



سب امتحان حسابان ۲



■ امتحان نہای ■

■ مشاورہ ■

■ درسنامہ ■

■ محمد جواد ثوری ■

دوازدہم ریاضی

کتاب شب امتحان **حسابان (۲) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

(ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ امتحان‌های نهایی برگزار شده در سال‌های ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۲ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

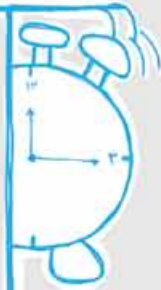
(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ آزمون‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، دی ۱۴۰۱ و دی ۱۴۰۱ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند. در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۱ و خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ هستند.

(۳) پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) درس‌نامه کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند! در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان حسابان (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۵ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا سوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



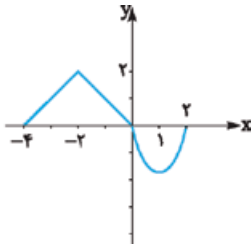
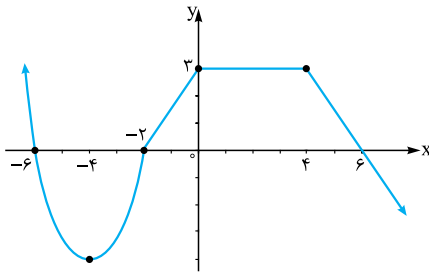
فهرست

بازم‌بندی درس حسابان (۲)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم	شهریور و دی
اول	۷	۳	۳/۵
دوم	۶	۳	۳
سوم	۷	۳	۳
چهارم	—	۶	۶
پنجم		۵	۴/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

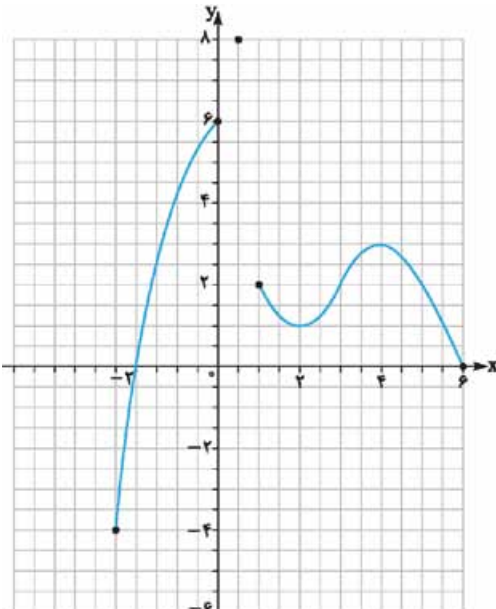
صفحه نوبت آزمون پاسخ‌نامه صفحه

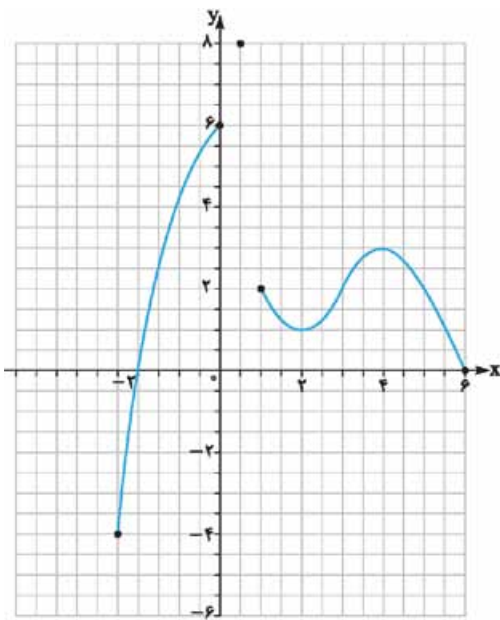
آزمون شماره ۱	(طبقه‌بندی‌شده)	اول	۳	۲۲
آزمون شماره ۲	(طبقه‌بندی‌شده)	اول	۵	۲۴
آزمون شماره ۳	(طبقه‌بندی‌نشده)	اول	۶	۲۵
آزمون شماره ۴	(طبقه‌بندی‌نشده)	اول	۷	۲۷
آزمون شماره ۵	(طبقه‌بندی‌شده) نهایی خرداد ۱۴۰۰	دوم	۸	۲۹
آزمون شماره ۶	(طبقه‌بندی‌شده) نهایی شهریور ۱۴۰۰	دوم	۱۰	۳۰
آزمون شماره ۷	(طبقه‌بندی‌شده) نهایی دی ۱۴۰۰	دوم	۱۲	۳۲
آزمون شماره ۸	(طبقه‌بندی‌شده) نهایی دی ۱۴۰۱	دوم	۱۳	۳۳
آزمون شماره ۹	(طبقه‌بندی‌نشده) نهایی خرداد ۱۴۰۱	دوم	۱۵	۳۵
آزمون شماره ۱۰	(طبقه‌بندی‌نشده) نهایی خرداد ۱۴۰۲	دوم	۱۷	۳۶
آزمون شماره ۱۱	(طبقه‌بندی‌نشده) نهایی شهریور ۱۴۰۱	دوم	۱۸	۳۷
آزمون شماره ۱۲	(طبقه‌بندی‌نشده) نهایی شهریور ۱۴۰۲	دوم	۲۰	۳۸

حسابان (۲)		رشته: ریاضی فیزیک		مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه		kheilisabz.com		شماره ۱	
ردیف	آزمون شماره ۱				نوبت اول پایه دوازدهم دوره متوسطه دوم				نمره
فصل اول									
۱	نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. نمودارهای $y_1 = -2f(x)$ و $y_2 = -f(-\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.								۱/۵
۲	جاهای خالی را تکمیل کنید. الف) اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی تابع $f(x)$ باشد، پس از انتقال، مختصات نقطه A روی تابع $y = \frac{1}{3}f(x+1)$ برابر است با ب) اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = -3f(x-1)$ برابر است با				سوال و جواب های تک کلمه ای. یادت باشه برای این سوالات فقط جواب آفر مهمه نه راه حل!				۰/۵
۳	تابع $f(x) = (x+1)^2 - 2$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار f را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید. ب) نشان دهید f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. پ) ضابطه f^{-1} را بنویسید.				رسم تابع f را باید فقط با انتقال ها انجام دهید. تابع f^{-1} هم تماماً باید به کمک f رسم شود.				۲/۵
۴	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر داده شده است. بازه هایی که تابع در آن ها اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.								۱
۵	نشان دهید چند جمله ای $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ بر $2x - 5$ بخش پذیر است. سپس مقسوم علیه های دیگر $f(x)$ را بیابید.				برای نشان دادن درستی قسمت اول سوال <u>نباید</u> از عملیات تقسیم استفاده کنی.				۱/۵
فصل دوم									
۶	دوره تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید. الف) $y = -\cos \frac{\pi}{3}x + \sqrt{2}$ ب) $y = -2\sin 5x + 3$				این سوال معمولاً در تمامی امتحانات مطرح می شود. پس فرمول های آن را حفظ کن.				۱/۵
۷	با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را در ربع های اول و چهارم با هم مقایسه کنید.				یه وقت اشتباهی ربع ها را انتقاب نکنی!				۱
۸	معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. الف) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ ب) $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$				برای قسمت (الف) دقت کن که سینوس برابر یک مقدار منفی می شود!				۲
۹	مثلثی با مساحت ۸ سانتی مترمربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن ۴ و ۸ باشد، آن گاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟				در این سوال، اصلاً به ضلع سوم مثلث نیازی نیست.				۱/۵

حسابان (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه	khailisabz.com	شماره
ردیف	آزمون شماره ۱			نمره
فصل سوم				
۱۰	حدود زیر را محاسبه کنید. سؤال مدگیری همیشه در امتحانات مطرح می شود. تکنیک های مدگیری را از درس نامه بفهون.			
۲/۵	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi - 4}{x^2 - 3x + 2}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{2x - 3}$			
۱۱	مجانبات های قائم تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x - 6}$ را به دست آورید. یادت نره برای میائپ قائم، باید شرط هایش بررسی شود.			
۱۲	مجانبات های افقی تابع روبه رو را بیابید. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ به $\sqrt{x^2}$ توجه کن.			
۱۳	نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که: الف) $f(-1) = f(2) = 0$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ پ) خط $y = 1$ میائپ افقی آن باشد.			
۲۰	موفق باشید جمع نمرات			

شماره	kheilisabz.com	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	حسابان (۲)	ردیف
نمره	نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۱			آزمون شماره ۹	
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آن‌گاه $f'(a)$ وجود ندارد. ب) هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$ ، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.				۱
۱	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) دوره تناوب تابع $y = 7 \sin(\frac{-\pi}{3}x) + 2$ برابر است. ب) اگر برای هر x در بازه I ، $f''(x) > 0$ ؛ آن‌گاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به دارد.				۲
۱	نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید.				۳
۱	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.				۴
۰/۵	باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.				۵
۰/۵	اگر $\frac{1}{64} \leq (\frac{1}{4})^{2x-2} < \frac{1}{4}$ ، حدود x را به دست آورید.				۶
۱/۵	معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.				۷
۱	نمودار مقابل مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ است. a ، b و c را مشخص کنید.				۸
۱/۵	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.				۹
	الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^3}{2x - 1}$				
	پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$				
۱/۵	مجانبات قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.				۱۰
۱/۵	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 2x - 4 $ را در $x = 2$ بررسی کنید.				۱۱

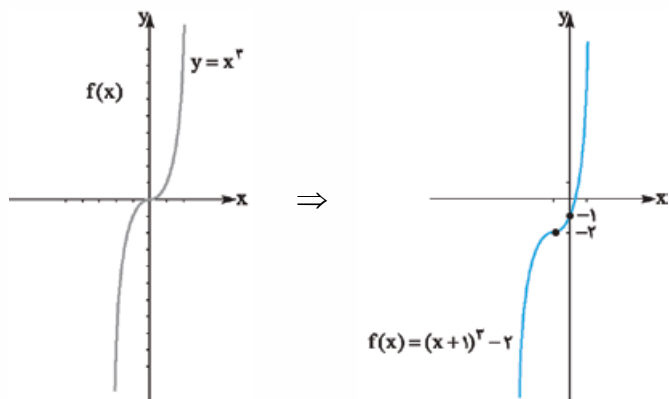
		kheilisabz.com	زمان آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	حسابان (۲)
نمره	نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۱			آزمون شماره ۹	
۱/۵	برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطه تقاطع آن با محور x ها معادله خط مماس را بنویسید.				
۱/۷۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (-3x^2 + x)^5(2x)$ ب) $g(x) = 5 \tan x + \sin x^2$				
۰/۷۵	اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر باشد، در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟				
۱/۲۵	اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.				
۱	با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید. ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید. پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید. ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید. 				
۱/۷۵	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x-2}$ را رسم کنید.				
۲۰	جمع نمرات				
موفق باشید					



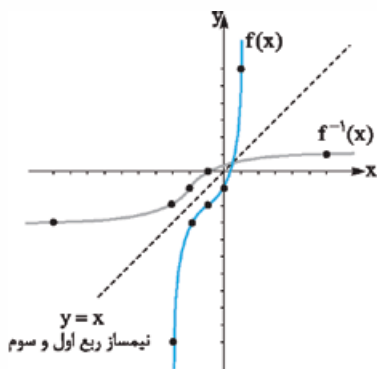
پاسخ‌نامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۳- الف) ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



ب) چون هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک است، بنابراین تابع f وارون پذیر است. برای رسم وارون f ، باید نمودار $f(x) = (x+1)^3 - 2$ را نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم:



پ) برای محاسبه ضابطه وارون تابع $f(x) = (x+1)^3 - 2$ ابتدا باید x را تنها کنیم:

$$y = (x+1)^3 - 2 \Rightarrow y+2 = (x+1)^3$$

$$\Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{y+2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+2} - 1$$

جای x و y را عوض می‌کنیم $\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$

۴- طبق نمودار از سمت چپ شروع می‌کنیم.

اکیداً صعودی: $[-4, 0]$ ، اکیداً نزولی: $(-\infty, -4)$

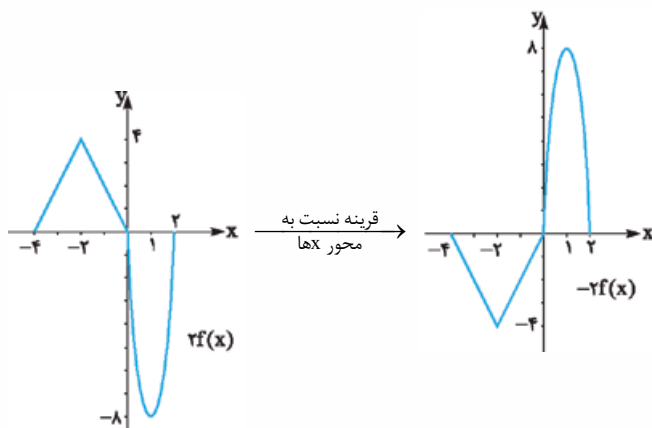
اکیداً نزولی: $[4, +\infty]$ ، تابع ثابت: $[0, 4]$

۵- باید نشان دهیم مقدار $f(x)$ به ازای ریشه $5-2x$ ، برابر صفر است؛ یعنی باید نشان دهیم: $f(\frac{5}{2}) = 0$.

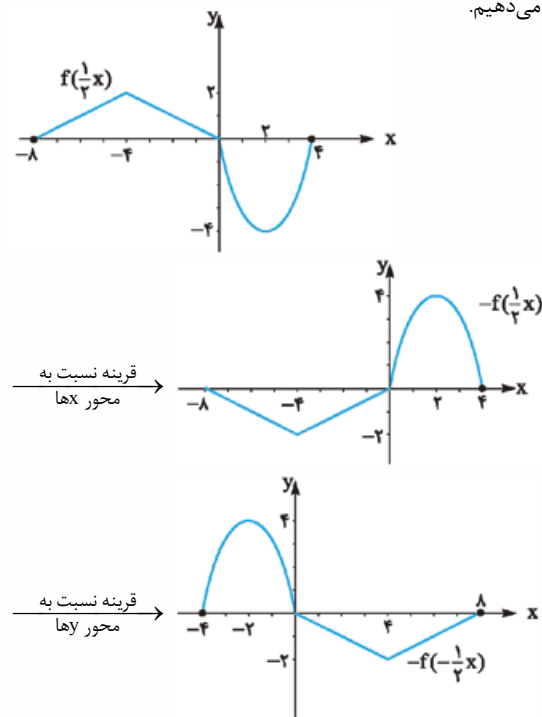
$$f(\frac{5}{2}) = 2(\frac{5}{2})^3 - 3(\frac{5}{2})^2 - 9(\frac{5}{2}) + 10$$

$$= \cancel{2} \times \frac{125}{\cancel{2}} - 3 \times \frac{25}{\cancel{2}} - \frac{45}{\cancel{2}} + 10 = \frac{125 - 75 - 45 + 40}{2} = \frac{165 - 165}{2} = 0 \Rightarrow f(\frac{5}{2}) = 0$$

۱- برای رسم نمودار $y_1 = -2f(x)$ ابتدا با توجه به ضریب ۲، یک انبساط عمودی در راستای محور y ها انجام می‌دهیم؛ سپس به علت ضریب منفی نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



برای رسم $y_2 = -f(-\frac{1}{4}x)$ ابتدا با توجه به ضریب $\frac{1}{4}$ ، یک انبساط افقی در راستای محور x ها انجام می‌دهیم. سپس یک‌بار قرینه نسبت به محور x ها و بار دیگر قرینه نسبت به محور y ها انجام می‌دهیم.



۲- الف) $(-2, \frac{1}{4})$

$A = (-1, 1)$ $\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{های یک واحد}}$ $A' = (-2, 1)$

$\xrightarrow[\text{عمودی با ضریب } \frac{1}{4}]{\text{های انقباض}}$ $A'' = (-2, \frac{1}{4})$

$-1 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 5 \Rightarrow [0, 5]$

ب)

پس $2x - 5$ یک مقسوم‌علیه $f(x)$ است. برای پیدا کردن مقسوم‌علیه‌های دیگر باید $f(x)$ را بر $2x - 5$ تقسیم کنیم.

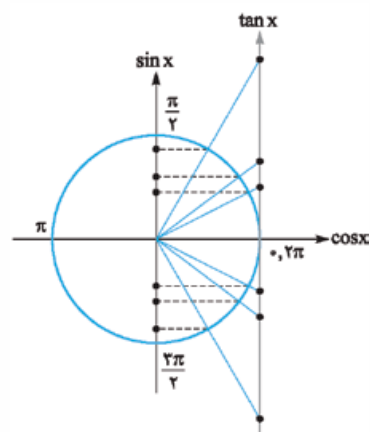
$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 \quad | \quad 2x - 5 \\ -(2x^3 - 5x^2) \\ \hline 2x^2 - 9x + 10 \\ -(2x^2 - 5x) \\ \hline -4x + 10 \\ -(-4x + 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابراین: $f(x) = (2x - 5)(x^2 + x - 2) = (2x - 5)(x + 2)(x - 1)$
یعنی $x + 2$ و $x - 1$ مقسوم‌علیه‌های دیگر $f(x)$ هستند.

۶- به طور کلی دوره تناوب تناوب توابعی به فرم $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم $|a| + d$ و مقدار مینیمم $-|a| + d$ است.

(الف)
$$\begin{cases} y = -\cos \frac{\pi}{3}x + \sqrt{2} \\ T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \\ \max = |-1| + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \\ \min = -|-1| + \sqrt{2} = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} y = -2\sin 5x + 3 \\ T = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5} \\ \max = |-2| + 3 = 2 + 3 = 5 \\ \min = -|-2| + 3 = -2 + 3 = 1 \end{cases}$$



۷- دایره مثلثاتی رسم می‌کنیم:
در ربع اول: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، طبق شکل مشخص است که همواره:
 $\sin \alpha < \tan \alpha$
در ربع چهارم: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ، طبق شکل مشخص است که همواره:
 $\sin \alpha > \tan \alpha$

۸- الف) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ ، در نتیجه $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. زاویه‌ای که مقدار سینوس آن $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است را از ربع ۴ انتخاب می‌کنیم. $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.
جواب‌های کلی عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{3}) \\ x = (2k+1)\pi - (-\frac{\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

ب) قرار می‌دهیم $\tan x = t$ ، در این صورت: $2t^2 - 3t + 1 = 0$.
مجموع ضرایب برابر صفر است، پس $t = 1$ و $t = \frac{1}{2}$ در نتیجه:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

اما از معادله $\tan x = \frac{1}{2}$ مقدار زاویه قابل محاسبه نیست. مثلاً اگر β زاویه موردنظر باشد، آن‌گاه $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و در نتیجه:
 $x = k\pi + \beta, k \in \mathbb{Z}$

۹- مساحت مثلث به کمک دو ضلع و زاویه بین آن‌ها عبارت است از:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \text{ضلع} \times \text{ضلع} \times \sin(\text{زاویه بین دو ضلع})$$

$$8 = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

زاویه بین دو ضلع در مثلث در بازه $0 < \theta < \pi$ قرار می‌گیرد، پس $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{5\pi}{6}$ قابل قبول هستند. یعنی دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

۱۰- الف) صورت کسر فاقد x است. $x = 1$ را فقط در مخرج کسر جای گذاری می‌کنیم:
 $1^2 - 3(1) + 2 = 0$

با تعیین علامت مخرج کسر داریم:

x	۱	۲
$x^2 - 3x + 2$	+	-

$x \rightarrow 1^+$ یعنی حد راست، طبق جدول برای همسایگی راست $x = 1$ ، مقدار

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

اما $0 < \pi - 4 < \pi$ ، بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$
ب) از مثلثات به یاد داریم که:

$$\begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

پس حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ به صورت $\frac{1}{0}$ خواهد بود که باید $+$ یا $-$ بودن مخرج را مشخص کنیم. طبق صورت سؤال، $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$ ، پس با مقادیر بیشتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شویم، لذا در ربع دوم دایره مثلثاتی هستیم و در این ربع مقدار $\cos x$ منفی است.

در نتیجه: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \frac{1}{0^-} = -\infty$

پ) برای عبارت زیر رادیکال داریم:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3} |x|$$

چون $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، پس داخل قدرمطلق مثبت است و می‌توان قدرمطلق را حذف کرد. در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3} |x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3} x$$

۱۱- مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2$$

چون $x = 2$ و $x = -3$ صورت کسر را صفر نمی‌کنند، حتماً مجانب قائم هستند. برای بررسی دقیق‌تر ابتدا مخرج را تعیین علامت می‌کنیم:

x	-3	2
$x^2 + x - 6$	+	-

طبق جدول در همسایگی راست $x = 2$ ، مخرج مثبت است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2 + x - 6} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

طبق جدول در همسایگی چپ $x = 2$ ، مخرج منفی است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2 + x - 6} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

طبق جدول در همسایگی راست $x = -3$ ، مخرج منفی است.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x+1}{x^2 + x - 6} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

طبق جدول در همسایگی چپ $x = -3$ ، مخرج مثبت است.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x+1}{x^2 + x - 6} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

۱۲- توجه داریم که:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \end{cases}$$

اکنون حد تابع داده شده را یک بار وقتی $x \rightarrow +\infty$ و بار دیگر وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل

می کند، محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

پس $y = \pm 1$ خطوط مجانب افقی تابع هستند.

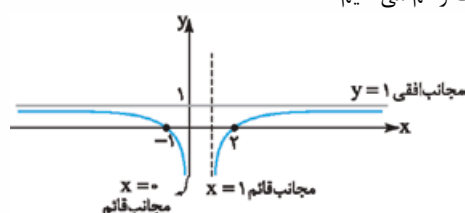
۱۳- طبق (الف)، نقاط $(-1, 0)$ و $(2, 0)$ روی نمودار است؛ یعنی نمودار باید محور x ها را در -1 و 2 قطع کند.

طبق (ب)، خطوط $x = 1$ و $x = 0$ مجانب های قائم هستند. برای مجانب قائم $x = 1$ ، در همسایگی راست، مقادیر f به $-\infty$ و برای مجانب قائم $x = 0$ ، در همسایگی چپ، مقادیر f به $-\infty$ میل می کند.

طبق (پ)، خط $y = 1$ مجانب افقی تابع f است، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

اکنون نموداری با این اطلاعات رسم می کنیم:



$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$$

۱۰-

$$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-1$$

مجانباتی قائم:

اما $x=-1$ ، مجانب قائم نیست، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{x(x+1)} = -2$$

می دانیم برای مجانب قائم بودن جواب، حد باید بی نهایت شود، نه عدد.

اما $x=0$ مجانب قائم است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1$$

مجانبات افقی:

۱۱- اولاً تابع $f(x) = |2x-4|$ در $x=2$ پیوسته است.

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

ثانیاً:

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(2x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ پس تابع $f(x)$ در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

$x=2$ برای تابع f طول نقطه گوشه ای است.

۱۲- ابتدا محل برخورد f با محور x ها را محاسبه می کنیم:

$$y=0 \Rightarrow x^2-8=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,0)$$

محل تقاطع با محور x ها: $(2,0)$

برای محاسبه شیب خط مماس از مشتق گیری استفاده می کنیم:

$$f'(x) = 2x^2 \stackrel{x=2}{=} 2(2)^2 = 12 \Rightarrow m = 12$$

$$y-0 = 12(x-2) \Rightarrow y = 12x-24$$

معادله خط مماس:

$$f'(x) = \Delta(-3x^2+x)^2(-6x+1)(2x)+2(-3x^2+x)^2 \quad \text{الف}$$

۱۳-

$$g'(x) = \Delta(1+\tan^2 x) + (2x)\cos x^2$$

$$\text{سرعت متوسط} = 2 \quad \text{۱۴-}$$

$$\text{سرعت لحظه ای} = f'(t) = 3t^2 - 1$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow t = 1$$

طبق فرض، سرعت متوسط برابر سرعت لحظه ای است.

$$A(-1,1) \quad \text{نقطه عطف:} \quad \begin{cases} f(-1)=1 \\ f''(-1)=0 \end{cases} \quad \text{۱۵-}$$

$$f(x) = ax^2 + bx^2 + 2 \quad f'(x) = 2ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 4ax + 2b \quad f(-1) = -a + b + 2 = 1 \Rightarrow -a + b = -1$$

$$f''(-1) = -4a + 2b = 0$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

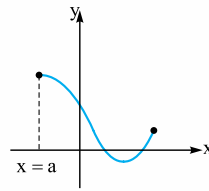
$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} -4a + 2b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow -4a + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2(-a+1) = 0 \Rightarrow -4a - 2a + 2 = 0 \Rightarrow -6a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

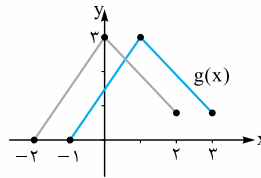


۱- الف) درست

ب) نادرست، در نمودار مقابل $x=a$ طول نقطه بحرانی است، ولی نقطه اکسترمم نسبی نیست. (نقاط ابتدایی و انتهایی بازه هیچگاه نقاط اکسترمم نسبی نیستند.)

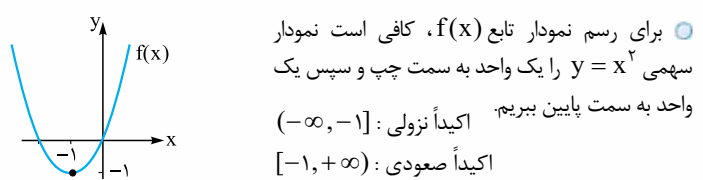
$$y = \sqrt{x} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) + 2 \Rightarrow b = -\frac{\pi}{2}, T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \quad \text{الف-۲}$$

ب) بالا



۳- با توجه به ضابطه $g(x) = f(x-1)$ کافی است نمودار اولیه را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم. و با توجه به نمودار g ، دامنه آن برابر است با $[-1, 3]$.

$$f(x) = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1 \quad \text{۴-}$$



۵- کافی است ریشه عبارت $2x+1$ را در $p(x)$ جای گذاری کنیم:

$$2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 8\left(-\frac{1}{8}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{باقی مانده} = 0$$

۶- برای حل معادلات شامل عبارت های نمایی باید پایه ها را با هم برابر کنیم:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6 \xrightarrow{y=\left(\frac{1}{2}\right)^x} 2x-2 \geq 6 \Rightarrow x \geq \frac{8}{2} = 4$$

۷- می دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\sin 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \text{که } k \in \mathbb{Z} \text{ است.}$$

۸- با توجه به شکل $\max = 5$ ، $\min = 1$ و دوره تناوب برابر 4π است.

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 5 \\ c = 3, |a| = 2 \end{cases} \Rightarrow c = 3, |a| = 2, T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

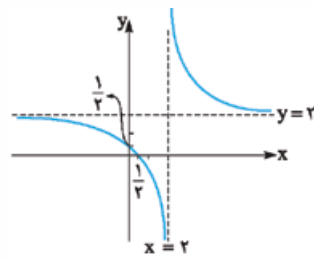
$$\Rightarrow y = 2 \cos \frac{1}{2}x + 3 \quad \text{با توجه به شکل، } a > 0 \text{ پس } a = 2 \text{ و } b = \frac{1}{2}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-x^2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

$$\text{پ) می توان نوشت: } \frac{x+\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \quad \text{از طرفی } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+\sin^2 x}{x^2} = +\infty + 1 = +\infty \quad \text{و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



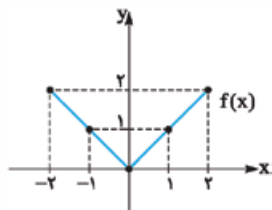
محل تقاطع نمودار با محورها:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow (0, \frac{1}{x})$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow (\frac{1}{y}, 0)$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

مثال نمودار تابع $f(x) = |x|$ را با دامنه $[-2, 2]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید. سپس نمودار توابع $g(x) = f(x-1)$ و $h(x) = f(x)-1$ را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.



$$f(x) = |x|$$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

$$f \text{ برد} = [0, 2]$$

برای رسم تابع $g(x) = f(x-1)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

$$g \text{ دامنه} = [-1, 3]$$

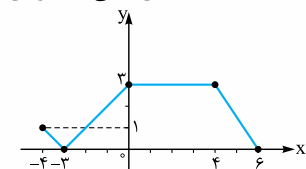
$$g \text{ برد} = f \text{ برد} = [0, 2]$$

برای رسم تابع $h(x) = f(x)-1$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین در راستای قائم انتقال دهیم.

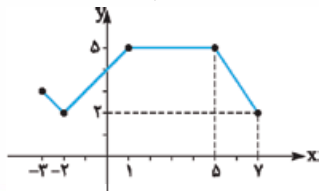
$$h \text{ دامنه} = f \text{ دامنه} = [-2, 2]$$

$$h \text{ برد} = [-1, 1]$$

مثال نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y = f(x-1) + 2$ را رسم کنید.



پاسخ باید نمودار اولیه را دو واحد به سمت بالا در راستای قائم و یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

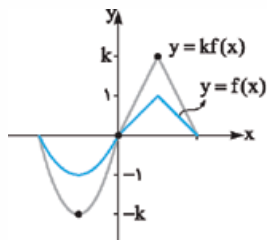


$$\text{دامنه جدید} = [-3, 7]$$

$$\text{برد جدید} = [1, 5]$$

انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، باید عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم.

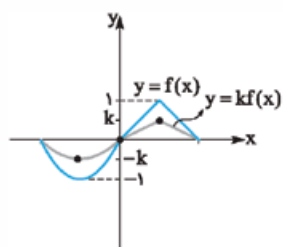


اگر $k > 1$ باشد، نمودار انبساط عمودی در راستای محور y ‌ها و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار انقباض عمودی در راستای محور y ‌ها دارد.

$$k > 1 \Rightarrow \text{انبساط عمودی داریم}$$

$$0 < k < 1 \Rightarrow \text{انقباض عمودی داریم}$$

تذکره در حالتی که $k = -1$ باشد، نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ‌ها است.

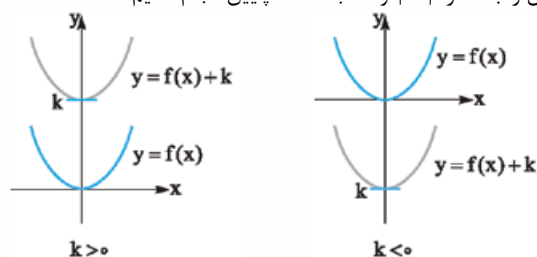


فصل ۱: تابع

درس اول: تبدیل نمودار توابع

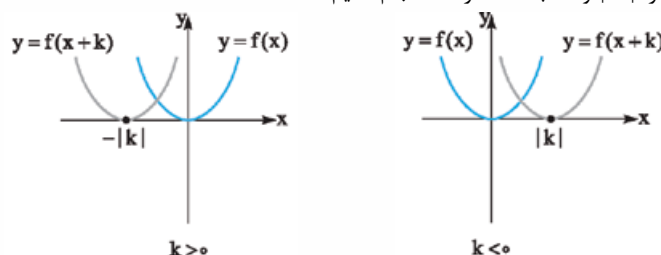
انتقال‌های عمودی و افقی

انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، باید نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا ببریم. اما اگر $k < 0$ باشد، باید این انتقال را به اندازه $|k|$ واحد به سمت پایین انجام دهیم.



تذکره در انتقال عمودی دامنه تابع تغییری نمی‌کند و فقط بُرد آن به اندازه k واحد تغییر می‌کند.

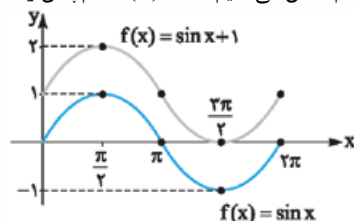
انتقال افقی: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، باید نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ ببریم. اما اگر $k < 0$ باشد، باید این انتقال را به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام دهیم.



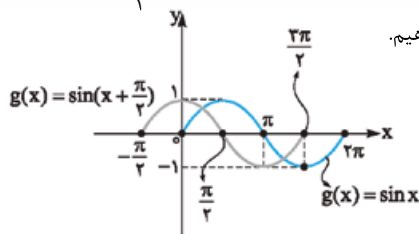
تذکره در انتقال افقی بُرد تابع تغییری نمی‌کند و فقط دامنه آن به اندازه k واحد تغییر می‌کند.

مثال نمودار توابع $f(x) = \sin x + 1$ و $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ را با توجه به نمودار $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ برای تابع $f(x) = \sin x + 1$ ، نمودار $y = \sin x$ با دامنه $[0, 2\pi]$ را یک واحد به سمت بالا در راستای قائم انتقال می‌دهیم. دامنه $f(x)$ همچنان $[0, 2\pi]$ باقی می‌ماند.



برای تابع $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ، نمودار $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت چپ در راستای افقی انتقال می‌دهیم.

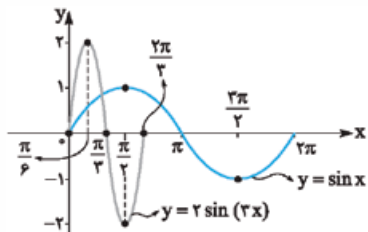


$$D_{g(x)} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

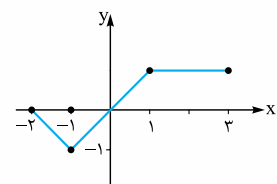


مثال به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ ، نمودار تابع $y = 2 \sin(3x)$ را رسم کنید.

پاسخ ضریب ۲ باعث می‌شود که نمودار اولیه انبساط عمودی (انبساط در راستای محور



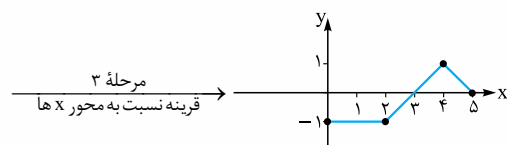
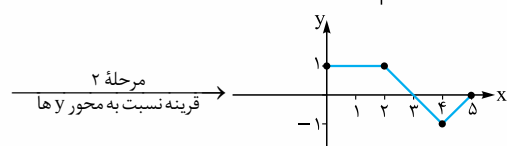
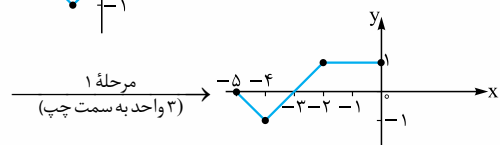
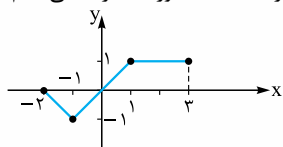
یها) داشته باشد، همچنین ضریب ۳ برای x باعث می‌شود نمودار اولیه انقباض افقی (در راستای محور x) داشته باشد.



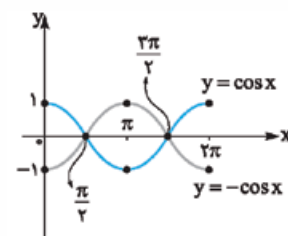
مثال نمودار $f(x)$ در مقابل رسم

شده است. نمودار $y = -f(3-x)$ را رسم کنید.

پاسخ مراحل رسم: ۱- نمودار را ۳ واحد به سمت چپ می‌بریم. ۲- نمودار مرحله ۱ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. ۳- نمودار مرحله ۲ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



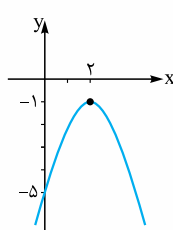
مثال قرینه نمودار تابع $y = \cos x$ را نسبت به محور x ها در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



پاسخ ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم

می‌کنیم، سپس برای رسم قرینه آن، نسبت به محور x ها یعنی $y = -\cos x$ ، نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

مثال نمودار زیر از قرینه یابی نسبت به محور x ها و انتقال نمودار تابع $y = x^2$ به



دست آمده است. ضابطه آن را مشخص کنید.

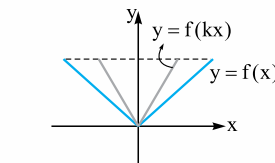
پاسخ با توجه به نمودار، تابع $y = x^2$ نسبت

به محور x ها قرینه شده، دو واحد به سمت راست و یک واحد پایین آمده است، پس ضابطه‌اش به صورت $y = -(x-2)^2 - 1$ است.

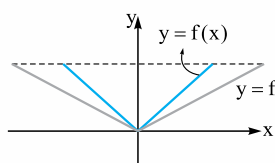
انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، باید طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 1$ باشد، انقباض افقی در راستای محور x ها و اگر $0 < k < 1$ باشد، انبساط افقی در راستای محور x ها داریم.



(انبساط) $k > 1$



(انبساط) $0 < k < 1$

تذکره نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

تکلیف برای بررسی تابع $g(x) = af(bx+c)+d$ از روی نمودار $f(x)$ ، باید

به ترتیب c (انتقال افقی)، b (انبساط و انقباض افقی)، a (انبساط و انقباض عمودی) و در نهایت d (انتقال عمودی) را انجام دهیم.

مثال نمودار تابع $y = (-x-1)^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

x	-1	0	1
$y = x^3$	-1	0	1

ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم کرده، سپس آن را یک واحد به سمت راست می‌بریم و در نهایت آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

