفق باشید	

۱۰ آزمون	تاریخ آزمون: خرداد ۱۴۰۳ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک پایه دوازدهم	ریاضیات گسسته نوبت دوم	
---	--	--	--	---

ردیف	نمره	
۱	۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است. (ب) اگر $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ آن‌گاه: $[m^5, (m^3, m^2)] = m^5$ (ج) تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 3\}$، مضرب ۴ است. (د) هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.
۲	۰/۵	جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید. (الف) عدد احاطه‌گری گراف C_7 برابر است با (ب) تعداد راه‌های توزیع ۳ خودکار متفاوت بین ۵ نفر به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد، برابر است.
۳	۱/۵	با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^2 + b^2 \geq (a - 1)(b + 1)$
۴	۱	اگر a عددی طبیعی و داشته باشیم $a \mid 7k + 1$ و $a \mid 4k + 3$، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 17$.
۵	۱/۲۵	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۰ بیابید.
۶	۱/۵	جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ $5x + 9y = 22$ را به دست آورید.
۷	۲	با توجه به گراف G مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید. (الف) مرتبه و اندازهٔ گراف را بنویسید. (ب) مسیری به طول ۵ از رأس c به رأس f بنویسید. (ج) دوری به طول ۴ بنویسید. (د) آیا گراف $\bar{G}$ همبند است؟ چرا؟ 
۸	۲	با توجه به گراف G، به سؤالات زیر پاسخ دهید. (الف) آیا مجموعهٔ $D = \{a, b, m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؟ چرا؟ (ب) عدد احاطه‌گری گراف G را به دست آورید. (با ذکر دلیل) (ج) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن بنویسید. 
۹	۱/۵	در گراف روبه‌رو: (الف) مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال $A = \{b, e, g, a, f\}$ را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید. (ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم که شامل رأس e باشد را بنویسید. (ج) با اضافه‌نمودن چه یالی عدد احاطه‌گری گراف ۲ می‌شود؟ 
۱۰	۱	(الف) گراف P_7 را رسم کنید. (ب) یک γ-مجموعه از آن را مشخص کنید.
۱۱	۱	می‌خواهیم ۱۰ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟
۱۲	۱/۵	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 20$ را با شرط‌های $x_1 \geq 4$، $x_2 = 3$ و $x_4 > 2$ به دست آورید.
۱۳	۱	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ می‌توان نوشت؟ (محاسبهٔ جواب آخر الزامی نیست.)
۱۴	۱/۲۵	قرار است سه کارگر با سه نوع ماشین نخ‌ریسی و سه نوع الیاف در سه روز اول هفته کار کنند. به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.
۱۵	۱	تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ ۵ عضوی A به مجموعهٔ ۳ عضوی B را به دست آورید.
۱۶	۱	حداقل چند دانش‌آموز در حیاط یک دبیرستان حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۱ نفر از آن‌ها متعلق به یک پایهٔ تحصیلی (دهم، یازدهم، دوازدهم) و یک رشتهٔ تحصیلی (ریاضی، تجربی، انسانی) هستند؟
	۲۰	جمع نمرات موفق باشید

پاسخنامه تشریحی

ازمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) با ساده کردن طرفین تساوی داریم:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = 0 \quad (۰/۲۵)$$

یعنی اگر $x = 0$ باشد، برای هر y صحیحی تساوی برقرار است و اگر $y = 0$ باشد، برای هر x صحیحی تساوی برقرار است. (۰/۲۵)

اگر هر دو متغیر x و y صفر باشند نیز تساوی برقرار است. (۰/۲۵)

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{xy} \quad (۰/۲۵) \quad (ب)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy = 0 \quad (۰/۲۵)$$

با توجه به تساوی $xy = (x+y)^2$ ، همواره مثبت است. مجموع سه عبارت همواره مثبت صفر شده است. چون x و y غیرصفرند، پس مسئله جواب ندارد. (۰/۲۵)

۲- الف) ک.م.م دو عدد ۴- و ۱۶ برابر ۱۶ است. (۰/۲۵)

$$a|b \Rightarrow (a, b) = |a| \quad (۰/۲۵) \quad (ب)$$

$$a = p \quad (۰/۲۵) \text{ یا } a = 1 \quad (۰/۲۵) \quad (پ)$$

۳- الف) درست؛ (۰/۲۵) طرفین یک هم‌نهشتی را می‌توان به توان عدد طبیعی n رساند. (ب) نادرست؛ (۰/۲۵) وقتی عدد ناصفر c از طرفین یک هم‌نهشتی حذف شود پیمانه m همواره ثابت نمی‌ماند.

$$\begin{cases} m \\ ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b \\ (c, m) = d \end{cases}$$

(پ) نادرست؛ (۰/۲۵) شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که $(a, b) | c$. (۰/۲۵)

۴- فرض می‌کنیم $x - y$ گنگ نباشد، پس گویاست:

$$\begin{cases} x - y \text{ گویا} \\ x + y \text{ گویا} \end{cases} \xrightarrow{+} 2x = \text{گویا} + \text{گویا} \Rightarrow x = \text{گویا} \quad (۰/۲۵)$$

که این با فرض گنگ‌بودن x در تناقض است. (۰/۲۵)

فرض می‌کنیم $x + 2y$ گنگ نباشد، پس گویا است.

$$\begin{cases} x + 2y \text{ گویا} \\ x + y \text{ گویا} \end{cases} \xrightarrow{-} y = \text{گویا} - \text{گویا} \Rightarrow y = \text{گویا} \quad (۰/۲۵)$$

که این با فرض گنگ‌بودن y در تناقض است. (۰/۲۵)

در نتیجه در هر دو قسمت، فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵- با توجه به این که $x + y > 0$ مثبت است، ابتدا کل نامساوی را در $x + y$ ضرب می‌کنیم. (جهت نامساوی عوض نمی‌شود). (۰/۲۵)

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq (x+y)xy \quad (۰/۲۵)$$

با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x+y)(xy) \quad (۰/۲۵)$$

با حذف $x + y$ از طرفین نامساوی داریم: $(x + y > 0)$

$$\Leftrightarrow (x^2 - xy + y^2) \geq xy \quad (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \quad (۰/۲۵)$$

رابطه آخر همواره برقرار است و تمامی قسمت‌ها برگشت‌پذیرند. پس اثبات تمام است. (۰/۲۵)

۶- خاصیت تعدی: اگر $a|b$ و $b|c$ آن‌گاه: $a|c$. (۰/۲۵)

$$a|b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}, b = aq \quad (۰/۲۵)$$

$$b|c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}, c = bq' \quad (۰/۲۵)$$

اکنون b را از تساوی ذکرشده در تساوی پایین جای گذاری می‌کنیم:

$$c = (aq)q' = a(qq') = aq'' \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a|c \quad (۰/۲۵)$$

$$q'' \in \mathbb{Z}$$

$$۷- \text{تقسیم را به صورت } a = bq + r \quad (۰/۲۵) \text{ طبق فرض } ۶|a$$

و $b|b$ ؛ پس، $a = ۶q'$ و $b = ۱۵q''$ می‌شود (۰/۲۵) بنابراین:

$$a = bq + r \Rightarrow ۶q' = (۱۵q'')q + r \Rightarrow r = ۶q' - ۱۵q''q = ۳(۲q' - ۵q''q) = ۳|r \quad (۰/۲۵)$$

۸- از $d|(n^2 + 9n + 1)$ ، $d|(n+1)$ نتیجه می‌گیریم که $d|(n^2 + 9n + 1, n+1)$ حالا به کمک ویژگی‌های بخش‌پذیری داریم:

$$\begin{cases} d|n+1 \xrightarrow{\times n \text{ سمت راست}} d|n^2 + n \quad (۰/۲۵) \\ d|n^2 + 9n + 1 \quad (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{سمت راست}} d|(n^2 + 9n + 1) - (n^2 + n) \Rightarrow d|8n + 1 \quad (۰/۲۵)$$

حالا سعی می‌کنیم به کمک بخش‌پذیری بالا و $d|n+1$ را به دست بیاوریم:

$$\begin{cases} d|n+1 \xrightarrow{\times 8 \text{ سمت راست}} d|8n + 8 \quad (۰/۲۵) \\ d|8n + 1 \quad (۱) \end{cases} \xrightarrow{\text{سمت راست}} d|7 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۷ \quad (۰/۲۵)$$

۹- طبق تعریف هم‌نهشتی، اگر $a \equiv b$ آن‌گاه: $m|a - b$. مقدار صحیح c را به طرف راست اضافه و کم می‌کنیم:

$$m|a + c - b - c \quad (۰/۲۵) \Rightarrow m|(a + c) - (b + c) \quad (۰/۲۵)$$

در نتیجه، طبق تعریف هم‌نهشتی: $a + c \equiv b + c$. (۰/۲۵)

$$۱۰- \text{ابتدا } ۲۳ \text{ را بر } ۱۱ \text{ تقسیم می‌کنیم: } ۲۳ \equiv ۱ \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{حال طرفین را به توان } ۶ \text{ می‌رسانیم: } (۲۳)^۶ \equiv ۱^۶ \Rightarrow (۲۳)^۶ \equiv ۱ \quad (۰/۲۵)$$

با اضافه کردن ۱۶ به طرفین هم‌نهشتی داریم: $(۲۳)^۶ + ۱۶ \equiv ۱ + ۱۶ \Rightarrow A \equiv ۱۷ \quad (۰/۲۵)$ اما ۱۷ از پیمانه ۱۱ بزرگ‌تر است، در نتیجه:

$$۱۷ \equiv ۶ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow A \equiv ۶ \quad (۰/۲۵)$$

۱۱- بیان ریاضی مسئله به صورت زیر است:

$$۷x - ۳ \equiv ۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow ۷x \equiv ۳ \quad (۰/۲۵)$$

دو بار پیمانه ۹ تایی را به عدد ۳ اضافه می‌کنیم تا طرف راست بر ۷ بخش‌پذیر شود:

$$۷x \equiv ۳ + ۲(۹) \Rightarrow ۷x \equiv ۲۱ \quad (۰/۲۵)$$

اکنون طرفین را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

$$۷x \equiv ۲۱ \xrightarrow{(\div 7, 9)=1} x \equiv ۳ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۹q + ۳ \quad (۰/۲۵)$$

یعنی هر عدد صحیح به فرم $x = ۹q + ۳$ دارای خاصیت گفته‌شده است.

۱۲- اولاً $(۶, ۱۴) = ۲$ ، پس معادله در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد. (۰/۲۵)

برای حل، کل معادله را بر دو تقسیم می‌کنیم:

$$۲x + ۷y = ۵ \Rightarrow ۷y \equiv ۵ \quad (۰/۲۵)$$



۲- الف) درست (۵/۵۰)

ب) نادرست؛ (۵/۵۰) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, m) \mid b$.

۳- الف) نادرست، (۵/۵۰) مثال نقض:
 $x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$ (۵/۵۰)
 واضح است که x^2 از x بزرگ‌تر نیست.

ب) دو عدد صحیح زوج متوالی را $2k+2, 2k$ در نظر می‌گیریم:

$$A = \underbrace{(2k)(2k+2)}_{(۵/۵۰)} = 4k^2 + 4k = \underbrace{4k(k+1)}_{(۵/۵۰)}$$

اما $k(k+1)$ ضرب دو عدد صحیح متوالی است. پس حتماً زوج است. لذا $k(k+1)$ را

می‌توان به فرم $2k'$ نوشت: (۵/۵۰)
 $\Rightarrow A = 4(2k') = 8k'$ (۵/۵۰)
 یعنی ضرب موردنظر مضرب ۸ است.

۴- فرض می‌کنیم n فرد نباشد (فرض خلف)، پس n زوج است: (۵/۵۰)

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \quad (۵/۵۰) \Rightarrow 2(2k^2) = 2k' \Rightarrow k' = 2k^2$$

یعنی n^2 زوج می‌شود که این با فرض فردبودن n^2 در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۵/۵۰)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad (۵/۵۰)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad (۵/۵۰)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \geq 4 \quad (۵/۵۰)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geq 4\sqrt{xy} \quad (۵/۵۰)$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \geq 4\sqrt{xy} \quad (۵/۵۰)$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \quad (۵/۵۰)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \quad (۵/۵۰)$$

چون x و y مثبت هستند با عمل طرفین‌وسطین داریم:

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geq 4\sqrt{xy} \quad (۵/۵۰) \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \geq 4\sqrt{xy} \quad (۵/۵۰)$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \quad (۵/۵۰) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \quad (۵/۵۰)$$

رابطهٔ اخیر همواره برقرار است و همهٔ روابط برگشت‌پذیر هستند، لذا اثبات تمام است. (۵/۵۰)

۶- فرض می‌کنیم $a \mid b$ و $a \mid c$. باید نشان دهیم:

$$a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; b = aq \quad (۵/۵۰)$$

$$a \mid c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}; c = aq' \quad (۵/۵۰)$$

از جمع و تفریق دو طرف تساوی داریم:

$$b \pm c = aq \pm aq' = a(q \pm q') \quad (۵/۵۰) \Rightarrow b \pm c = aq'' \quad (۵/۵۰)$$

$$\Rightarrow a \mid b \pm c \quad (۵/۵۰)$$

۷- دو عدد صحیح و فرد متوالی را با $2k+1$ و $2k+3$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $d \mid (2k+1, 2k+3)$ باشد. در نتیجه:

$$\begin{cases} d \mid 2k+3 & (۵/۵۰) \\ d \mid 2k+1 & (۵/۵۰) \end{cases} \xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} d \mid (2k+3) - (2k+1) \Rightarrow d \mid 2 \quad (۵/۵۰)$$

در نتیجه $d=1$ یا $d=2$.

اگر $d=1$ باشد که مسئله تمام است و هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اول خواهند بود. (۵/۵۰)

اگر $d=2$ باشد آن‌گاه چون $d \mid 2k+1$ و $d \mid 2k+3$ پس یک عدد زوج دو عدد فرد را عاد کرده است که این امکان ندارد. پس نسبت به هم اول‌اند. (۵/۵۰)

۸- a فرد است، پس $a = 2k+1$. طبق فرض $a \mid b+4$ در نتیجه: $b \mid 2k+1+4$ ؛ یعنی $b \mid 2k+5$. اما $a \mid 2k+5$ هم فرد است پس مقسوم‌علیه آن، یعنی b نیز فرد است. (۵/۵۰)

$$y \equiv 1, 7 \pmod{5} \Rightarrow y = 5k-1 \quad (۵/۵۰) \Rightarrow y = 5k-1 \quad (۵/۵۰)$$

اما جای گذاری y مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$3x + 7(5k-1) = 5 \quad (۵/۵۰) \Rightarrow 3x = -25k + 12$$

$$\Rightarrow x = -\frac{25}{3}k + 4 \quad (۵/۵۰) \Rightarrow \begin{cases} x = -7k + 4 \\ y = 5k - 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۳- مجموعهٔ رئوس را با $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌ها را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف G_1 عبارت‌اند از: (۵/۵۰) $V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}$

$$E(G_1) = \{ab, ae, bc, cd, de\} \quad (۵/۵۰)$$

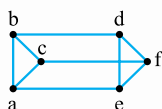
مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف G_2 عبارت‌اند از: (۵/۵۰) $V(G_2) = \{a, b, c, d, e\}$

$$E(G_2) = \{ab, ae, bc, cd, de\} \quad (۵/۵۰)$$

چون $V(G_1) = V(G_2)$ و $E(G_1) = E(G_2)$ است، پس دو نمودار داده‌شده مربوط به یک گراف هستند. (۵/۵۰)

$$۱۴- الف)، $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 1$ (۵/۵۰)$$

ب) ed (۵/۵۰)، bd (۵/۵۰)، ab (۵/۵۰) و ae (۵/۵۰) گراف ۳- منتظم یعنی درجهٔ همهٔ رئوس ۳ باشد. f و c که درجه‌شان ۳ است.



حال اگر d به e و b وصل شود و a هم به b و e ، آن‌گاه با توجه به شکل درجهٔ تمام رئوس برابر ۳ است، پس یک گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۶ داریم.

۱۵- الف) در گراف ۳- منتظم مرتبهٔ p ، درجهٔ همهٔ رئوس برابر ۳ است؛ پس تعداد یال‌ها $q = \frac{3 \times p}{2}$ (۵/۵۰) خواهد بود. طبق فرض اگر به این تعداد یال، ۶ یال دیگر اضافه

کنیم گراف کامل حاصل می‌شود. در نتیجه:

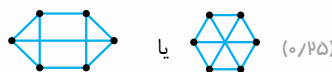
$$\frac{3p}{2} + 6 = \frac{p(p-1)}{2} \quad (۵/۵۰)$$

که $\frac{p(p-1)}{2}$ تعداد یال‌های گراف کامل K_p است.

$$\Rightarrow 3p + 12 = p^2 - p \quad (۵/۵۰) \Rightarrow p^2 - 4p - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (p-6)(p+2) = 0 \quad (۵/۵۰) \Rightarrow \begin{cases} p = 6 \Rightarrow q = \frac{3 \times 6}{2} = 9 \quad (۵/۵۰) \\ p = -2 \text{ غلط} \end{cases}$$

ب) باید یک گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۶ (که دارای ۹ یال خواهد بود) رسم کنیم.



۱۶- الف) مسیرهای $abedc$ و $adebc$ که طول جفتشان ۴ است. (۵/۵۰)

ب) $abceda$ (۵/۵۰) و $abceda$ (۵/۵۰)

البته می‌توانستیم دور $cbedc$ را هم بنویسیم.

آزمون شماره ۲ (نوبت اول)

۱- الف) $(a, b) = d$ اگر و تنها اگر: $d \mid a, d \mid b$

$$۲) \forall m > 0: m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d \quad (۵/۵۰)$$

$$۳) a^n \mid b^n \Rightarrow a \mid b \Rightarrow [a, b] = |b| \quad (۵/۵۰) \text{ چون:}$$

$$[1]_f = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+1, k \in \mathbb{Z}\} \quad (۵/۵۰)$$

ت) ۳ (۵/۵۰) و ۸ (۵/۵۰). ببینید:

$$A \equiv 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33+35+37+39+41+43+45+47+49+51+53+55+57+59+61+63+65+67+69+71+73+75+77+79+81+83+85+87+89+91+93+95+97+99 \equiv 3 \pmod{100}$$

$$A \equiv 2-1+1-8+5-3+1 \equiv -3 \equiv 8 \pmod{100}$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

$$n = 2k + 1; k \in \mathbb{W}$$

حالت دوم: n فرد باشد، در این صورت:

$$\Rightarrow n^2 + n = (2k+1)^2 + (2k+1)$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_{k'}) = 2k'$$

پس همواره $n^2 + n$ زوج است.

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 4\}$. اگر $x \in A$ و $\frac{x^2(x+1)^2}{4}$ زوج باشد، ثابت کنید $x \in B$.

پاسخ: با در نظر گرفتن همه حالت‌های $x \in A$ ، مسئله را ثابت می‌کنیم.

$$x = 1 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x = 2 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{4 \times 9}{4} = 9$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x = 3 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{9 \times 16}{4} = 36$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x = 3$ عضو B است.

$$x = 4 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{16 \times 25}{4} = 100$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x = 4$ عضو B است.

$$x = 5 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{25 \times 36}{4} = 225$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

مثال: با در نظر گرفتن همه حالت‌های ممکن، ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۶ بخش پذیر است.

پاسخ: در مثال اول این بخش ثابت کردیم برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 + n$ زوج است.

$$n^2 + n = n(n+1) = \text{ضرب دو عدد متوالی}$$

یعنی ضرب دو عدد متوالی، همواره زوج است و در نتیجه ضرب سه عدد متوالی نیز همواره زوج خواهد بود؛ پس بر ۲ بخش پذیر است. در ادامه نشان می‌دهیم ضرب سه عدد متوالی بر ۳ هم بخش پذیر است که از این دو نتیجه می‌گیریم که ضرب سه عدد متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

با در نظر گرفتن حالت‌های $n = 3k$ ، $n = 3k+1$ و $n = 3k+2$ داریم:

$$n = 3k \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k)(3k+1)(3k+2)$$

$$= 3(\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{k'}) = 3k'$$

$$n = 3k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3)$$

$$= (3k+1)(3k+2)(3)(k+1) = 3(\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)}_{k'}) = 3k'$$

$$n = 3k+2 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4)$$

$$= (3k+2)(3)(k+1)(3k+4) = 3(\underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)}_{k'}) = 3k'$$

پس در هر سه حالت ممکن، $n(n+1)(n+2)$ مضرب ۳ است. در نتیجه $n(n+1)(n+2)$ مضرب ۶ است.

فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گوییم.

مثال: برای نتیجه‌گیری‌های کلی زیر مثال نقض بیاورید.

(الف) برای هر عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(ب) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

(پ) مجموع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.

(ت) عدد $2^n + 1$ به ازای همه عددهای طبیعی n ، عددی اول است.

(ث) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $3^n + 4$ اول است.

(ج) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

پاسخ: (الف) قرار می‌دهیم $x = 16$ و $y = 9$ آن‌گاه:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x+y} &= \sqrt{9+16} = 5 \\ \sqrt{x} &= \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{y} &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned} \right\} 5 \neq 4+3$$

(ب) اگر دو عدد گنگ را $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه: $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$ و صفر عددی گویاست.

(پ) برای دو عدد اول ۲ و ۳، مجموع آن‌ها ۵ می‌شود که عددی مرکب نیست.

(ت) برای $n = 1, 2, 3, 4$ حاصل $2^n + 1$ اول است، اما برای $n = 5$ داریم:

$$2^5 + 1 = 2^2 + 1 = 641 \times 67 \times 5 \times 41$$

که عددی اول نیست.

(ث) برای $n = 1, 2, 3$ ، حاصل $3^n + 4$ اول است، اما برای $n = 4$ داریم:

$$3^4 + 4 = 81 + 4 = 85$$

و ۸۵ عددی اول نیست.

(ج) برای $n = 2$ گزاره برقرار نیست. زیرا عدد ۲ را نمی‌توان به صورت مجموع دو عدد طبیعی متوالی نوشت. (هر عدد به فرم $n = 2^k$ ، $k \in \mathbb{N}$ مثال نقض است.)

تذکره: دیدیم که مثال نقض، روشی برای نشان دادن نادرستی یک گزاره است. برای اثبات درستی یک گزاره، روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارت‌اند از: اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها، اثبات مستقیم، اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف و اثبات به روش بازگشتی.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 + n$ عددی زوج است.

پاسخ: با در نظر گرفتن همه حالت‌های ممکن برای n ، مسئله را اثبات می‌کنیم.

حالت اول: n زوج باشد، در این صورت: $n = 2k$; $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(\underbrace{2k^2 + k}_{k'}) = 2k'$$

پس $n^2 + n$ زوج است.

اثبات به روش مستقیم

در روش مستقیم به کمک فرض و با استفاده از حقایق که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، حکم را نتیجه می‌گیریم.

مثال نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $4k+1$ است.

پاسخ فرض می‌کنیم n عددی فرد باشد، آن‌گاه:

$$n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$

اما $k+1$ و k دو عدد متوالی‌اند، پس حاصل ضرب آن‌ها همواره زوج است. در نتیجه $2q = k(k+1)$ ؛ بنابراین:

$$n^2 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

مثال اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید: $a^2 + b^2$ زوج است.

پاسخ می‌دانیم حاصل ضرب دو عدد صحیح a و b زمانی فرد است که هر دوی آن‌ها فرد باشند، پس:

$$ab = \text{فرد} \Rightarrow a = \text{فرد}, b = \text{فرد}$$

در مثال قبل ثابت کردیم مربع هر عدد فرد به صورت $4q+1$ است. در نتیجه:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4q+1 + 4q'+1 \\ \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4q+1 \\ b^2 = 4q'+1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{aligned} &= 4q + 4q' + 2 = 4(q+q') + 2 \\ &= 2(2(q+q') + 1) = 2k = \text{زوج} \end{aligned} \end{aligned}$$

اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از این فرض (که فرض خلف نامیده می‌شود) و فرض اولیه و حقایق که از قبل درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، به یک نتیجه غیرممکن یا متضاد با فرض اولیه می‌رسیم.

مثال به روش برهان خلف ثابت کنید: اگر n^2 عددی گنگ باشد، آن‌گاه n نیز عددی گنگ است.

پاسخ فرض می‌کنیم n گنگ نباشد (فرض خلف)، در نتیجه n گویاست. می‌دانیم حاصل ضرب هر دو عدد گویا، گویاست. پس $n \times n = n^2$ نیز گویاست. این نتیجه با فرض اولیه مسئله که « n^2 گنگ است» متضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و n گنگ خواهد بود.

مثال به روش برهان خلف ثابت کنید: معکوس هر عدد گنگ، گنگ است.

پاسخ ابتدا مسئله را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم: می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر x گنگ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است. برای اثبات فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس

$$\frac{1}{x} \text{ گویا است. بنابراین برابر عدد گویای ناصفری مانند } \frac{a}{b} \text{ است که } a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \text{ گویا}$$

یعنی x هم گویا است و این با فرض اولیه مسئله در تضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال به روش برهان خلف ثابت کنید: اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب 5 باشد، آن‌گاه n نیز مضرب 5 است.

پاسخ فرض می‌کنیم n مضرب 5 نباشد (فرض خلف) در نتیجه از تقسیم n بر 5 ، باقی‌مانده غیرصفر خواهیم داشت:

$$n = 5q + r, r = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4$$

$$\Rightarrow n^2 = 25q^2 + 10qr + r^2$$

$$= 5(\underbrace{5q^2 + 2qr}_k) + r^2 = 5k + r^2$$

$$n^2 = 5k + 1$$

اگر $r = 1$ ، آن‌گاه:

$$n^2 = 5k + 4$$

اگر $r = 2$ ، آن‌گاه:

$$n^2 = 5k + 9 = \underbrace{5k + 5 + 4}_{5(k+1)} = 5k' + 4$$

اگر $r = 3$ ، آن‌گاه:

$$n^2 = 5k + 16 = \underbrace{5k + 15 + 1}_{5(k+3)} = 5k' + 1$$

اگر $r = 4$ ، آن‌گاه:

پس n^2 در تقسیم بر 5 ، دارای باقی‌مانده غیرصفر است؛ یعنی n^2 نمی‌تواند مضرب 5 باشد و این نتیجه با فرض اولیه متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات بازگشتی

دو حکم را معادل یا هم‌ارز می‌گوییم هرگاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت. گاهی برای اثبات یک حکم، آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که با حکم اولیه هم‌ارز باشد و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به حکمی برسیم که درستی آن معلوم است.

به این ترتیب بازگشت از حکم آخر، درستی حکم اولیه را نتیجه می‌دهد. به این روش، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

مثال به روش بازگشتی ثابت کنید: اگر $x, y > 0$ ، آن‌گاه $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$$

کل نامساوی را در xy ضرب می‌کنیم. چون x و y هر دو مثبت هستند، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

رابطه آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند. بنابراین حکم ثابت شده است.

مثال به روش بازگشتی نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

پاسخ کل نامساوی را در عدد 2 ضرب می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2zx) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

رابطه آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند پس حکم ثابت شده است.

مثال اگر n یک عدد طبیعی باشد آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟ چرا؟

پاسخ بله هم‌ارزند. برای اثبات باید نشان دهیم: n زوج است $\Leftrightarrow n^2$ زوج است.

پاسخ فرض می‌کنیم n زوج باشد، آن‌گاه:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k'}) = 2k'$$

پس n^2 هم زوج است.

پاسخ فرض می‌کنیم n^2 زوج باشد آن‌گاه نشان می‌دهیم n نیز زوج است. به روش برهان خلف؛ فرض می‌کنیم n زوج نباشد. (فرض خلف) پس n فرد است.

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$$

یعنی n^2 نیز فرد می‌شود که با فرض زوج بودن n^2 متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.