

کتاب شب امتحان **آمار و احتمال یازدهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

- (۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
 - (الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.
 - (ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.
- (۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان نهایی طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
 - (الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.
 - (ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها شامل امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳، شبیه‌ساز امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ و دو آزمون چالشی‌تر با عنوان «بیست پلاس» است.
- (۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آنچه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم. پاسخ‌ها مطابق با فرمت پاسخ‌برگ مورد تأیید آموزش و پرورش، دارای ریزباربندی و آدرس مبحثی می‌باشند.
- (۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند! در این قسمت تمام آنچه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان آمار و احتمال نیاز دارید، تنها در ۱۶ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید! **یک راهکار:** موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های ۱ و ۲ آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



بارم‌بندی درس آمار و احتمال

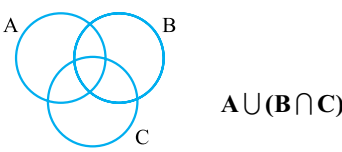
شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
خرداد، شهریور و دی		
۱	۱۴	۵
۲	۶ (تا آخر درس ۱)	۷
۳	—	۵
۴	—	۳
جمع	۲۰	۲۰

فهرست

صفحه صفحه

نوبت آزمون پاسخ‌نامه

آزمون شماره ۱	(طبقه‌بندی شده) اول	۳	۲۳
آزمون شماره ۲	(طبقه‌بندی شده) اول	۴	۲۴
آزمون شماره ۳	(طبقه‌بندی نشده) اول	۵	۲۵
آزمون شماره ۴	(طبقه‌بندی نشده) اول	۶	۲۶
آزمون شماره ۵	(طبقه‌بندی شده) دوم	۷	۲۷
آزمون شماره ۶	(طبقه‌بندی شده) دوم	۹	۲۹
آزمون شماره ۷	(طبقه‌بندی شده) دوم	۱۱	۳۱
آزمون شماره ۸	(طبقه‌بندی شده) دوم	۱۳	۳۳
آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۳	(طبقه‌بندی نشده) دوم	۱۵	۳۴
آزمون شماره ۱۰ شبیه‌ساز خرداد ۱۴۰۳	(طبقه‌بندی نشده) دوم	۱۷	۳۶
آزمون شماره ۱۱ بیست پلاس (چالشی‌تر)	(طبقه‌بندی نشده) دوم	۱۹	۳۷
آزمون شماره ۱۲ بیست پلاس (چالشی‌تر)	(طبقه‌بندی نشده) دوم	۲۱	۳۹

آزمون		۱		تاریخ آزمون: دی ماه		رشته: ریاضی فیزیک		آمار و احتمال		نوبت اول		خوبی	
نمره													
۱		۱		با توجه به دامنه متغیر گزاره‌های داده شده، مجموعه جواب هر یک را بیابید.		هواست باشه مجموعه جواب توی دامنه داده شده رو حساب کنی.							
				$D = \mathbb{R}$ ، $\Delta x^2 - 4x - 1 = 0$ (الف)									
				$D = \mathbb{N}$ (ب) x مربع کامل است.									
۱		۱		جاهای خالی را با توجه به ارزش گزاره‌ها با یک گزاره ساده کامل کنید.		اول کار باید نوع گزاره‌ها رو شناسایی کنی بعدش هواست به ارزش اون‌ها باشه.							
				(الف) اگر آن گاه ۵ مربع کامل است و برعکس. (T)									
				(ب) و عدد ۷ عددی اول است. (F)									
۲		۲		ارزش گزاره‌های سوری زیر را با دلیل تعیین کرده و سپس نقیض هر یک را بنویسید.		یادت هست نقیض روی سورها چه طوری عمل می‌کرد؟							
				$\exists a \in \mathbb{Z} ; \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$ (الف)									
				$\forall x \in \mathbb{N} ; x^2 + x - 3 \geq 0$ (ب)									
۱/۵		۱/۵		اگر گزاره $(p \Rightarrow q)$ نادرست باشد، ارزش گزاره مرکب زیر را با ذکر دلیل بنویسید.		توجه به فرض مسأله داشته باش.							
				$(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$									
۱/۵		۱/۵		به کمک جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید.		یه سوال همیشگی - با دقت جدول ارزش گزاره‌ها رو بکش.							
				$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$									
۱/۵		۱/۵		اگر ۳ عضو از مجموعه A حذف کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۴ واحد کم می‌شود. مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟		یه رابطه بین تعداد زیرمجموعه‌ها بنویس.							
۰/۵		۰/۵		مجموعه $A \cup (B \cap C)$ را روی نمودار ون رنگ کنید.									
۱/۵		۱/۵		فرض کنید A، B و C سه مجموعه با مرجع U باشند. ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه: $A \cup C \subseteq B \cup C$.		با یه عضوگیری ساده مسئله حل می‌شه.							
۱/۵		۱/۵		درستی تساوی $(A \cup B) \cap (B' \cup A) = A$ را به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید.		اینم یه سوال ثابت دیگه - هواست به قوانین باشه.							
۱/۵		۱/۵		اگر $A = [-2, 2]$ و $B = [-1, 1]$ باشند، نمودار ضرب دکارتی $A^2 - B^2$ را رسم کنید.		توجه کن که A و B بازه اعداد هستند، نه مجموعه.							
۲/۲۵		۲/۲۵		در سه بار پرتاب یک سکه هر یک از موارد زیر را مشخص کنید.		با دقت فضای نمونه رو بنویس، بقیه فله.							
				(الف) فضای نمونه این آزمایش									
				(ب) پیشامد A که در آن، حداکثر یک بار سکه پشت بیاید.									
				(پ) پیشامد B که در آن، فقط یک بار سکه پشت بیاید.									
				(ت) پیشامد $B' - A'$									
۱/۲۵		۱/۲۵		برای هر پیشامد تصادفی A ثابت کنید:		رابطه بین A و A' یادت بیاد.							
				$P(A') = 1 - P(A)$									
۱/۵		۱/۵		احتمال این که خانه‌ای میل داشته باشد برابر ۸۵/۰ و احتمال این که هم میل و هم تلویزیون داشته باشد برابر ۴۰/۰ و احتمال این که حداقل یکی از این دو وسیله را داشته باشد ۹۶/۰ است. احتمال آن را بیابید که این خانه:		این هم یه سوال داستانی برای قوانین احتمال ...							
				(الف) تلویزیون داشته باشد.									
				(ب) فقط میل داشته باشد.									
۱/۵		۱/۵		از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۸ بخش پذیر باشد اما بر ۶ بخش پذیر نباشد چه قدر است؟		هواست به مجموعه اعدادی باشد که هم بر ۶ و هم بر ۸ بخش پذیرند.							
۲۰		۲۰		جمع نمرات		موفق باشی							

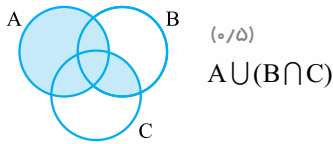
آزمون ۹	تاریخ آزمون: خرداد ۱۴۰۳ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک پایه یازدهم	آمار و احتمال نوبت دوم	نهایی خرداد ۱۴۰۳ خبرنگار
-------------------------------	--	---	--	--

ردیف	نمره																										
۱	۰/۷۵	درست یا نادرست بودن هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اگر A یک مجموعه دلخواه باشد، آن گاه $A \times \emptyset = \emptyset$. ب) اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از یک فضای نمونه‌ای باشند، آن گاه A و B مستقل از یکدیگرند. پ) اگر تمام داده‌ها را در عدد ۳ ضرب کنیم، ضریب تغییرات داده‌ها ۳ برابر می‌شود.																									
۲	۰/۷۵	هر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر p یک گزاره دلخواه و F یک گزاره همواره نادرست باشد، آن گاه: $p \vee F \equiv \dots\dots\dots$. ب) اگر داده‌های $10, 8, 10, x, 12, 12$ مد نداشته باشند، آن گاه x برابر $\dots\dots\dots$ است. پ) اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، می‌گویند آن روش نمونه‌گیری $\dots\dots\dots$ است. (اریب – نالاریب)																									
۳	۱	با وارد کردن جدول زیر در پاسخ‌برگ و سپس تکمیل آن نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$. <table><tr><th>p</th><th>q</th><th></th><th></th><th></th></tr><tr><td>د</td><td>د</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>د</td><td>ن</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>ن</td><td>د</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>ن</td><td>ن</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	p	q				د	د				د	ن				ن	د				ن	ن			
p	q																										
د	د																										
د	ن																										
ن	د																										
ن	ن																										
۴	۱	گزاره زیر را با استفاده از نماد سورها ($\exists$ یا $\forall$) بنویسید و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید. «هر عدد طبیعی از مربع خودش کوچک‌تر است.»																									
۵	۱	اگر A, B, C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.																									
۶	۱	اگر A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت $(A - B) \cup (A \cap B)$ را تا حد امکان ساده کنید.																									
۷	۰/۵	اگر $A = \{-1, 2\}$ و $B = \mathbb{R}$ ، نمودار حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.																									
۸	۱	عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد را محاسبه کنید.																									
۹	۱/۲۵	یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، چهار برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. در پرتاب این تاس، احتمال این‌که عدد زوج مشاهده شود را به دست آورید.																									
۱۰	۰/۷۵	فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(B) \neq 0$ ، ثابت کنید. $P(A' B) = 1 - P(A B)$																									
۱۱	۱	دروازه‌بان یک تیم فوتبال، اگر روحیه خوبی داشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد و اگر روحیه بدی داشته باشد، با احتمال ۳۰ درصد ضربه پنالتی را مهار می‌کند. پیش از اولین ضربه پنالتی، روحیه این دروازه‌بان خوب است. احتمال آن را به دست آورید که این دروازه‌بان در سه ضربه پنالتی متوالی، دقیقاً دو ضربه آخر را مهار کند. (با مهار هر پنالتی، روحیه دروازه‌بان خوب و در غیر این صورت بد می‌شود.)																									
۱۲	۱/۵	در مدرسه‌ای ۶۰ درصد دانش‌آموزان در رشته تجربی و ۴۰ درصد دانش‌آموزان در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. در این مدرسه، $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان رشته تجربی و $\frac{1}{4}$ دانش‌آموزان رشته ریاضی، معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند. دانش‌آموزی به تصادف از این مدرسه انتخاب شده و معدل او بالای ۱۸ است. احتمال آن که این فرد، دانش‌آموز رشته تجربی باشد را به دست آورید.																									
۱۳	۱/۲۵	در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهده عدد ۵ در تاس اول و B پیشامد مجموع ۹ در برآمدهای دو تاس باشد. مستقل بودن یا نبودن پیشامدهای A و B را بررسی کنید.																									

	تاریخ آزمون: خرداد ۱۴۰۳	رشته: ریاضی فیزیک	آمار و احتمال
	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه یازدهم	نوبت دوم

۱/۲۵	جدول فراوانی زیر مربوط به قد دانش‌آموزان یک کلاس برحسب سانتی‌متر است. الف) مقادیر عددی a و b را در جدول پیدا کنید. ب) نمودار بافت‌نگاشت فراوانی قد دانش‌آموزان را رسم کنید.	۱۴												
	<table><tr><th>فراوانی نسبی</th><th>فراوانی</th><th>قد دانش‌آموزان</th></tr><tr><td>$\frac{0}{3}$</td><td>۶</td><td>$120 \leq H < 140$</td></tr><tr><td>a</td><td>۱۰</td><td>$140 \leq H < 160$</td></tr><tr><td>b</td><td>۴</td><td>$160 \leq H < 180$</td></tr></table>	فراوانی نسبی	فراوانی	قد دانش‌آموزان	$\frac{0}{3}$	۶	$120 \leq H < 140$	a	۱۰	$140 \leq H < 160$	b	۴	$160 \leq H < 180$	
فراوانی نسبی	فراوانی	قد دانش‌آموزان												
$\frac{0}{3}$	۶	$120 \leq H < 140$												
a	۱۰	$140 \leq H < 160$												
b	۴	$160 \leq H < 180$												
۱/۲۵	حسین در یک آزمون شرکت کرده و کارنامهٔ آزمون او به شرح زیر است. اگر معدل موزون (میانگین وزن‌دار) نمره‌های این آزمون حسین، ۷۰ باشد، نمرهٔ فیزیک او را محاسبه نمایید.	۱۵												
	<table><tr><th>مواد امتحانی</th><th>ریاضیات</th><th>فیزیک</th><th>شیمی</th></tr><tr><td>نمره</td><td>۶۵</td><td>?</td><td>۹۵</td></tr><tr><td>ضریب درس</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr></table>	مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	نمره	۶۵	?	۹۵	ضریب درس	۴	۳	۲	
مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی											
نمره	۶۵	?	۹۵											
ضریب درس	۴	۳	۲											
۱/۲۵	انحراف معیار داده‌های زیر را به دست آورید. (مراحل محاسبهٔ انحراف معیار را به شکل کامل بنویسید.) ۱۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴	۱۶												
۰/۷۵	چارک اول، میانه و چارک سوم داده‌های زیر را بیابید. ۲، ۵، ۷، ۳، ۹، ۴، ۱، ۶، ۶، ۷	۱۷												
۰/۵	در هر مورد مناسب‌ترین روش نمونه‌گیری را بنویسید. الف) می‌خواهیم میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک شهر را محاسبه کنیم. فهرست همهٔ دانش‌آموزان را نداریم، اما فهرست مدارس موجود است. ب) مدیر یک مدرسه می‌خواهد نظرات دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بداند. مدرسه ۶ پایه دارد و حدس می‌زنیم که نظر ۶ پایه با هم متفاوت است.	۱۸												
۱	در یک دانشگاه، میانگین سن یک نمونهٔ تصادفی ۲۵ نفره از دانشجویان برابر ۲۲ سال است. اگر در بررسی‌های گذشته، انحراف معیار سن دانشجویان این دانشگاه برابر ۲ سال محاسبه شده باشد، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعهٔ دانشجویان این دانشگاه را محاسبه کنید.	۱۹												
۱/۲۵	داده‌های مربوط به مطالعهٔ یک جامعهٔ ۷ عضوی به صورت زیر است: ۳، ۱، ۴، ۰، ۲، ۶، ۵ الف) تمام نمونه‌های دوعضوی از جامعه را بنویسید که میانگین آن‌ها ۳ باشد. ب) احتمال آن که یک نمونهٔ دوعضوی که به تصادف انتخاب شده است دارای میانگین ۳ باشد را به دست آورید.	۲۰												
۲۰	جمع نمرات موفق باشید													

پاسخنامه تشریحی



(فصل ۱ - نمودار ون در مجموعه‌ها)

۸- از روش عضوگیری استفاده می‌کنیم:

$$\forall x; x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in A \vee x \in C \quad (۰/۵)$$

$$\xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \vee x \in C \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x \in (B \cup C) \quad (۰/۵) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C) \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ - روش عضوگیری دلفواه)

۹- از سمت چپ تساوی شروع می‌کنیم:

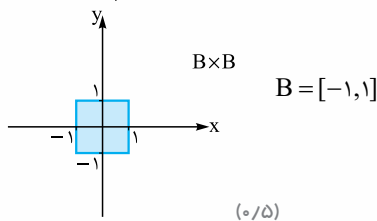
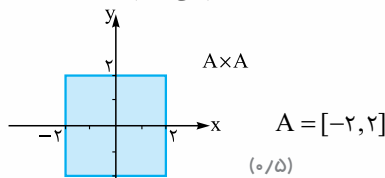
$$(A \cup B) \cap (B' \cup A) = (A \cup B) \cap (A \cup B') \quad (۰/۵) \quad \text{(جابه‌جایی)}$$

$$= A \cup (B \cap B') \quad (۰/۵) \quad \text{(فاکتورگیری)}$$

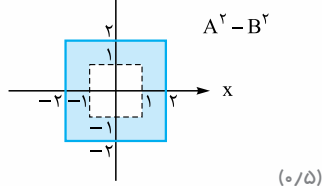
$$= A \cup \emptyset = A \quad (۰/۵)$$

(فصل ۱ - قوانین پیر مجموعه‌ها)

۱۰- ابتدا نمودارهای $A^c = A \times A$ و $B^c = B \times B$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار $A^c - B^c$ به صورت مقابل است:



(فصل ۱ - ضرب دکارتی بین دو مجموعه)

۱۱- الف) روآمدن سکه را با T و پشت‌آمدن سکه را با p نشان می‌دهیم؛ در این صورت:

$$S = \left\{ \begin{matrix} rrr, ppp \\ rrp, ppr \\ rpr, prp \\ prr, rpp \end{matrix} \right\} \quad (۰/۵)$$

$$A = \{rrr, rrp, rpr, prr\} \quad (۰/۵) \quad \text{(ب)}$$

$$B = \{prp, rrp, rrp\} \quad (۰/۵) \quad \text{(پ)}$$

$$A' = \{ppp, ppr, prp, rpp\} \quad (۰/۲۵) \quad \text{(ت)}$$

$$B' = \{ppp, ppr, prp, rpp, rrr\} \quad (۰/۲۵)$$

$$B' - A' = \{rrr\} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲ - تشخیص فضای نمونه)

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

$$\Delta x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$a + b + c = 0 \quad \text{مجموع ضرایب صفر است.}$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad (۰/۲۵), x = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\Delta} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow S = \{1, -\frac{1}{\Delta}\}$$

$$S = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \quad (۰/۵) \quad \text{(ب)}$$

(فصل ۱ - دامنه متغیر گزاره‌ها)

۲- الف) گزاره مرکب داده‌شده به صورت یک ترکیب دوشرطی است. چون ارزش این گزاره مرکب درست است، پس باید هر دو گزاره تشکیل‌دهنده آن هم ارزش باشند. گزاره دوم نادرست می‌باشد؛ پس گزاره اول را نادرست می‌نویسیم. مثلاً: «۴ عددی فرد باشد.» (۰/۲۵)

ب) گزاره مرکب داده‌شده دارای ترکیب عطفی است. چون ارزش کلی نادرست است، پس باید حداقل یکی از گزاره‌های تشکیل‌دهنده آن نادرست باشد. چون گزاره دوم درست است، حتماً باید گزاره اول را نادرست در نظر بگیریم. مثلاً: «۱ عددی زوج است.» (۰/۲۵)

۳- الف) درست است (۰/۲۵). زیرا به ازای $\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}, a = 1$ (۰/۲۵)

$$\forall a \in \mathbb{Z}; \frac{1}{a} \notin \mathbb{Z} \quad \text{نقض گزاره}$$

ب) نادرست است (۰/۲۵). زیرا به ازای $x = 1, 1 + 1 - 3 \geq 0$ نادرست است. (۰/۲۵)

$$\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 3 < 0 \quad \text{نقض گزاره}$$

(فصل ۱ - سورها و نقیض‌ها)

۴- چون ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست است؛ پس p دارای ارزش درست و q دارای ارزش نادرست است؛ بنابراین:

$$(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p) \quad (۰/۵)$$

$$\begin{matrix} \text{ن} & \text{د} \\ \text{ن} & \text{د} \\ \text{ن} & \text{د} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ن} & \text{د} \\ \text{ن} & \text{د} \\ \text{ن} & \text{د} \end{matrix} \quad \text{(۰/۲۵)}$$

(فصل ۱ - ترکیب دوشرطی دو گزاره)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د

(فصل ۱ - جدول ارزش گزاره‌ها)

در نتیجه $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$.

تعداد اعضا	n	$n - 3$
تعداد زیرمجموعه‌ها	2^n	2^{n-3}

$$(۰/۲۵) \quad (۰/۲۵)$$

$$2^n - 2^{n-3} \times 2^n = 14 \quad (۰/۲۵) \quad \text{طبق فرض: } 2^n - 2^{n-3} = 14 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\Rightarrow 2^n (1 - \frac{1}{8}) = 14 \Rightarrow 2^n (\frac{7}{8}) = 14 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 2^n = \frac{14 \times 8}{7} = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4 \quad (۰/۲۵)$$

پس مجموعه A ، ۴ عضو دارد. لذا $2^4 = 16$ تا زیرمجموعه دارد. (۰/۲۵)

(فصل ۱ - تعداد زیرمجموعه‌ها)



-۴

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$q \vee (p \wedge \sim q)$	$\sim (q \vee (p \wedge \sim q))$	$p \wedge \sim (q \vee (p \wedge \sim q))$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ستون آخر تماماً نادرست است؛ پس ارزش کل گزاره نادرست می‌باشد. (۰/۲۵)

(فصل ۱- جدول ارزش گزاره‌ها)

۵- از سمت چپ شروع می‌کنیم: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv \sim p \vee (q \wedge r)$ (۰/۵)

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \quad (۰/۵)$$

$$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \quad (۰/۲۵)$$

$$\equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim p) \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱- قوانین گزاره‌ها)

۶- اعضای مجموعه A به صورت مقابل هستند. (۰/۵)

با در نظر گرفتن مجموعه دلخواه B، داریم:

$$(A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap B') = \underbrace{A \cap (B \cup B')}_{(۰/۲۵)}$$

$$= A \cap U = A \quad (۰/۲۵)$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه A مدنظر است: $\binom{5}{3} = 10$ (۰/۵)

(فصل ۱- تعداد زیرمجموعه‌ها)

$$A = \{\emptyset\} \quad (۰/۲۵)$$

۷- الف)

$$B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad (۰/۲۵)$$

$$C = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \quad (۰/۲۵)$$

$$A = \{\emptyset\} \quad (۰/۲۵)$$

ب)

$$B = \{\emptyset, \{2\}\} \quad (۰/۲۵)$$

$$C = \{\emptyset, \{2, 3\}\} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱- عضو بودن و زیرمجموعه بودن)

۸- الف) از سمت راست تساوی شروع می‌کنیم:

$$(A' \cap B') \cap A = (B' \cap A') \cap A \quad (۰/۲۵)$$

جابه‌جایی

$$= B' \cap (A' \cap A) \quad (۰/۲۵)$$

شرکت‌پذیری

$$= B' \cap \emptyset = \emptyset \quad (۰/۲۵)$$

ب) تبدیل تفاضل به اشتراک

$$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) \quad (۰/۵)$$

$$= A \cap (B' \cup B) \quad (۰/۲۵)$$

فاکتورگیری

$$= A \cap U = A \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱- قوانین بزرگ مجموعه‌ها)

$$\forall x; x \in B - A \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \quad (۰/۲۵)$$

۹-

$$\Rightarrow x \in B \quad (۰/۲۵) \Rightarrow B - A \subseteq B \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱- روش عضوگیری دلفوا)

۱۰- چون A و B، ناتهی هستند، از تساوی $A \times B = B \times A$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$A = \{x+1, 4, -2\} \quad (۰/۲۵)$$

$$A = B \quad (۰/۲۵)$$

$$B = \{y+2, 5, z\}$$

دو حالت داریم:

$$\begin{cases} x+1=5 \Rightarrow x=4 \\ y+2=4 \Rightarrow y=2 \quad (۰/۵) \\ z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1=5 \Rightarrow x=4 \\ y+2=-2 \Rightarrow y=-4 \quad (۰/۵) \\ z=4 \end{cases}$$

(فصل ۱- ضرب دکارتی)

۱۲- دو پیشامد A و A' ناسازگارند؛ پس $A \cap A' = \emptyset$ (۰/۲۵).

$$A \cup A' = S \Rightarrow P(A \cup A') = P(S) \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(A') - \overbrace{P(A \cap A')}^{\emptyset} = \overbrace{P(S)}^1 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(A') - 0 = 1$$

$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A) \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲- اصول احتمال)

$$P(B) = P(A) = 0/85, \quad P(\text{تلویزیون}) = P(B) = ? \quad (۱۳- الف)$$

$$P(\text{تلویزیون و مبل}) = P(A \cap B) = 0/40$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$$

$$0/96 = 0/85 + x - 0/40 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x = 0/96 - 0/45 = 0/51 \quad (۰/۲۵)$$

$$P(\text{فقط مبل}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$$

ب)

$$= 0/85 - 0/40 = 0/45 \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲- اصول احتمال)

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$$

۱۴-

$$A = \{\text{اعداد بخش‌پذیر بر ۸}\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{1000}{8} \right] = 125 \quad (۰/۲۵)$$

اگر B را مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۶ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$A \cap B = \{[6, 8] = 24 \text{ یعنی } 8 \text{ و } 6 \text{ دو عدد م.م.ک.م. دو عدد } 6 \text{ و } 8 \text{ یعنی } 24\} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{1000}{24} \right] = 41 \quad (۰/۲۵)$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (۰/۵)$$

$$= \frac{125}{1000} - \frac{41}{1000} = \frac{84}{1000} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲- اصول احتمال)

آزمون شماره ۲ (نوبت اول)

۱- الف) نادرست (۰/۲۵)؛ عدد ۲، اول است ولی فرد نیست.

ب) نادرست (۰/۲۵)؛ در گزاره $\tan x \times \cot x = 1$ برای $x = \frac{\pi}{4}$ مقدار $\tan \frac{\pi}{4}$

(فصل ۱- سورها)

تعریف‌نشده است؛ پس گزاره نادرست است.

پ) درست (۰/۲۵)؛ اشتراک دو مجموعه همواره زیرمجموعه هر یک از آن‌هاست.

(فصل ۱- اشتراک دو مجموعه)

ت) درست (۰/۲۵)؛ (تعریف پیشامد است).

(فصل ۲- ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها)

۲- الف) یک گزاره با ترکیب فصلی تنها زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

$$5 > 0 : T$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{4} : F \Rightarrow T \vee F \equiv T \quad (۰/۵)$$

(فصل ۱- ترکیب فصلی دو گزاره)

ب) ترکیب دوشرطی زمانی درست است که هر دو گزاره هم‌ارزش باشند.

$$F : 7 \text{ بر } 3 \text{ بخش‌پذیر است.} \quad F \Leftrightarrow F \equiv T \quad (۰/۵)$$

$$F : 15 \text{ مربع کامل است.}$$

(فصل ۱- ترکیب دوشرطی دو گزاره)

۳- الف) گزاره سوری داده‌شده به ازای $x = 1$ برقرار نیست. $1^2 + 1 > 1 + 1$

پس نادرست است. (۰/۲۵) $\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + 1 \leq x + 1$: نقیض

ب) نادرست (۰/۲۵)؛ زیرا هیچ مقدار حقیقی برای X پیدا نمی‌شود که تساوی زیر برقرار باشد.

$$\frac{4x-1}{4} = \frac{3x+2}{3} \Rightarrow 12x-3=12x+8 \Rightarrow -3=8$$

که همواره غلط است.

$$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{4x-1}{4} \neq \frac{3x+2}{3} \quad (۰/۵)$$

(فصل ۱- سورها و نقیض‌ها)

درس نامه توپ برای شب امتحان



آشنایی با مبانی ریاضیات

(۱) آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی (منطق نمادین): دستور زبان ریاضی یا مطالعه و تحلیل ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شوند. در منطق ریاضی، استدلال‌ها بررسی می‌شوند تا درستی یا نادرستی آن‌ها مشخص شود.

گزاره: جمله‌ای است خبری که یا راست است یا دروغ.

تکانه: جملات پرسشی، امری و عاطفی گزاره نیستند زیرا خبری را به ما نمی‌رسانند. مانند: «بیشتر درس بخوان.» که جمله امری است. «چه ماشین زیبایی» که جمله عاطفی است. «شما امسال کنکور نمی‌دهید؟» که جمله پرسشی است. معمولاً گزاره‌ها را با حروف $p, q, r, \dots$ نشان می‌دهند.

ارزش گزاره

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم.

ارزش درست گزاره با نماد «د» و ارزش نادرست گزاره با نماد «ن» نشان داده می‌شود.

اگر p یک گزاره باشد آن‌گاه ارزش آن ۲ حالت دارد:

p
د
ن

ارزش‌های دو گزاره p و q ، طبق جدول زیر دارای ۴ حالت است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

تکانه: اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش گزاره‌ها 2^n حالت دارد. مثلاً جدول ارزش گزاره‌های p, q, r دارای $2^3 = 8$ حالت است.

نقیض یک گزاره: گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اولیه باشد. نقیض گزاره p را با نماد $\sim p$ نشان می‌دهند و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانند.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال: نقیض گزاره «۲ عددی زوج است» را بنویسید.

پاسخ: «چنین نیست که ۲ عددی زوج باشد.» یا «۲ عددی زوج نیست.»

تکانه: ارزش گزاره p با ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ یکسان است در این صورت می‌گوییم دو گزاره هم‌ارز هستند و می‌نویسیم:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

مثلاً: گزاره p : «۹ عددی مربع کامل است.»

گزاره $\sim p$: «۹ عددی مربع کامل نیست.»

گزاره $\sim(\sim p)$: «۹ عددی مربع کامل است.»

گزاره‌نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامند.

مثلاً « x یک عدد اول است» گزاره‌نمای یک متغیره و « $3 < 2y - x$ » یک گزاره‌نمای دو متغیره است.

دامنه متغیر گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و با حرف D نمایش می‌دهند.

مجموعه جواب: در هر گزاره‌نما، به زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر که به ازای اعضای آن‌ها گزاره‌نما به یک گزاره با ارزش درست تبدیل شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و با حرف S نمایش می‌دهند. پس همواره $S \subseteq D$.

مثال: دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هر یک را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۵ است. ($D = \mathbb{N}$) ب) $\frac{2x+1}{x-1} = 1$ ($D = \mathbb{R} - \{1\}$)

پاسخ: الف) مجموعه جواب، آن اعداد طبیعی است که مضرب ۵ باشند، پس:

$$S = \{5, 10, 15, \dots\}$$

ب) مجموعه جواب، x هایی است که تساوی را برقرار کنند:

$$\frac{2x+1}{x-1} = 1 \rightarrow 2x+1 = x-1 \Rightarrow 2x-x = -1-1 \Rightarrow x = -2$$

چون -2 به مجموعه دامنه داده شده تعلق دارد پس قابل قبول است. در نتیجه: $S = \{-2\}$.

ترکیب گزاره‌ها: در کتاب درسی ترکیب گزاره‌ها با ۴ رابط «و»، «یا»، «اگر آن‌گاه» و «اگر آن‌گاه» انجام می‌شود.

ترکیب عطفی: اگر دو گزاره ساده p و q با حرف «و» به هم مربوط شوند آن را ترکیب عطفی می‌نامند و با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند. جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

خلاصه جدول ارزش: $p \wedge q$ فقط زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند. **مثال:** ارزش گزاره عطفی زیر را مشخص کنید.

«۹۰ مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول ۲ است.»

پاسخ: گزاره «۹۰ مربع کامل است» را p بنامید. چون ۹۰ جذر کامل ندارد پس ارزش گزاره نادرست است.

گزاره «کوچک‌ترین عدد طبیعی اول، ۲ است» را q بنامید. ارزش این گزاره درست است.

p	q	$p \wedge q$
ن	د	ن

ترکیب فصلی: اگر دو گزاره ساده p و q با حرف «یا» به هم مربوط شوند آن را ترکیب فصلی می‌نامند و با نماد $p \vee q$ نشان می‌دهند.

جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن



p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

طبق جدول ستون‌های سوم و ششم با هم یکسان هستند، پس: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

۱- هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه ترکیب شرطی « $p \Rightarrow p \vee q$ » همواره درست است.

۲- هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه ترکیب شرطی « $p \wedge q \Rightarrow p$ » همواره درست است.

ترکیب دوشروطی: اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نوشته و آن را ترکیب دوشروطی p و q می‌نامیم و می‌خوانیم:

«p اگر و تنها اگر q»

مثال: $(3x - 5 > 1) \Leftrightarrow (x > 2)$ یک گزاره دو شرطی است.

هم‌ارزی‌های منطقی بین گزاره‌های مرکب:

الف) شرکت‌پذیری (جابجایی پرانتزها):

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

ب) جابجایی (جابجایی گزاره‌ها):

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

پ) پخش (پخش کردن یک گزاره بین دو گزاره):

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

سور: سورها علامت‌هایی هستند که قبل از گزاره‌ها قرار می‌گیرند و متغیرهای گزاره‌ها را به یک مجموعه معین محدود می‌کنند و بدین ترتیب گزاره‌ها را به یک گزاره تبدیل می‌کنند که این گزاره می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد.

انواع سور: عبارت‌های «به ازای هر» یا «به ازای تمام» را سور عمومی نامند و با نماد « $\forall$ » نشان می‌دهند. همچنین عبارت‌های «وجود دارد» یا «به ازای بعضی» را سور وجودی نامند و با نماد « $\exists$ » نشان می‌دهند.

گزاره‌های با سور عمومی:

گزاره‌های زیر داده شده‌اند:

● هر عدد طبیعی، مثبت است.

● هر مستطیل، متوازی‌الاضلاع است.

● هر عدد اول، فرد است.

در هر یک از این گزاره‌ها، در واقع خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت داده‌ایم. چنین گزاره‌هایی را گزاره‌های با سور عمومی می‌نامند.

«هر X ای خاصیت p را دارد» $\forall x: p(x)$

توجه شود که گزاره‌هایی با سور عمومی وقتی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها با دامنه متغیرشان یکسان باشد.

مثلاً گزاره «هر عدد اول، فرد است» نادرست است زیرا عدد ۲، اول است در حالی که زوج است نه فرد.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$ ب) $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2 < 0$ پ) $\forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x}{4} < x$

پاسخ: الف) درست؛ زیرا همواره x^2 عددی مثبت یا صفر است.

ب) نادرست؛ زیرا توان دوم هیچ عددی منفی نیست.

پ) نادرست؛ زیرا برای اعداد صحیح منفی برقرار نیست.

مثلاً اگر $x = -2$ باشد آن‌گاه $-2 < -\frac{2}{4}$ نادرست است.

گزاره‌هایی با سور وجودی:

گزاره‌هایی هستند که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت می‌دهند.

خلاصه جدول ارزش: $p \vee q$ فقط زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند.

مثال: ارزش گزاره فصلی زیر را مشخص کنید.

«معادله $x^2 - 4 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی دو ریشه دارد یا ۲۵ مضرب ۵ است.»

پاسخ: گزاره « $x^2 - 4 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی دو ریشه دارد» را p بنامید.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

پس ارزش گزاره درست است.

گزاره «۲۵ مضرب ۵ است» را q بنامید.

پس ارزش گزاره q نیز درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د

مثال: جدول ارزش گزاره $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را تشکیل دهید.

پاسخ: دو گزاره p و q را در نظر می‌گیریم. گفتیم که جدول ارزش آن‌ها $2^2 = 4$ حالت دارد.

دو ستون رسم کرده و این ۴ حالت را مشخص می‌کنیم. سپس گزاره‌های $\sim p$ ، $\sim q$ ، $p \wedge \sim q$ و ترکیب عطفی $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ و ترکیب فصلی $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را در ستون‌های بعد جای‌گذاری می‌کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	ن	د

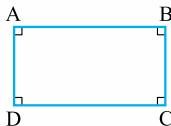
ترکیب شرطی: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گویند. p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامند.

جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

خلاصه جدول ارزش: گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

مثال: ارزش این گزاره را مشخص کنید. «اگر چهارضلعی ABCD یک مستطیل باشد آن‌گاه قطرهاش با هم برابر است.»



پاسخ: گزاره «چهارضلعی ABCD یک مستطیل است» همان فرض یا مقدم است که گزاره درستی است.

گزاره «قطرهای مستطیل با هم برابر است» همان حکم یا تالی است که این هم گزاره درستی است. پس:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د

مثال: گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است. همچنین گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است.

مثال: به کمک جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

پاسخ: باید جدولی رسم کنیم که ستون‌هایش به ترتیب: p، q، $p \Rightarrow q$ ، $\sim q$ ، $\sim p$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ باشد: