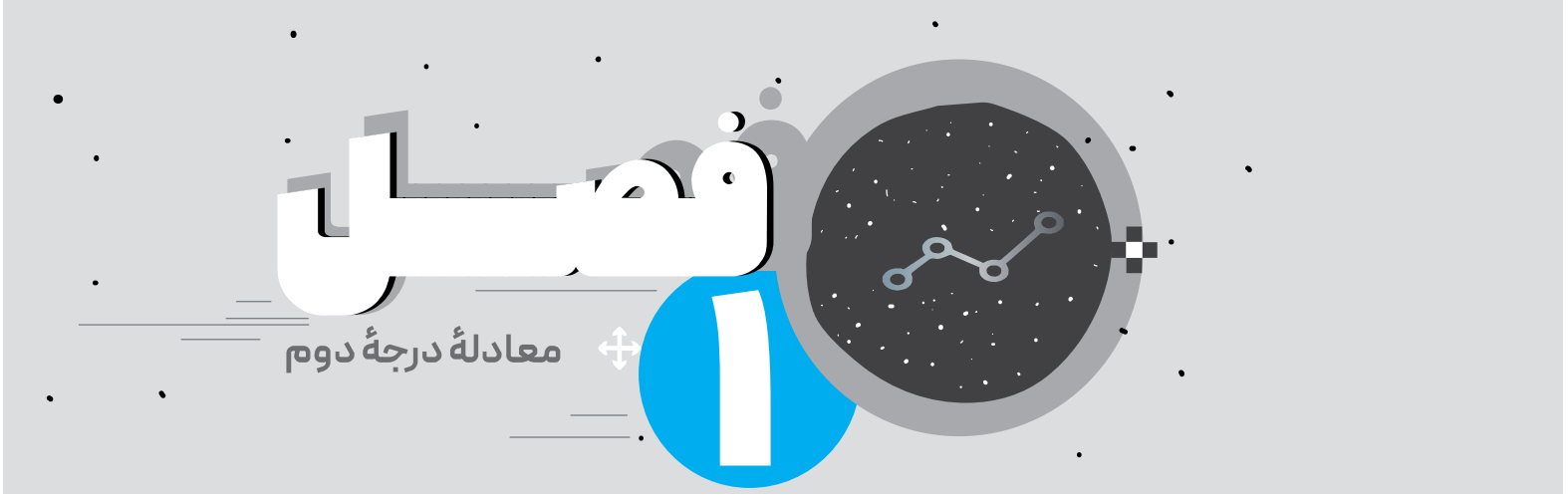




رجوع به آرشیو

اتحاد: اگر یک تساوی به‌ازای هر عدد دلخواهی که به‌جای متغیرهایش قرار دهیم، صحیح باشد، به آن تساوی اتحاد می‌گوییم.
مثل اتحادهای آشنای مربع دوجمله‌ای، اتحاد جمله مشترک، اتحاد مزدوج و ...

اتحاد مربع دوجمله‌ای: $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$, $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$

اتحاد مزدوج: $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

اتحاد جمله مشترک: $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

تساوی $۳x+۱=-۲$ را در نظر بگیرید. اگر به‌جای x عدد -۱ را قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟

$۳x+۱=-۲ \xrightarrow{x=-۱} ۳(-۱)+۱=-۲ \Rightarrow -۳+۱=-۲ \Rightarrow -۲=-۲$ ✓

تساوی صحیح است.

خب حالا اگر به‌جای x، عدد ۱ را قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟

$۳x+۱=-۲ \xrightarrow{x=۱} ۳(۱)+۱=-۲ \Rightarrow ۳+۱=-۲ \Rightarrow ۴=-۲$ ×

تساوی صحیح نیست.

به چنین تساوی‌هایی از اعداد و متغیرها که به‌ازای **برخی از مقادیر** صحیح است، **معادله** می‌گوییم.

مانند $۳x+۳=۰$ ، $۲x^۲+۱=۹$ ، $۲a-۱=۰$ و ...

مطلبی که در معادله برایمان اهمیت دارد این است که عددهایی را پیدا کنیم که اگر به‌جای متغیر معادله قرار دهیم، تساوی صحیح باشد. مثلاً می‌خواهیم ببینیم در معادلهٔ $۳x+۳=۰$ به‌جای x چه عددی قرار دهیم که تساوی صحیح باشد. این عدد را وقتی پیدا کردیم به آن، **ریشهٔ معادله** یا **جواب معادله** می‌گوییم. در معادلهٔ $۳x+۳=۰$ اگر به‌جای x، عدد -۱ را قرار دهیم آنگاه تساوی، صحیح است.

$۳x+۳=۰ \xrightarrow{x=-۱} ۳(-۱)+۳=۰ \Rightarrow -۳+۳=۰ \Rightarrow ۰=۰$ ✓

به عدد $x=-۱$ که به‌ازای آن تساوی معادله صحیح شد، جواب یا ریشهٔ معادله گفته می‌شود.

جواب معادله رو چطور به دست بیاریم؟

عجله نکنید، بگذارید اول انواع معادله را بگوییم سپس جواب هر کدام را بررسی خواهیم کرد.
در این درس با دو نوع معادله، معادلهٔ درجهٔ اول و معادلهٔ درجهٔ دوم آشنا می‌شویم.

معادلهٔ درجهٔ اول

مثال معادلهٔ $۳x+۱=۰$ یک معادلهٔ درجهٔ اول است، چون توان x در آن **یک** است.

- در حالت کلی معادلهٔ درجهٔ اول به‌شکل $ax+b=۰$ است که در آن a و b اعداد حقیقی هستند و a مخالف صفر است.

مثال معادله‌های زیر همگی درجهٔ اول هستند: $۳x=۰$, $\frac{۱}{۳}x+۲=۷$, $\sqrt{۵}x-۱۰=۰$, $x+۱=۳$, $۲x+۵=۰$

دقت در معادلهٔ درجهٔ اول:

- a و b هر عددی می‌توانند باشند (اعشاری، کسری، رادیکالی و صحیح)، فقط a نمی‌تواند صفر باشد.
- b اشکالی ندارد صفر باشد، مانند $۳x=۰$
- توان x حتماً یک است.

جواب معادلهٔ درجهٔ اول

می‌خواهیم جواب معادلهٔ $ax+b=0$ را به دست آوریم:

$$ax+b=0 \xrightarrow[\text{طرف دیگر تساوی می‌بریم}]{\text{اعداد ثابت را با تغییر علامت به}} ax=-b \xrightarrow[\text{بر ضریب مجهول می‌کنیم}]{\text{طرف معلوم را تقسیم}} x=\frac{-b}{a}$$

جواب معادلهٔ $ax+b=0$ به‌شکل $x=\frac{-b}{a}$ است که در آن $a\neq 0$ است.

مثال جواب معادلهٔ $2x-5=9$ به‌شکل زیر است:

$$2x-5=9 \xrightarrow[\text{یک طرف می‌بریم}]{\text{اعداد معلوم را با تغییر علامت به}} 2x=9+5 \Rightarrow 2x=14 \xrightarrow[\text{بر ضریب مجهول}]{\text{طرف معلوم تقسیم}} x=\frac{14}{2}=7$$

$x=7$ جواب معادلهٔ $2x-5=9$ است.

پاتخته

جواب معادله‌های زیر را به دست آورید.

۱) $3x-9=6 \Rightarrow 3x=6+9=15 \Rightarrow x=\frac{15}{3}=5$

۲) $10x-3=4 \Rightarrow 10x=4+3=7 \Rightarrow x=\frac{7}{10}$

۳) $7x-2=6x-3 \xrightarrow[\text{اعداد ثابت یک طرف}]{\text{جملات شامل x یک طرف}} 7x-6x=-3+2 \Rightarrow x=-1$

۴) $\frac{3}{2}x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{1}}{\frac{3}{2}} \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} \frac{9\times 2}{1\times 3}=\frac{18}{3}=6$

۵) $\frac{3x+1}{9}=\frac{2x-1}{3} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} 3(3x+1)=9(2x-1) \Rightarrow 9x+3=18x-9$

$$\Rightarrow 9x-18x=-9-3 \Rightarrow -9x=-12 \Rightarrow x=\frac{-12}{-9}=\frac{4}{3}$$

۶) $\frac{4}{3}x-\frac{1}{2}x+\frac{x}{6}=2$

ک.م.م ۳، ۲ و ۶ برابر ۶ است، پس تمام عبارت‌ها را در ۶ ضرب می‌کنیم.

$$6\times\frac{4}{3}x-6\times\frac{1}{2}x+6\times\frac{x}{6}=6\times 2 \Rightarrow 8x-3x+x=12 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{6}=2$$

معادلهٔ $ax+b=0$ درصورتی‌که $a=0$ و $b\neq 0$ باشد، فاقد جواب است؛ زیرا سمت چپ تساوی عددی غیرصفر و سمت راست آن صفر خواهد شد.

مثال اگر معادلهٔ $(2b-3)x+8=0$ فاقد جواب باشد، مقدار b را به دست آورید.

پاسخ برای اینکه معادله فاقد جواب باشد، باید ضریب x یعنی $(2b-3)$ برابر صفر باشد.

$$2b-3=0 \Rightarrow 2b=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

معادلهٔ درجهٔ دوم

حالت کلی معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل $ax^2+bx+c=0$ است که در آن $a\neq 0$ است و a، b و c اعداد حقیقی هستند.

مثال معادله‌های زیر همگی معادلهٔ درجهٔ دوم هستند. $3x^2+9x+2=0, 2x^2=0, x^2-x=3, 4x^2-5x-9=11$

دقت ۱. b و c اشکالی ندارد که صفر باشند، فقط a نباید صفر باشد.

مثال $2x^2=0$، $3x^2+2=0$ و $5x^2+9x=0$

۲. توان دوم x (x^2) حتماً وجود دارد، زیرا a (ضریب x^2) مخالف صفر است.

۳. معادله‌هایی به شکل $4x^2-5x-9=11-2x$ و $x^2-x=3$ هم معادلهٔ درجهٔ دوم هستند. کافی است همهٔ جملات را به یک سمت تساوی انتقال دهیم تا به‌شکل استاندارد $ax^2+bx+c=0$ در بیایند.

$$4x^2-5x-9=11-2x \xrightarrow{\text{شکل استاندارد}} 4x^2-5x-9-11+2x=0 \Rightarrow 4x^2-3x-20=0$$

$$x^2-x=3 \xrightarrow{\text{شکل استاندارد}} x^2-x-3=0$$

جواب معادلهٔ درجهٔ دوم رو چطور به دست بیاریم؟

در درس بعد، روش‌های به دست آوردن جواب معادلهٔ درجهٔ دوم را بررسی می‌کنیم.

درسنامه

پاتخته

اگر طول مستطیلی دو برابر عرض آن باشد و محیط مستطیل ۶۰ سانتی‌متر باشد، مساحت آن چند سانتی‌متر مربع است؟

پاسخ ✱ **گام ۱** مجهول اصلی مسئله، مساحت مستطیل است که برای به دست آوردن آن به اندازهٔ طول و عرض مستطیل نیاز داریم، پس باید طول یا عرض را به‌عنوان x در نظر بگیریم که گفتیم مقدار کوچک‌تر (عرض) را به‌عنوان x بگیریم بهتر است.

عرض مستطیل $= x$

✱ **گام ۲** تبدیل جملات توصیفی به زبان ریاضی:

طول مستطیل دو برابر عرض آن است. طول مستطیل $= ۲x$

محیط مستطیل $= ۲(\text{عرض}+\text{طول}) = ۲(۲x+x) = ۲(۳x) = ۶x$

محیط مستطیل ۶۰ سانتی‌متر است. $۶x = ۶۰$

✱ **گام ۳** حل معادلهٔ به‌دست‌آمده:

$$۶x = ۶۰ \Rightarrow x = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰$$

خواستهٔ سؤال: مساحت مستطیل $=$ طول مستطیل $\times$ عرض مستطیل $= ۲x \times x = ۲x^۲ \xrightarrow{x=۱۰} ۲(۱۰)^۲ = ۲\times ۱۰۰ = ۲۰۰$ سانتی‌مترمربع

چک کردن درستی جواب: طول و عرض مستطیل اعداد مثبتی به دست آمدند، پس جواب منطقی است.

درسنامه

کنکورشناسی

در کنکورهای دههٔ ۹۰ و سال ۱۴۰۰ از این درس سؤالی به‌طور مستقیم نیامده است ولی در کنکور سال ۱۴۰۱ مستقیم از آن سؤال مطرح شده است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول - درس ۱

۱. جواب معادلهٔ $۲(x-۳) - \frac{۱}{۲}(۲x+۴) = -۴$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) -۲

۲. با توجه به معادلهٔ $\frac{x+۱}{۲} - ۲x = \frac{-۴x+۷}{۳}$، مقدار x کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) -۱۱ ۳) -۶ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳. اگر جواب معادلات $-۲(۳x-۱) = ۱۲-x$ و $۳(۳x-۷)-۲(۴-۲x) = ۱۰$ را به‌ترتیب m و n بنامیم، $n-m$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۵

۴. اگر x ریشهٔ معادلهٔ $\frac{۳x-۱}{x-۳} = \frac{۳x+۶}{x}$ باشد، حاصل $۱+۲x$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۷ ۳) -۱۷ ۴) -۱۹

۵. با توجه به معادلهٔ $۴(۳a+۵) = ۷a+۱۰$، مقدار b از معادلهٔ $\frac{۲}{۳}(۲b+۳) - \frac{۶b+۱}{۲} = \frac{a}{۲}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) ۱/۵ ۴) $-۲/۵$

۶. اگر $۶-n = \frac{n}{۲} - \frac{n}{۴}$ و $-۲ = \frac{m+۱}{۲} - \frac{۲(m-۱)}{۳}$ باشد، ریشهٔ معادلهٔ $mx+n = ۳x+mn$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۷. به‌ازای کدام مقدار k، ریشهٔ معادلهٔ $k(x+۲)+۲(۱-x) = ۴$ برابر با -۴ است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸. اگر جواب معادلهٔ $\frac{۳x-۱}{۲} - \frac{a-x}{۳} = ۴$ برابر با ۵ باشد، a بر کدام عدد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۹ اگر $a \neq -۲b$ باشد، پاسخ معادلهٔ $\frac{a}{۲}(۲x-۴) + ۲bx + ۴a + ۴b = ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۰. اگر جواب معادلهٔ $\frac{x+۵}{۶} + \frac{۲x-۲}{۳} = x-۱$ دو واحد بیشتر از ریشه معادلهٔ $\frac{x-۳}{۲} + x = ۲x-a$ باشد، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱. **گزینهٔ ۱**

$$۲(x-۳)-\frac{۱}{۲}(۲x+۴)=-۴ \Rightarrow ۲x-۶-x-۲=-۴$$

$$\Rightarrow x-۸=-۴ \Rightarrow x=۸-۴ \Rightarrow x=۴$$

۲. **گزینهٔ ۲**

$$\frac{-۴x+۷}{۳}=\frac{x+۱}{۲}-۲x$$

در معادلاتی که چند کسر با مخرج‌های متفاوت داریم، برای حذف کسرها، طرفین تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم. ک.م.م ۲ و ۳ برابر با ۶ است.

$$۶\times\frac{-۴x+۷}{۳}=۶\times\frac{x+۱}{۲}-۶\times ۲x \Rightarrow ۲(-۴x+۷)=۳(x+۱)-۱۲x$$

$$\Rightarrow -۸x+۱۴=۳x+۳-۱۲x \Rightarrow x=-۱۱$$

۳. **گزینهٔ ۱**

$$-۲(۳x-۱)=۱۲-x \Rightarrow -۶x+۲=۱۲-x$$

$$\Rightarrow -۵x=۱۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow m=-۲$$

$$۳(۳x-۷)-۲(۴-۲x)=۱۰ \Rightarrow ۹x-۲۱-۸+۴x=۱۰$$

$$\Rightarrow ۱۳x=۳۹ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow n=۳$$

$$n-m=۳-(-۲)=۳+۲=۵$$

۴. **گزینهٔ ۱** در تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان نوشت: $ad=bc$ که این کار طرفین وسطین نام دارد.

$$\frac{۳x-۱}{x-۳}=\frac{۳x+۶}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (۳x-۱)x=(x-۳)(۳x+۶)$$

$$\Rightarrow \cancel{۳x^۲}-x=\cancel{۳x^۲}+۶x-۹x-۱۸ \Rightarrow ۲x=-۱۸$$

$$\Rightarrow x=-۹ \xrightarrow[\text{سؤال}]{\text{خواستهٔ}} -۲x+۱=-۲(-۹)+۱=۱۸+۱=۱۹$$

۵. **گزینهٔ ۳** ابتدا معادلهٔ $۴(۳a+۵)=۷a+۱۰$ را حل کرده و سپس مقدار a را در معادلهٔ دیگر جایگذاری می‌کنیم:

$$۴(۳a+۵)=۷a+۱۰ \Rightarrow ۱۲a+۲۰=۷a+۱۰ \Rightarrow ۵a=-۱۰ \Rightarrow a=-۲$$

$$\frac{۲}{۳}(۲b+۳)-\frac{۶b+۱}{۲}=\frac{a}{۲} \xrightarrow{a=-۲} \frac{۴b}{۳}+۲-\frac{۶b+۱}{۲}=-۱$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی را در ک.م.م ۲و۳یعنی ۶ ضرب}} ۸b+۱۲-۳(۶b+۱)=-۶$$

$$\Rightarrow ۸b+۱۲-۱۸b-۳=-۶ \Rightarrow -۱۰b=-۱۵ \Rightarrow b=\frac{-۱۵}{-۱۰}=۱/۵$$

۶. **گزینهٔ ۱**

$$\frac{n}{۲}-\frac{n}{۴}=n-۶ \xrightarrow{\text{ضرب در ۴}} ۲n-n=۴n-۲۴$$

$$\Rightarrow ۲۴=۳n \Rightarrow n=۸$$

$$\frac{۲(m-۱)}{۳}-\frac{m+۱}{۲}=-۲ \Rightarrow \frac{۲m-۲}{۳}-\frac{m+۱}{۲}=-۲$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۶}} ۲(۲m-۲)-۳(m+۱)=-۱۲$$

$$\Rightarrow ۴m-۴-۳m-۳=-۱۲ \Rightarrow m=-۵$$

حال معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$mx+n=۳x+mn \xrightarrow[m=-۵]{n=۸} -۵x+۸=۳x-۴۰$$

$$-۸x=-۴۸ \Rightarrow x=۶$$

۷. **گزینهٔ ۲** ریشهٔ معادله در خودِ معادله صدق می‌کند. (تساوی را برقرار می‌کند.)

$$k(x+۲)+۲(۱-x)=۴ \xrightarrow{x=-۴} k(-۴+۲)+۲(۱+۴)=۴$$

$$\Rightarrow -۲k+۱۰=۴ \Rightarrow -۲k=-۶ \Rightarrow k=۳$$

۸. **گزینهٔ ۴**

$$\frac{۳x-۱}{۲}-\frac{a-x}{۳}=۴ \xrightarrow{x=۵\text{ ریشه است}} \frac{۳\times۵-۱}{۲}-\frac{a-۵}{۳}=۴$$

$$۷-\frac{a-۵}{۳}=۴ \Rightarrow \frac{a-۵}{۳}=۳ \Rightarrow a-۵=۹ \Rightarrow a=۱۴$$

a بر ۲ و ۷ بخش‌پذیر است که ۷ در گزینه‌ها وجود دارد.

۹. **گزینهٔ ۴**

$$\frac{a}{۲}(۲x-۴)+۲bx+۴a+۴b=۰ \Rightarrow ax-۲a+۲bx+۴a+۴b=۰$$

$$\Rightarrow ax+۲bx=-۲a-۴b \Rightarrow x(a+۲b)=-۲a-۴b$$

$$\xrightarrow[a+۲b\neq ۰\text{ تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی را بر}} x=\frac{-۲a-۴b}{a+۲b}=\frac{-۲(a+۲b)}{a+۲b}=-۲$$

۱۰. **گزینهٔ ۲** ابتدا ریشهٔ معادلهٔ $\frac{۲x-۲}{۳}+\frac{x+۵}{۶}=x-۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲x-۲}{۳}+\frac{x+۵}{۶}=x-۱$$

$$\xrightarrow[\text{در ۶ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی را}} ۲(۲x-۲)+x+۵=۶x-۶$$

$$\Rightarrow ۴x-۴+x+۵=۶x-۶ \Rightarrow ۷=x$$

ریشهٔ این معادله، از ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x-۳}{۲}+x=۲x-a$، دو واحد بیشتر است.

پس ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x-۳}{۲}+x=۲x-a$ برابر با ۵ است.

$$x=۵ \rightarrow \frac{۵-۳}{۲}+۵=۲\times۵-a \Rightarrow ۱+۵=۱۰-a \Rightarrow a=۴$$

۱۱. **گزینهٔ ۱** هر معادلهٔ به‌صورت $ax+b=۰$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و $a\neq ۰$ است، یک معادلهٔ درجهٔ اول می‌نامند.

از آنجا که طبق صورت سؤال، معادلهٔ $(۲a+۱)x^۲+۳x-۴a=۰$ یک معادلهٔ درجهٔ اول است، باید ضریب $x^۲$ در آن صفر باشد یعنی: $۲a+۱=۰ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

حال با داشتن $a=-\frac{۱}{۲}$ معادله را حل می‌کنیم:

$$۳x-۴a=۰ \xrightarrow{a=-\frac{۱}{۲}} ۳x-۴(-\frac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow ۳x=-۲ \Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

۱۲. **گزینهٔ ۴** طبق سؤال قبل، در معادلهٔ درجهٔ اول، ضریب $x^۲$ باید صفر باشد:

$$۱-۳a=۰ \Rightarrow ۳a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

$$-۲x+۶a=۲b-۲ \xrightarrow{a=\frac{۱}{۳}} -۲x+۶(\frac{۱}{۳})=۲b-۲$$

$$\xrightarrow[\text{معادله است}]{x=-۱\text{ جواب}} -۲(-۱)+۲=۲b-۲ \Rightarrow ۶=۲b \Rightarrow b=۳$$

خواستهٔ سؤال: $\frac{b}{a}=\frac{۳}{\frac{۱}{۳}}=۹$

۱۳. **گزینهٔ ۱** معادلهٔ $ax+b=۰$ درصورتی‌که $a=۰$ و $b\neq ۰$ باشد، فاقد جواب است (زیرا سمت چپ تساوی عددی غیرصفر و سمت راست آن صفر خواهد شد).

طبق نکتهٔ فوق داریم: $۲m+۷=۰ \Rightarrow ۲m=-۷ \Rightarrow m=-\frac{۷}{۲}$

۱۴. **گزینهٔ ۳** ابتدا معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت $ax+b=۰$ تبدیل می‌کنیم:

$$۳m(۲x+۵)+۴x=۶-x \Rightarrow ۶mx+۱۵m+۴x=۶-x$$

$$\Rightarrow ۶mx+۵x+۱۵m-۶=۰ \Rightarrow (۶m+۵)x+۱۵m-۶=۰$$

برای آنکه معادله فاقد جواب باشد، باید ضریب x برابر با صفر و عدد ثابت، مخالف صفر باشد:

$$۶m+۵=۰ \Rightarrow m=-\frac{۵}{۶}$$

دقت شود که به‌ازای $m=-\frac{۵}{۶}$، $۱۵m-۶$ مخالف صفر خواهد شد. حال جواب معادلهٔ $\frac{۱۲mx}{۵}+\frac{x}{۲}=۳$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱۲(-\frac{۵}{۶})x}{۵}+\frac{x}{۲}=۳ \Rightarrow \frac{-۱۰x}{۵}+\frac{x}{۲}=۳ \Rightarrow -۲x+\frac{x}{۲}=۳$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} -۴x+x=۶ \Rightarrow -۳x=۶ \Rightarrow x=-۲$$