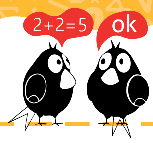
درس چهارم

رفع ابهام $\frac{0}{0}$



ابهام $\frac{\text{حدی } 0}{\text{حدی } 0}$

هنگامی که x به‌سمت a میل می‌کند، چنانچه صورت و مخرج کسر $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ به‌سمت صفر میل کنند، یک حد $\frac{0}{0}$ خواهیم داشت که برای رفع ابهام آن از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

۱ حذف عامل صفرشونده
۲ هوپیتال
۳ هم‌ارزی
۴ تغییر متغیر

بنابراین با توجه به مطلب مطرح‌شده، حدود $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-\sqrt{x}}$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-\cos 2\pi x}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-1}{8^x-4^x}$ همگی دارای ابهام $\frac{\text{حدی } 0}{\text{حدی } 0}$ هستند.

توجه داشته باشید چنانچه صورت یا مخرج کسر در همسایگی $x=a$ رفتاری به‌صورت صفر مطلق داشته باشند، ابهام نخواهیم داشت؛ مانند:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{\text{مطلق } 0}{0^+}=0$$

$$2)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x-|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\text{مطلق } 0}=\text{تعریف‌نشده}$$

حذف عامل صفرشونده

برای رفع ابهام $\frac{\text{حدی } 0}{\text{حدی } 0}$ به روش حذف عامل صفرشونده به جدول زیر خوب دقت کنید: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{حدی } 0}{\text{حدی } 0}$

فرم عامل صفر کننده	راه رفع ابهام	مثال
۱. اگر عامل صفرکنندهٔ صورت یا مخرج کسر، تابعی گویا با تجزیه‌ای راحت باشد.	به کمک تجزیه، عامل $(x-a)$ را جدا کرده و این عامل را در صورت و مخرج کسر، ساده می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+3}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(2x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{2x-3}=1$
۲. اگر صفرکنندهٔ صورت یا مخرج کسر، تابع گویا با تجزیهٔ مشکل باشد.	با تقسیم عبارت بر $(x-a)$ عامل $(x-a)$ را جدا می‌کنیم و این عامل را در صورت و مخرج، ساده می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+5x-6}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+6)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+6}{x+1}=4$ $x^3+5x-6 \div (x-1) = x^2+x+6$، باقیمانده 0
۳. قسمت صفرشونده به‌صورت تفاضل یا جمع دو رادیکال و یا یک رادیکال و یک عبارت غیررادیکالی باشد. $\sqrt{\bigcirc}\pm\sqrt{\bigcirc}$ یا $\sqrt{\bigcirc}\pm\bigcirc$	با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج عبارت، قسمت صفرشونده را گویا کرده و سپس به روش (۱) یا (۲) عامل صفرکننده را جدا می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{4}$
۴. قسمت صفرشونده به‌صورت تفاضل یا جمع دو عبارت ریشهٔ سوم یا یک عبارت ریشهٔ سوم و یک عبارت گویا باشد. $\sqrt[3]{\bigcirc}\pm\sqrt[3]{\bigcirc}$ یا $\sqrt[3]{\bigcirc}\pm\bigcirc$	با ضرب صورت و مخرج کسر در چاق آن عبارت، قسمت صفرشونده را گویا کرده و سپس به روش (۱) یا (۲) عامل صفرکننده را جدا می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\times\frac{\sqrt[3]{(x+7)^2}+4+2\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+4+2\sqrt[3]{x+7}}}$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-2)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+4+2\sqrt[3]{x+7})}=\frac{1}{(-1)(12)}=-\frac{1}{12}$
۵. قسمت صفرشونده مثلثاتی باشد.	با کمک اتحادهای مثلثاتی، عبارت صفرشوندهٔ مشترکی بین صورت و مخرج کسر پیدا کرده و با یکدیگر ساده می‌کنیم تا از حالت $\frac{0}{0}$ خارج شود.	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2\sin 2x\cos 2x}$ $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sin 2x}=\frac{1}{2}$

مثال

حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-4x^3+3}{7x^2-6x-1}$ را به دست آورید.

پاسخ $x=1$ ریشهٔ صورت و مخرج کسر و حاصل حد $\frac{0}{0}$ است، بنابراین با تقسیم بر $x-1$ عامل صفرکننده را جدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^4-4x^3+3 & x-1 \\ \hline -(x^4-x^3) & x^3-3x^2-3x-3 \\ \hline -3x^3+3 & \\ -(-3x^3+3x^2) & \\ \hline -3x^2+3 & \\ -(-3x^2+3x) & \\ \hline -3x+3 & \\ -(-3x+3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^4-4x^3+3}{7x^2-6x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3-3x^2-3x-3)}{(x-1)(7x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-3x-3}{7x+1}=\frac{-8}{8}=-1$$

تست

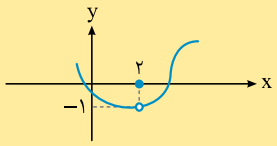
حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+8}}{\sqrt[3]{x}-1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۱/۵

پاسخ گزینهٔ ۴ با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج صورت و چاق مخرج داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{(4x+5)-(x+8)}^{3(x-1)}}{x-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}}=\lim_{x\to 1}3\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-1}{\sqrt[3]{f(x)}+1}$ کدام است؟



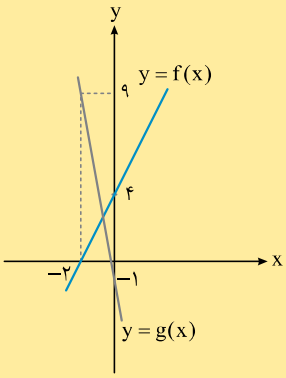
۱) -4
۲) -12
۳) -6
۴) -8

پاسخ گزینهٔ ۳ با توجه به آنکه $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-1$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-1}{\sqrt[3]{f(x)}+1}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-1)(f(x)+1)(\sqrt[3]{f^2(x)}-\sqrt[3]{f(x)}+1)}{(f(x)+1)}=\lim_{x\to 2}(f(x)-1)(\sqrt[3]{f^2(x)}-\sqrt[3]{f(x)}+1)$$

$$=(-1-1)(1+1+1)=-6$$

اگر نمودار f و g به‌صورت مقابل باشند، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)}{2x^2-3x+1}$ کدام است؟



۱) -4
۲) -2
۳) -3
۴) -5

پاسخ گزینهٔ ۳ ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ و $g(x)$ را می‌نویسیم که خواهیم داشت: $f(x)=2x+4\ ,\ g(x)=-5x-1$

حال f و g را در رابطهٔ حدی $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)}{2x^2-3x+1}$ قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2x+4)+(-5x-1)}{(x-1)(2x-1)}\overset{-3(x-1)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-3}{2x-1}=-3$$

حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 4x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ گزینهٔ ۱ **روش اول** با کمک اتحاد $\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin^2 x$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 4x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\sin 2x=2\sin x\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{(4\sin x\cos x\cos 2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{8\cos^2 x\cos^2 2x}=\frac{1}{8}$$

روش دوم با ضرب و تقسیم کسر در $(1+\cos 2x)$ و استفاده از اتحاد $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{\sin^2 4x\times(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 4x(1+\cos 2x)}$$

حال با کمک اتحاد $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{(2\sin 2x\cos 2x)^2(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\cos^2 2x(1+\cos 2x)}=\frac{1}{8}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x+2}+x^2+3x+2}{\sqrt[3]{x+2}+x^2-4}$ کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ ۲ عامل $\sqrt[3]{x+2}$ را در صورت و مخرج کسر فاکتور گرفته با یکدیگر ساده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to -2}\frac{1+(x+2)^{\frac{2}{3}}(x+1)}{1+(x+2)^{\frac{2}{3}}(x-2)}=\frac{1}{1}=1$$

اگر $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{4x+5}-ax}{x^2+x-2}=b$ باشد، b کدام است؟

۱) $-\frac{5}{7}$ ۲) $-\frac{7}{9}$ ۳) $-\frac{5}{3}$ ۴) $-\frac{7}{3}$

پاسخ گزینهٔ ۲ از آنجایی که مخرج کسر در $x=1$ صفر می‌شود و پاسخ حد، عدد یکتای b شده است، صورت نیز باید صفر شود تا پس از رفع ابهام $\frac{0}{0}$ بتوانیم حدی برابر b داشته باشیم، بنابراین:

۱. $x=1$ ریشهٔ صورت کسر است.

$$\sqrt{9}-a=0\Rightarrow a=3$$

۲. با مشخص شدن $a=3$ حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{4x+5}-3x}{x^2+x-2}\times\frac{\sqrt{4x+5}+3x}{\sqrt{4x+5}+3x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{(x-1)(-9x-5)}}{(x+2)(x-1)(\sqrt{4x+5}+3x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-9x-5}{(x+2)(\sqrt{4x+5}+3x)}=\frac{-14}{3(6)}=-\frac{7}{9}$$

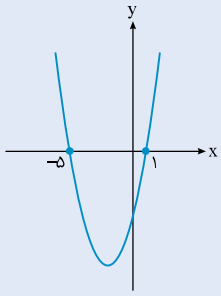
وجود قدرمطلق و جزءصحیح در ابهام $\frac{0}{0}$

چنانچه در عبارت حدی، نمادهای قدرمطلق یا جزءصحیح وجود داشت، قبل از هر کاری این دو نماد را تعیین تکلیف می‌کنیم. قدرمطلق برحسب علامت داخلش، خود عبارت یا قرینه‌اش را خارج می‌کنیم و به‌جای جزءصحیح، عدد معادل با آن را قرار می‌دهیم.

مثال

حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{|x^2+4x-5|-[-x]-x}{x^2-x}$ را به دست آورید.

پاسخ ابتدا قدرمطلق و عبارت جزءصحیح را تعیین تکلیف می‌کنیم. از آنجایی که $y=x^2+4x-5$ نموداری به‌صورت مقابل دارد، در همسایگی چپ $x=1$ منفی است و قرینه‌اش از قدرمطلق خارج می‌شود، از طرفی $[(-1)^+]=-1$ است و می‌توان نوشت:



$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2-4x+5+1-x}{x^2-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2-5x+6}{x^2-x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+6)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+6)}{x}=-7$$

عامل‌های ضربی مخالف صفر

چنانچه عامل‌هایی (ضربی) در صورت یا مخرج کسر وجود داشته باشند که حدی متناهی و مخالف صفر داشته باشند، مجاز هستیم که به‌جای آن‌ها حدشان را جایگزین کنیم و سپس محاسبات را پیش ببریم؛ به‌عنوان مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\overbrace{\sqrt{x^2+8}}^{3}+3x^2+1)(x^2-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{7(x^2-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}7\times\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}7(\sqrt{x}+1)(x+1)=28$$

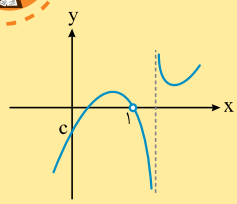
توجه نماد جزءصحیح چه به‌صورت ضرب چه به‌صورت جمع باشد، اجازه دارید حد آن را جایگزین کنید.

حفره

در تابع گویای $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ هنگامی در $x=a$ حفره خواهیم داشت که این نقطه ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر باشد و مقدار حفره در $x=a$ همان حد تابع y پس از رفع ابهام $\frac{0}{0}$ است.

تست

۹ اگر نمودار تابع $y=\frac{2x^3+ax^2+3x+b}{2x^2-7x+5}$ به‌صورت زیر باشد، مقدار abc کدام است؟



۱) $-\frac{7}{20}$
۲) $-\frac{9}{40}$
۳) $-\frac{11}{40}$
۴) $-\frac{9}{20}$

پاسخ گزینهٔ ۲ $x=1$ ریشهٔ مشترک صورت و مخرج کسر است (حفره) و از طرفی پس از ساده شدن $(x-1)$ بین صورت و مخرج، باز باید در صورت کسر $(x-1)$ وجود داشته باشد، زیرا پس از رفع ابهام، حد تابع صفر شده است، پس می‌توان گفت صورت کسر به‌صورت $2(x-1)^2(x-\alpha)$ است که با برابر قرار دادن این عبارت و صورت کسر داده‌شد، داریم:

$$2(x^2-2x+1)(x-\alpha)=2x^3+ax^2+3x+b\Rightarrow 2x^3-(2\alpha+4)x^2+(2+4\alpha)x-2\alpha=2x^3+ax^2+3x+b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2+4\alpha=3\\2\alpha+4=-a\Rightarrow\alpha=\frac{1}{4},a=-\frac{9}{2},b=-\frac{1}{2}\\-2\alpha=b\end{cases}$$

حال $y=\frac{2(x-1)^2(x-\frac{1}{4})}{(x-1)(2x-5)}$ را می‌توان به‌صورت $y=\frac{2(x-1)(x-\frac{1}{4})}{2x-5}$ نوشت که $c=y(0)=\frac{\frac{1}{2}}{-5}=-\frac{1}{10}$ و $abc=-\frac{9}{40}$ است.

هوپیتال

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تذکر ۱) هوپیتال مربوط به ابهام $\frac{0}{0}$ است و عبارت است از مشتق صورت، تقسیم بر مشتق مخرج.

۲) اگر پس از یک‌بار استفاده از هوپیتال، مجدد ابهام $\frac{0}{0}$ وجود داشت، می‌توان مجدداً از هوپیتال استفاده کرد، به‌عنوان مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-4x+3}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-4}{2(x-1)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{12x^2}{2}=6$$

علاوه بر روابط مشتق که در کتاب درسی دوازدهم تجربی آمده، بهتر است مشتق توابع مثلثاتی را نیز بدانید، زیرا بسیار در رفع ابهام‌های مثلثاتی به کار می‌آید.

مثال

حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x+7}+1)(\sqrt{x+3}-2)}{\sqrt[3]{x}-1}$ را به دست آورید.

پاسخ عامل $(\sqrt[3]{x+7}+1)$ در $x=1$ حدی برابر با ۳ دارد و می‌توان برای ساده‌تر شدن ضابطه، ابتدا مقدار حد آن را جایگزین کرد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x+3}-2)}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{3(\frac{1}{2\sqrt{x+3}})}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}$$

تست

اگر $\lim\limits_{x\to ۱۶}\frac{x+\sqrt{ax}-۴\sqrt{a}-۱۶}{x+۴b}=۲$، مقدار $a+b$ کدام است؟

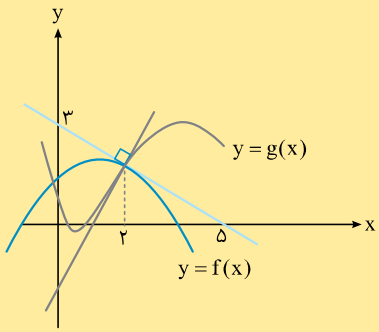
۱) ۸۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

پاسخ گزینهٔ ۳ $x=۱۶$ صورت کسر را صفر می‌کند و از آنجایی که جواب حد، غیر صفر است، باید ریشهٔ مخرج نیز باشد $(۱۶+۴b=۰\Rightarrow b=-۴)$ تا حد $\frac{۰}{۰}$ شود و پس از رفع ابهام برابر ۲ قرار گیرد:

$$\lim_{x\to ۱۶}\frac{x+\sqrt{ax}-۴\sqrt{a}-۱۶}{x-۱۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۱۶}\frac{۱+\frac{a}{۲\sqrt{ax}}}{۱}=۲\Rightarrow ۱+\frac{\sqrt{a}}{۸}=۲\Rightarrow a=۶۴$$

بنابراین $a+b=۶۰$ است.

اگر نمودار $y=f(x)$ و $y=g(x)$ به‌صورت زیر باشند، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-g(x)}{x-۲}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱۷}{۵}$
۲) $-\frac{۳۷}{۱۵}$
۳) $-\frac{۲۴}{۱۳}$
۴) $-\frac{۳۴}{۱۵}$

پاسخ گزینهٔ ۴ از آنجایی که $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=\lim\limits_{x\to ۲}g(x)$ است، داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-g(x)}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۲}\frac{f'(x)-g'(x)}{۱}=f'(۲)-g'(۲)$$

با توجه به خطوط داده‌شده خط مماس بر تابع f از دو نقطهٔ $(۰,۳)$ و $(۵,۰)$ می‌گذرد و شیبی برابر با $-\frac{۳}{۵}$ دارد و از طرفی خط مماس بر g در $x=۲$ بر این خط عمود است، پس شیبی برابر با $\frac{۵}{۳}$ خواهد داشت، بنابراین:

$$f'(۲)-g'(۲)=-\frac{۳}{۵}-\frac{۵}{۳}=\frac{-۹-۲۵}{۱۵}=-\frac{۳۴}{۱۵}$$

تذکر در ریشه‌های زیر رادیکال از هوپیتال استفاده نکنید، یا با ساده‌سازی صورت و مخرج یا با مربع کامل کردن، رادیکال صفرشونده را حذف کنید و سپس سراغ هوپیتال بروید.

تست

حاصل $\lim\limits_{x\to \pi^+}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin ۳x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

پاسخ گزینهٔ ۳ حد $\frac{۰}{۰}$ است، اما چون ریشهٔ زیر رادیکال است، فعلاً از هوپیتال استفاده نمی‌کنیم و با ضرب صورت و مخرج کسر در عبارت $\sqrt{۱-\cos x}$، رادیکال صفرشونده را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{\sin ۳x\sqrt{۱-\cos x}}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{|\sin x|}{\sin ۳x\sqrt{۱-\cos x}}$$

در همسایگی راست π، عبارت $\sin x$ منفی است و قرینهٔ آن از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{-\sin x}{\sin ۳x\sqrt{\underbrace{۱-\cos x}_{\sqrt{۲}}}}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{-\sin x}{\sqrt{۲}\sin ۳x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to \pi^+}\frac{-\cos x}{۳\sqrt{۲}\cos ۳x}=-\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۶}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۲\pi}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ گزینهٔ ۳ حد $\frac{۰}{۰}$ است و می‌توان از هوپیتال استفاده کرد (۲π ریشهٔ زیر رادیکال نیست):

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۲\pi}\frac{\frac{\sin x}{۲\sqrt{\cos x}}}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to ۲\pi}\frac{۱}{۴\cos x\sqrt{\cos x}}=\frac{۱}{۴}$$

تذکر چنانچه $\lim_{x\to a}\frac{(f.g)(x)}{(h.t)(x)}=\frac{\circ}{\circ}$ و $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}t(x)=\circ$ باشد، می‌توان کسر را به دو ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ جداگانه تبدیل کرد و پس از رفع ابهام، حدود آن‌ها را در هم ضرب نمود (البته به شرط آنکه هر کدام از حدود وجود داشته باشد).

تست

۹ حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}{(x-1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{48}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ گزینهٔ ۱ حد داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$$

حال از آنجایی که هر کدام از حدود $\frac{\circ}{\circ}$ است، حد هر کدام را با کمک قاعدهٔ هوپیتال محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{1}\times\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}{1}=\frac{1}{12}$$

قاعدهٔ هم‌ارزی

به هم‌ارزی‌های زیر دقت کنید:

۱) $\lim_{u\to\circ}\sin u\simeq\lim_{u\to\circ}u$ ۲) $\lim_{u\to\circ}\tan u\simeq\lim_{u\to\circ}u$ ۳) $\lim_{u\to\circ}\cos^n u\simeq 1-\frac{nu^2}{2}$

۴) $\lim_{u\to\circ}(1+u)^n\simeq 1+nu$, $\lim_{u\to\circ}\sqrt[n]{1+u}\simeq 1+\frac{u}{n}$ برنولی ۵) $\lim_{u\to\circ}(u^a+u^b)\simeq u^b$ $(a>b>\circ)$ کم‌توان

توجه کنید که هم‌ارزی **برنولی** نسبت به کم‌توان در اولویت است.

این هم‌ارزی‌ها به شما کمک می‌کنند تا عبارتی را جایگزین عبارت داده‌شده کنید تا محاسبهٔ حد ساده‌تر شود، به‌عنوان مثال:

الف) $\lim_{x\to\circ}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 2x}\overset{\text{هم‌ارزی (۱) و (۳)}}{=\!=}\lim_{x\to\circ}\frac{1-(1-\frac{1}{3}\times\frac{x^2}{2})}{(2x)^2}=\frac{\frac{x^2}{6}}{4x^2}=\frac{1}{24}$

ب) $\lim_{x\to\circ^+}\frac{\sin 5x-\tan 10x}{\sqrt{1-\cos 5x}}\overset{\text{هم‌ارزی (۱)، (۲) و (۳)}}{=\!=}\lim_{x\to\circ^+}\frac{5x-10x}{\sqrt{1-(1-\frac{25x^2}{2})}}=\lim_{x\to\circ^+}\frac{-5x}{\frac{5}{\sqrt{2}}|x|}=\lim_{x\to\circ^+}\frac{-5x}{\frac{5x}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}$

پ) $\lim_{x\to\circ^+}\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\overset{\text{هم‌ارزی (۵)}}{=\!=}\lim_{x\to\circ^+}\frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}=2$

ت) $\lim_{x\to\circ}\frac{(1+4x)^3-(1-x)^2}{x^2+5x}\overset{\text{هم‌ارزی (۴) و (۵)}}{=\!=}\lim_{x\to\circ}\frac{(1+12x)-(1-2x)}{5x}=\lim_{x\to\circ}\frac{14x}{5x}=\frac{14}{5}$

مثال

اگر ۳ $=\lim_{x\to\circ}\frac{1-\sqrt{\cos 4x}}{\sin^2 ax}$ **باشد، مقدار a را به دست آورید.**

پاسخ

$$\lim_{x\to\circ}\frac{1-(1-\frac{1}{2}\times\frac{16x^2}{2})}{a^2x^2}=\frac{4x^2}{a^2x^2}=3\Rightarrow a^2=\frac{4}{3}\Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

تذکر ۱ فرض کنید پس از جایگزین کردن هم‌ارز یک عبارت، آن هم‌ارزی در محاسبات جمع و تفریق از بین برود (مثلاً در محاسبهٔ حد $\lim_{x\to\circ}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$ اگر به‌جای سینوس و تانژانت، هم‌ارز آن‌ها را قرار دهیم، $\lim_{x\to\circ}\frac{x-x}{x^3}$ خواهد شد)، در این حالت اجازهٔ استفاده از هم‌ارزی را نخواهیم داشت و باید روش جایگزینی برای رفع ابهام این حد پیدا کنیم.

۲ چنانچه تذکر قبل زمانی رخ دهد که از هم‌ارزی کم‌توان استفاده می‌کنیم:

۱. اگر توانایی تشخیص کم‌توان بعدی عبارت وجود دارد کم‌توان بعدی را جایگزین می‌کنیم؛ به‌عنوان مثال در محاسبهٔ حد $\lim_{x\to 0}\frac{(x^3+x)^3-x^3}{x^5}$ با قرار دادن کم‌توان $(x^3+x)^3$ داریم $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^3}{x^5}$.

اما با توجه به اتحاد مکعب دو جمله، جملهٔ کم‌توان بعد از x^3 را قرار می‌دهیم که خواهد شد: $\lim_{x\to 0}\frac{3x^5}{x^5}=3$

۲. چنانچه عبارت صفرشونده به‌صورت $\sqrt[n]{\ }\pm\sqrt[n]{\ }$ یا $\sqrt[n]{\ }\pm 0$ باشد با ضرب صورت و مخرج حد در مزدوج یا چاق، آن را از حالت رادیکال خارج می‌کنیم و مجدداً به سراغ هم‌ارزی کم‌توان می‌رویم. مثلاً در حد $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x}}-2\sqrt[4]{x}}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{13}{7}}}$ چنانچه کم‌توان هر عبارت را جایگزین کنیم، خواهیم داشت $\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt[4]{x}-2\sqrt[4]{x}}{x^{\frac{3}{4}}}$. بنابراین با ضرب صورت و مخرج حد در مزدوج صورت کسر حدی داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{13}{7}})(\sqrt{x+4\sqrt{x}}+2\sqrt[4]{x})}$$

پس از این تغییر ظاهر و استفادهٔ مجدد از هم‌ارزی کم‌توان خواهیم داشت: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^{\frac{3}{4}}\times 4x^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{4}$

تست

حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(2x+1)(x-2)+2}{2x^2+5x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۵ ۴) -1

پاسخ گزینهٔ ۴ کم‌توان $(x-2)(1)(2x+1)(x+1)$ عدد -2 است که با $+2$ صورت کسر حذف می‌شود. سراغ کم‌توان بعدی می‌رویم، هنگامی که عدد ثابت دو پرانتز در x پرانتز دیگر ضرب شود، جملهٔ x به توان یک تولید می‌شود که در ۳ حالت می‌توان x به توان یک را در صورت ایجاد کرد و داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-2x-4x}{5x}=\frac{-5x}{5x}=-1$$

حاصل $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{9x+\sqrt{x}}-\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x^3}}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{8}{7}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) صفر

پاسخ گزینهٔ ۱ کم‌توان صورت کسر $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}$ است که از بین می‌روند و چون اتحادی برای صورت کسر بلد نیستیم، با ضرب در مزدوج، تغییر ظاهری در کسر ایجاد می‌کنیم و مجدداً سراغ هم‌ارزی کم‌توان می‌رویم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{9x}{2\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{9x+\sqrt{x}}+\sqrt[4]{x})}\overset{\text{کم‌توان}}{=\!=}\lim_{x\to 0^+}\frac{9x}{2\sqrt[4]{x^3}(2\sqrt[4]{x})}=\frac{9}{4}$$

تغییر متغیر

هنگامی که بتوان کل ضابطهٔ حدی را برحسب یک عبارت مشترک نوشت، می‌توان از تغییر متغیر کمک گرفت. فقط حواستان باشد که متغیر جدید به چه عددی میل می‌کند.

تست

حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ گزینهٔ ۱ می‌توان $x-1=t^{12}\xrightarrow[t\to 1]{x\to 2}1$ را در نظر گرفت و نوشت:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^4-t^6}{t^3-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{t\to 1}\frac{4t^3-6t^5}{3t^2}=-\frac{2}{3}$$

۱۷۲۶. حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}\frac{\sqrt{4x^2-4x+1}\left(\left[\frac{1}{x}\right]+\left[-\frac{1}{x}\right]\right)}{1-2x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

۱۷۲۷. اگر $f(x)=(\frac{-1+x}{1+x})^2$ و $f(x)=xg(x)+1$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -4 ۴) -2

۱۷۲۸. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+8}}{2x^2-x-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۷۲۹. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{2x+4}-\sqrt[3]{8}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

۱۷۳۰. حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x+6}}-2}{x^2-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{148}$ ۲) $\frac{1}{110}$ ۳) $\frac{1}{122}$ ۴) $\frac{1}{144}$

۱۷۳۱. اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+\sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x}=2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۳)

۱) -2 ۲) -4 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۷۳۲. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-\left[4x-x^2\right]-5}{\sqrt[3]{10-x}-2}$ کدام است؟

۱) -96 ۲) -46 ۳) -94 ۴) -44

۱۷۳۳. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-\sqrt{2x}}{x-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

۱۷۳۴. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x-2}{\sqrt[3]{x^2-4}+x^2-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ ۴) صفر

۱۷۳۵. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sin^2\pi x}{[x]+\cos\pi x}$ کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) π ۴) 2π

۱۷۳۶. حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sin 4x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

۱۷۳۷. حاصل $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x}{\sin 16x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{16}$

۱۷۳۸. حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos 2x+\sin x-1}{\sin 2x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -1

۱۷۳۹. حاصل $\lim\limits_{x\to-\frac{3\pi}{4}}\frac{\cot x-\tan x}{\tan 4x}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) -1 ۴) ۱

۱۷۴۰. حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{\sin 2x-1}{|\sin x-\cos x|}$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) صفر ۴) ∞

۱۷۴۱. حاصل $\lim\limits_{x\to-\frac{5\pi}{4}}\frac{\cos x\cos 2x\cos 4x}{\cos^8 x-\sin^8 x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۱۷۴۲. حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۷۴۳. حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\log_2 x\log_2\frac{x}{8}+2}{\log_2\frac{x}{4}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -1

۱۷۴۴. حاصل $\lim\limits_{x\to\log_2 3}\frac{4^x-2^{x+1}-3}{3\times 2^x-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

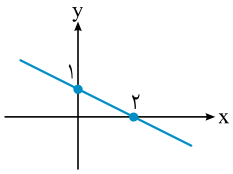
۱۷۴۵. اگر $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+ax+b}{2x^2-x-10}=3$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -48 ۲) -23 ۳) -50 ۴) -27

۱۷۴۶. اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+a}}{x^2-9}=b$ باشد، مقدار b کدام است؟

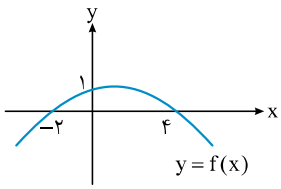
۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{18}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۱۷۴۷. اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-4}\frac{f^2(x)-2f(x)-3}{2f^{-1}(x)-20}$ کدام است؟



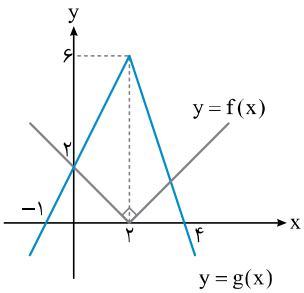
۱) صفر
۲) ۰/۵
۳) ۰/۲۵
۴) ۰/۷۵

۱۷۴۸. با توجه به سهمی مقابل، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x)+x^2-x-2}{f(x-2)}$ کدام است؟



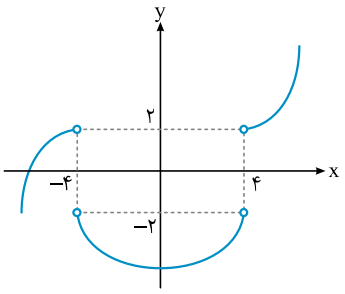
۱) $-\frac{2}{3}$
۲) $-\frac{4}{3}$
۳) $-\frac{5}{3}$
۴) $-\frac{1}{3}$

۱۷۴۹. اگر نمودار f و g به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(6-2x)}{\sqrt{g(x)}-\sqrt{6}}$ کدام است؟



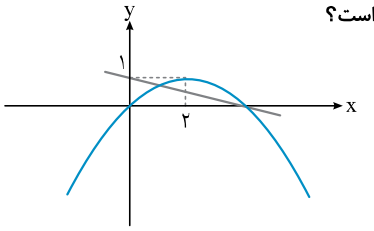
۱) $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$
۲) $\frac{4\sqrt{6}}{4}$
۳) $-\frac{4\sqrt{6}}{3}$
۴) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

۱۷۵۰. اگر نمودار $y = f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{2f^2(x)-3f(x)-2}{\sqrt{f(x)}-\sqrt{2}}$ کدام است؟



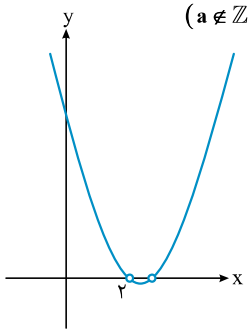
۱) $4\sqrt{2}$
۲) $5\sqrt{2}$
۳) $8\sqrt{2}$
۴) $10\sqrt{2}$

۱۷۵۱. نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{f(x)+g(x)}{4-x}$ کدام است؟



۱) $-\frac{3}{2}$
۲) $-\frac{5}{4}$
۳) $\frac{5}{4}$
۴) $\frac{3}{2}$

۱۷۵۲. اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3+bx^2+15x+c}{x-2}$ به‌صورت زیر باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$، مقدار a کدام است؟ $(a\notin\mathbb{Z})$



۱) ۲/۲۵
۲) ۲/۵
۳) ۲/۷۵
۴) ۳

قاعدهٔ هوپیتال

۱۷۵۳. حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^5-10x^2+8}{x^4-16}$ کدام است؟

۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۱/۷۵
۴) ۱

۱۷۵۴. حد عبارت $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$ وقتی $x\to -8$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) -24
۲) -18
۳) -12
۴) -6

۱۷۵۵. حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $-1/5$
۲) $-1/2$
۳) $-0/8$
۴) $-0/6$

۱۷۵۶. حد عبارت $\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$ وقتی $x\to 2$ کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۹۸)

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $-\frac{1}{6}$
۴) $-\frac{1}{8}$

۱۷۵۷. حاصل $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) ۳
۲) $\frac{1}{2}$
۳) -2
۴) $-\frac{3}{2}$

۱۷۵۸. حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-\sqrt{2x}}{x-2}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{12}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $-\frac{1}{4}$
۴) $-\frac{1}{6}$

۱۷۵۹. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x+\sqrt{4x+1}}-\sqrt{\frac{5}{2}x}}{x^2+|x-2|-4}$ چند برابر $\sqrt{5}$ است؟

۱) $-\frac{1}{18}$ ۲) $-\frac{1}{36}$ ۳) $-\frac{1}{30}$ ۴) $-\frac{1}{42}$

۱۷۶۰. حاصل $\lim\limits_{x\to -\pi}\frac{\sin 2x-\cos 4x+1}{\sin x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -4 ۴) -2

۱۷۶۱. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(\frac{\pi x}{8})(\sqrt{x^2+x+2}-2\sqrt{2})}{\sqrt{x^2+5}(x^2-4)}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{84}$ ۲) $\frac{5}{96}$ ۳) $\frac{5}{62}$ ۴) $\frac{5}{48}$

۱۷۶۲. اگر $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}$ کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۷۶۳. اگر $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-27}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\frac{2x+\sqrt{f(x)}}{|x^2+x-6|}$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $-0/3$ ۲) $-0/6$ ۳) $0/3$ ۴) $0/6$

۱۷۶۴. حاصل $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x-[x]}{x^4-4x^2-45}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{21}$ ۲) $\frac{1}{168}$ ۳) $\frac{1}{42}$ ۴) $\frac{1}{84}$

۱۷۶۵. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{7+\sqrt{x+2}}-\sqrt[3]{29-x}}{\left[-\frac{4}{x}\right]+x}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{104}$ ۲) $\frac{5}{106}$ ۳) $\frac{5}{108}$ ۴) $\frac{17}{216}$

۱۷۶۶. حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{3})^-}\frac{[3\cot^2\pi x]-3x}{\sqrt{3x-1}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) -2 ۴) ∞

۱۷۶۷. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{|x^3-3x^2+2|}{\sqrt{4x+4}-\sqrt{8}}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $-2\sqrt{2}$ ۴) $-3\sqrt{2}$

۱۷۶۸. اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+3}-\sqrt{x-2a}}{x^2-(1+a)x+a}=L$ باشد، مقدار L کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{21}}{14}$ ۲) $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ ۳) $-\frac{\sqrt{21}}{21}$ ۴) $-\frac{\sqrt{21}}{28}$

۱۷۶۹. مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to 8}\frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2b}{ax-b}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۲)

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{48}$ ۴) $\frac{1}{24}$

۱۷۷۰. اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^4+ax^2+bx+c}=5$ باشد، مقدار c کدام است؟

۱) $-2/8$ ۲) $0/2$ ۳) $0/1$ ۴) $-2/5$

۱۷۷۱. حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x\cos(\frac{x}{2})}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $0/5$ ۲) $3/5$ ۳) $2/5$ ۴) $1/5$

۱۷۷۲. حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)\cdots(\sqrt[50]{x}-1)}{(x-1)^{50}}$ کدام است؟

۱) $\frac{50!}{50}$ ۲) $\frac{50}{50!}$ ۳) $\frac{1}{50!}$ ۴) $\frac{1}{50\times 50!}$

۱۷۷۳. حاصل $\lim_{x\to \pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 17x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{17}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{34}$ ۳) $-\frac{1}{17}$ ۴) $-\frac{1}{34}$

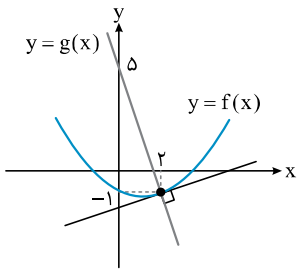
۱۷۷۴. حاصل $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^-}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\cos 2x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۷۷۵. حاصل $\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{\sqrt{x+3}-2}$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -6 ۳) -7 ۴) -4

۱۷۷۶. اگر نمودار سهمی f و خط g به‌صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt[3]{x+6}-2}$ کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۳۰
۴۰ (۳
۵۰ (۴

هم‌ارزی

۱۷۷۷. حاصل $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x}}+(x+1)^3-1}{\sqrt{4x+\sqrt{x}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) $\sqrt{3}$

۱۷۷۸. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt[3]{x}}{kx^n}=4$ است. حاصل $4k-3n$ کدام است؟

۱) $-\frac{7}{3}$ ۲) -3 ۳) $-\frac{11}{3}$ ۴) $-\frac{10}{3}$

۱۷۷۹. حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{(2x-3)^3+27-54x}{\sqrt[3]{1+3x^2}-\sqrt{1-x^2}}$ کدام است؟

۱) -12 ۲) -24 ۳) -36 ۴) -18

۱۷۸۰. حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{9+9x}-\sqrt{9-27x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{24}$

۱۷۸۱. حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt{1+8x}-1}{(2x+3)^3-27}$ کدام است؟

۱) ۵/۴ ۲) $(5/4)^{-1}$ ۳) ۱۰/۸ ۴) $(10/8)^{-1}$

۱۷۸۲. حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+100x)-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ کدام است؟

۱) ۱۵۰۱۵ ۲) ۱۵۵۰ ۳) ۱۵۱۵۰ ۴) ۱۵۰۰

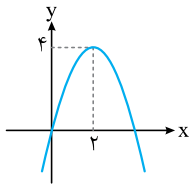
۱۷۸۳. حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 4x}$ معکوس و قرینهٔ کدام عدد زیر است؟

۱) ۱۹۲ ۲) ۱۹۰ ۳) ۱۹۴ ۴) ۱۹۶

با به دست آمدن $a=-۱$ و $b+c=۴$ برای $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{b+c}{a}=\frac{۴}{-۱}=-۴$$

۱۷۳۲. گزینهٔ ۱ ابتدا عدد جزءصحیح را مشخص می‌کنیم. تابع $y=۴x-x^۲$ نموداری به‌صورت زیر دارد و از هر دو طرف که به $x=۲$ نزدیک می‌شویم، تابع با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود و $\left[۴^-\right]=۳$ است، بنابراین: $\left[۴x-x^۲\right]=\left[۴^-\right]=۳$



$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۲-\left[۴x-x^۲\right]-۵}{\sqrt[۳]{۱۰-x}-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۲-۸}{\sqrt[۳]{۱۰-x}-۲}=\frac{۰}{۰}$$

صورت و مخرج کسر را در چاق مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲(x-۲)(x+۲)(\sqrt[۳]{(۱۰-x)^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{۱۰-x})}{-(x-۲)}=\frac{۲\times ۴\times ۱۲}{-۱}=-۹۶$$

۱۷۳۳. گزینهٔ ۲

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{۴x}-\sqrt{۲x}}{x-۲}=\frac{۰}{۰}$$

صورت و مخرج کسر را در چاق صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۴x-\sqrt{۸x^۳}}{(x-۲)(\sqrt[۳]{(۴x)^۲}+\sqrt{(۲x)^۲}+\sqrt[۳]{۴x}\sqrt{۲x})}=\frac{۰}{۱۲}$$

کسر همچنان $\frac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در $۲+\sqrt{۲x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x(۴-۲x)}{۱۲(x-۲)(۲+\sqrt{۲x})}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۴x}{۱۲(۲+\sqrt{۲x})}=-\frac{۱}{۶}$$

۱۷۳۴. گزینهٔ ۳ حد $\frac{۰}{۰}$ است و ابتدا از صورت و مخرج کسر $(x-۲)^{\frac{۱}{۳}}$ را فاکتور می‌گیریم و با هم ساده می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۱+(x+۱)(x-۲)^{\frac{۲}{۳}}}{\sqrt[۳]{x+۲}+(x+۲)(x-۲)^{\frac{۲}{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$$

۱۷۳۵. گزینهٔ ۲ ابتدا عدد معادل برای جزءصحیح را در سمت راست ۱ مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱-\cos^۲\pi x)}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}(۱-\cos\pi x)=۲$$

۱۷۳۶. گزینهٔ ۳ با توجه به اتحاد $۱+\cos ۲x=۲\cos^۲ x$ داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\sqrt{۲}|\cos x|}{\sin ۴x}=\frac{۰}{۰}$$

داخل قدرمطلق در سمت راست $\frac{\pi}{۲}$، منفی است و قرینه‌اش از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{-\sqrt{۲}\cos x}{\sin ۴x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\sin ۲x=۲\sin x\cos x}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{-\sqrt{۲}\cos x}{۴\sin x\cos x\cos ۲x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{-\sqrt{۲}}{۴\sin x\cos ۲x}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۷۳۷. گزینهٔ ۴

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos^۳ x\sin x-\sin^۳ x\cos x}{\sin ۱۶x}=\frac{۰}{۰}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x\cos x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}{\sin ۱۶x}$$

با کمک گرفتن از دو اتحاد $۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha$ و $\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=\cos ۲\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x}{\sin ۱۶x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۴x}{۲\sin ۸x\cos ۸x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۴x}{۱۶\sin ۴x\cos ۴x\cos ۸x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{۱۶\cos ۴x\cos ۸x}=-\frac{۱}{۱۶}$$

۱۷۳۸. گزینهٔ ۳

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos ۲x+\sin x-۱}{\sin ۲x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow[\sin ۲x=۲\sin x\cos x]{\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x-۲\sin^۲ x}{۲\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{۱-۲\sin x}{۲\cos x}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۷۳۹. گزینهٔ ۳

$$\lim_{x\to-\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\cot x-\tan x}{\tan ۴x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\cot x-\tan x=۲\cot ۲x}\lim_{x\to-\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۲\cot ۲x}{\tan ۴x}$$

تانژانت و کتانژانت را باز می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۲\cos ۴x\cos ۲x}{\sin ۴x\sin ۲x}$$

با کمک اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to-\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۲\cos ۴x\cos ۲x}{۲\sin ۲x\cos ۲x\sin ۲x}=\lim_{x\to-\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\cos ۴x}{\sin^۲ ۲x}=-۱$$

۱۷۴۰. گزینهٔ ۳ ابتدا قدرمطلق را تعیین تکلیف می‌کنیم. از آنجایی که در همسایگی راست $x=\frac{\pi}{۴}$، $\sin x>\cos x$ است، داخل قدرمطلق مثبت است و خود عبارت از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}\frac{\sin ۲x-۱}{\sin x-\cos x}=\frac{۰}{۰}$$

با کمک اتحاد مثلثاتی $۱-\sin ۲x=(\sin x-\cos x)^۲$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}\frac{(\sin x-\cos x)^۲(-۱)}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}(\cos x-\sin x)=۰$$

۱۷۴۱. گزینهٔ ۱

$$\lim_{x\to-\frac{۵\pi}{۴}}\frac{\cos x\cos ۲x\cos ۴x}{\cos^۸ x-\sin^۸ x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{۵}{۴}}\frac{\cos x\cos ۲x\cos ۴x}{(\cos^۲ x-\sin^۲ x)\underbrace{(\cos^۲ x+\sin^۲ x)}_{۱}(\cos^۴ x+\sin^۴ x)}$$

$$\xrightarrow{\cos^۲ x-\sin^۲ x=\cos ۲x}\lim_{x\to-\frac{۵\pi}{۴}}\frac{\cos x\cos ۴x}{\cos^۴ x+\sin^۴ x}=\frac{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-۱)}{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}$$

۱۷۴۲. گزینهٔ ۳

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt[۳]{\cos x}}{\sin^۲ x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در چاق صورت ضرب می‌کنیم.}}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\underbrace{\sin^۲ x}_{۱-\cos^۲ x}(۱+\sqrt[۳]{\cos^۲ x}+\sqrt[۳]{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{(۱+\cos x)(۱+\sqrt[۳]{\cos^۲ x}+\sqrt[۳]{\cos x})}=\frac{۱}{۶}$$

۱۷۴۳. گزینهٔ ۲

$$\lim_{x\to 4}\frac{\log_2 x\log_2\frac{x}{8}+2}{\log_2\frac{x}{4}}=\frac{0}{0}\xrightarrow[\log_a a^n=n]{\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\log_2 x(\log_2 x-3)+2}{\log_2 x-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\log_2 x-2)(\log_2 x-1)}{\log_2 x-2}$$

$$=\lim_{x\to 4}(\log_2 x-1)=2-1=1$$

۱۷۴۴. گزینهٔ ۳ با توجه به خاصیت $a^{\log_a b}=b$ داریم:

$$\lim_{x\to\log_2 3}\frac{4^x-2\times 2^x-3}{3\times 2^x-9}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to\log_2 3}\frac{(2^x-3)(2^x+1)}{3(2^x-3)}$$

$$=\lim_{x\to\log_2 3}\frac{2^x+1}{3}=\frac{2^{\log_2 3}+1}{3}=\frac{3+1}{3}=\frac{4}{3}$$

۱۷۴۵. گزینهٔ ۳ $x=-2$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از آنجایی که حاصل حد، عدد متناهی است، صورت کسر را هم باید صفر کند تا کسر پس از رفع ابهام $\frac{0}{0}$، حدی برابر ۳ داشته باشد، درنتیجه:

۱. $x=-2$ ریشهٔ صورت کسر است: $4-2a+b=0$

۲. با قرار دادن $b=2a-4$ و رفع ابهام، حد تابع را برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+(2a-4)}{2x^2-x-10}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+a-2)}{(x+2)(2x-5)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+a-2}{2x-5}=3\Rightarrow\frac{a-4}{-9}=3\Rightarrow a=-23\xrightarrow{b=2a-4}b=-50$$

۱۷۴۶. گزینهٔ ۲ $x=3$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از آنجایی که حاصل حد، عدد متناهی b است، باید صورت را نیز صفر کند تا پس از رفع ابهام، حدی متناهی داشته باشد، پس:

۱. $x=3$ ریشهٔ صورت کسر است: $\sqrt{16}-\sqrt{3+a}=0\Rightarrow a=13$

۲. با به دست آوردن $a=13$ حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\overbrace{(3x+7)-(x+13)}^{2(x-3)}}{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{x+13})}=b\Rightarrow\frac{2}{(6)(8)}=b\Rightarrow b=\frac{1}{24}$$

۱۷۴۷. گزینهٔ ۲ ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$ و ضابطهٔ f^{-1} به‌صورت $f^{-1}(x)=2-2x$ است. با قرار دادن f و f^{-1} در حد $\lim_{x\to -4}\frac{f^2(x)-2f(x)-3}{2f^{-1}(x)-20}$ داریم:

$$\lim_{x\to -4}\frac{(-\frac{1}{2}x+1)^2-2(-\frac{1}{2}x+1)-3}{2(2-2x)-20}=\lim_{x\to -4}\frac{\frac{1}{4}(x-4)(x+4)}{-4(x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{x-4}{-16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

۱۷۴۸. گزینهٔ ۱ ابتدا معادلهٔ $y=f(x)$ را می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x+2)(x-4)\xrightarrow{f(0)=1}a=-\frac{1}{8}$$

$$f(x)=-\frac{1}{8}(x+2)(x-4)$$

حالا با قرار دادن $f(x)$ و $f(x-2)$ حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}(x+2)(x-4)+x^2-x-2}{-\frac{1}{8}(x)(x-6)}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x}{-\frac{1}{8}(x-6)x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{8}(x-6)}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=-\frac{2}{3}$$

۱۷۴۹. گزینهٔ ۳ از آنجایی که با توجه به نمودار $\lim_{x\to 2}f(x)=0$ و $\lim_{x\to 2}g(x)=6$ است:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(6-2x)}{\sqrt{g(x)}-\sqrt{6}}=\frac{0}{0}$$

حال ضابطهٔ g را در سمت راست $x=2$ و ضابطهٔ f را در سمت چپ $x=2$ می‌نویسیم ($\lim_{x\to 2^+}f(6-2x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)$):

$x=2$ در راست $g(x)$: $\begin{cases}(4,0)\\(2,6)\end{cases}\Rightarrow g(x)=-3x+12$

$x=2$ در چپ $f(x)$: $\begin{cases}(0,2)\\(2,0)\end{cases}\Rightarrow f(x)=-x+2\Rightarrow f(6-2x)=2x-4$

حال با جای‌گذاری در رابطهٔ $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(6-2x)}{\sqrt{g(x)}-\sqrt{6}}$ حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{\sqrt{12-3x}-\sqrt{6}}=\frac{0}{0}\xrightarrow[\text{مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.}]{\text{صورت و مخرج را در}}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)(\overbrace{\sqrt{12-3x}+\sqrt{6}}^{2\sqrt{6}})}{-3(x-2)}=\frac{2(2\sqrt{6})}{-3}=\frac{-4\sqrt{6}}{3}$$

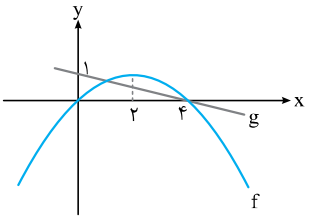
۱۷۵۰. گزینهٔ ۴ از آنجایی که $\lim_{x\to 4^+}f(x)=2$ است، داریم:

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{2f^2(x)-3f(x)-2}{\sqrt{f(x)}-\sqrt{2}}=\frac{0}{0}\xrightarrow[\text{مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.}]{\text{صورت و مخرج کسر را در}}$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(f(x)-2)(2f(x)+1)(\sqrt{f(x)}+\sqrt{2})}{f(x)-2}$$

$$=\lim_{x\to 4^+}(2f(x)+1)(\sqrt{f(x)}+\sqrt{2})=10\sqrt{2}$$

۱۷۵۱. گزینهٔ ۳ با توجه به آنکه در سهمی یک ریشه $x=0$ و طول رأس سهمی $x=2$ است، ریشهٔ دیگر سهمی $x=4$ است:



براساس نمودار رسم‌شده، ضابطهٔ f و g را می‌نویسیم:

$$g(x)=-\frac{1}{4}x+1,\ f(x)=a(x)(x-4)\xrightarrow{f(2)=1}f(x)=-\frac{1}{4}(x^2-4x)$$

با به دست آوردن ضابطه‌های f و g حد داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x^2-4x)-\frac{1}{4}x+1}{4-x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{4-x}$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{4}(x+1)=\frac{5}{4}$$

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می‌توانستید از قاعدهٔ هوپیتال نیز استفاده کنید.

۱۷۵۲. گزینهٔ ۳ از آنجایی که $x=2$ ریشهٔ مخرج f است و با توجه به نمودار، نقطهٔ توخالی $x=2$ است و $\lim_{x\to 2}f(x)=0$، باید در صورت کسر، عامل $(x-2)^2$ حضور داشته باشد، زیرا پس از ساده شدن $(x-2)$ از صورت و مخرج در رفع ابهام همچنان $(x-2)$ در صورت کسر باقی بماند تا پاسخ حد را صفر کند، پس صورت کسر را می‌توان به‌صورت $(x-2)^2(x-\alpha)$ در نظر گرفت که آن را باز کرده و با صورت کسر داده‌شده برابر قرار می‌دهیم:

$$x^3-(\alpha+4)x^2+(4\alpha+4)x-4\alpha=x^3+bx^2+15x+c$$

$$\Rightarrow 4\alpha+4=15\Rightarrow\alpha=\frac{11}{4}=2/75$$

α ریشهٔ دیگر معادله و نقطهٔ دیگری است که حد تابع در آن صفر می‌شود، یعنی $a=\alpha=۲/۷۵$.

۱۷۵۳. گزینهٔ **۱**

$$\lim_{x\to۲}\frac{x^۵-۱۰x^۲+۸}{x^۴-۱۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{۵x^۴-۲۰x}{۴x^۳}=\frac{۸۰-۴۰}{۳۲}$$

$$=\frac{۴۰}{۳۲}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

۱۷۵۴. گزینهٔ **۳**

روش اول: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to-۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{-۶}{\frac{۱}{۲}}=-۱۲$$

روش دوم: حذف عامل صفرشونده:

$$\lim_{x\to-۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}\times\frac{۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}}{۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(x+۸)(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}{۶(۸+x)}$$

$$=\lim_{x\to-۸}\frac{(x+۲)(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}{۶}=\frac{(-۶)(۱۲)}{۶}=-۱۲$$

۱۷۵۵. گزینهٔ **۲**

روش اول: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{۲-\frac{۷}{۲\sqrt{x}}}{۲-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}}=\frac{۲-\frac{۷}{۲}}{۲-\frac{۳}{۴}}$$

$$=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۴}}=-\frac{۶}{۵}=-۱/۲$$

روش دوم: حذف عامل صفرشونده:

عبارت حدی را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{۲x+\sqrt{۳x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{(x-۱)(۴x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(۴x+۱)}=\frac{(-۳)(۴)}{(۲)(۵)}=-\frac{۱۲}{۱۰}=-۱/۲$$

۱۷۵۶. گزینهٔ **۴**

روش اول: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x-۱۸}=\frac{-\frac{۱}{۴}}{۲}=-\frac{۱}{۸}$$

روش دوم: حذف عامل صفرشونده:

عبارت حدی را در چاق صورت کسر، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}\times\frac{۴+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۴+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}}$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{\overbrace{۸-(۳x+۲)}^{-۳(x-۲)}}{(x-۲)(۵x-۸)(۴+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}+۲\sqrt[۳]{۳x+۲})}=\frac{-۳}{(۲)(۱۲)}=-\frac{۱}{۸}$$

۱۷۵۷. گزینهٔ **۴**

روش اول: قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۳x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲x+۳}}-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۴}}}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}$$

$$=\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=-\frac{۳}{۲}$$

روش دوم: حذف عامل صفرشونده:

عبارت حدی را در مزدوج صورت و چاق مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{\overbrace{(۲x+۳)-(۳x+۴)}^{-(x+۱)}}{۱+x}\times\frac{۱+\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}}{\sqrt{۲x+۳}+\sqrt{۳x+۴}}=(-۱)\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۲}$$

۱۷۵۸. گزینهٔ **۴**

$$\lim_{x\to۲}\frac{\sqrt[۳]{۴x}-\sqrt{۲x}}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x)^۲}}-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}}{۱}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۱۲}-\frac{۲}{۴}}{۱}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۶}$$

۱۷۵۹. گزینهٔ **۲** $y=x-۲$ در همسایگی چپ $x=۲$ منفی است و قرینهٔ آن از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$\lim_{x\to۲^-}\frac{\sqrt{x+\sqrt{۴x+۱}}-\sqrt{\frac{۵}{۲}x}}{x^۲-x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲^-}\frac{\frac{۱+\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}}{۲\sqrt{x+\sqrt{۴x+۱}}}-\frac{\frac{۵}{۲}}{۲\sqrt{\frac{۵}{۲}x}}}{۲x-۱}$$

$$=\frac{۱+\frac{۲}{۳}-\frac{۵}{۲}}{۲\sqrt{۵}-۲\sqrt{۵}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۵}}(\frac{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}}{۳})=\frac{\sqrt{۵}}{۲}(\frac{-۱}{۱۸})=-\frac{\sqrt{۵}}{۳۶}$$

۱۷۶۰. گزینهٔ **۴**

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{\sin۲x-\cos۴x+۱}{\sin x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-\pi}\frac{۲\cos۲x+۴\sin۴x}{\cos x}$$

$$=\frac{۲+۰}{-۱}=-۲$$

۱۷۶۱. گزینهٔ **۲**

$$\lim_{x\to۲}\frac{\overbrace{\sin(\frac{\pi x}{۸})}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}(\sqrt{x^۲+x+۲}-۲\sqrt{۲})}{\underbrace{\sqrt{x^۲+۵}}_{۳}(x^۲-۴)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}$$

$$\lim_{x\to۲}\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x+۲}})}{۳(۲x)}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۵}{۴\sqrt{۲}})}{۱۲}=\frac{۵}{۹۶}$$

۱۷۶۲. گزینهٔ **۲** $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{۲x^۲+x-۱}$ را در عبارت حدی $\lim_{x\to۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}$ جایگزین می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{\frac{۲x\sqrt{x}}{۲x^۲+x-۱}-۱}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{۲x\sqrt{x}-(۲x^۲+x-۱)}{۲(x-۱)(۲x^۲+x-۱)}=\frac{۰}{۰}$$

به‌جای $(۲x^۲+x-۱)$ که در مخرج قرار دارد، حد آن را که برابر ۲ است قرار می‌دهیم، سپس از قاعدهٔ هوپیتال برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{۳x^{\frac{۱}{۲}}-(۴x+۱)}{۴}=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۷۶۳. گزینهٔ **۱** اگر $f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۲۷}$ باشد، $f(x)=x^۲+۲۷$ خواهد بود که با جای‌گذاری در عبارت حدی $\lim_{x\to(-۳)^-}\frac{۲x+\sqrt{f(x)}}{|x^۲+x-۶|}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to(-۳)^-}\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۲۷}}{|(x+۳)(x-۲)|}$$

داخل قدرمطلق در همسایگی چپ عدد ۳-، مثبت است و می‌توان عبارت را از قدرمطلق خارج کرد.

روش اول قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2x+\sqrt{x^2+27}}{x^2+x-6}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2+\frac{x}{\sqrt{x^2+27}}}{2x+1}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{2}}{-5}=-\frac{3}{10}$$

روش دوم حذف عامل صفرشونده:

عبارت حدی را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{3x^2-27}{(x^2+x-6)(2x-\sqrt{x^2+27})}\xrightarrow[\text{ساده می‌کنیم.}]{(x+3)\text{ را در صورت و مخرج}}$$

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{3(x-3)}{(x-2)(2x-\sqrt{x^2+27})}=\frac{3(-6)}{(-5)(-12)}=-\frac{3}{10}=-0/3$$

۱۷۶۴. گزینهٔ ۴ ابتدا عدد معادل برای جزءصحیح را جایگزین می‌کنیم:

$$\lim_{x\to3^+}\frac{x-[3^+]}{x^4-4x^2-45}=\lim_{x\to3^+}\frac{x-3}{x^4-4x^2-45}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}$$

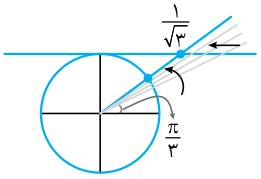
$$\lim_{x\to3^+}\frac{1}{4x^3-8x}=\frac{1}{84}$$

۱۷۶۵. گزینهٔ ۴ ابتدا عدد معادل برای جزءصحیح را مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{7+\sqrt{x+2}}-\sqrt[3]{29-x}}{[\underbrace{-\frac{4}{2^+}}_{(-2)^+}]+x}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{7+\sqrt{x+2}}-\sqrt[3]{29-x}}{x-2}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to2^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2\sqrt{7+\sqrt{x+2}}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(29-x)^2}}}{1}=\frac{\frac{1}{4}}{6}+\frac{1}{27}=\frac{1}{24}+\frac{1}{27}=\frac{17}{216}$$

۱۷۶۶. گزینهٔ ۳ $\cot(\frac{\pi}{3})$ برابر $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است و با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، $\cot(\frac{\pi}{3})^-$ برابر $(\frac{1}{\sqrt{3}})^+$ است:



بنابراین:

$$\lim_{x\to(\frac{1}{3})^-}\frac{[3(\frac{1}{3})^+]-3x}{\sqrt{3x}-1}=\lim_{x\to(\frac{1}{3})^-}\frac{1-3x}{\sqrt{3x}-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to(\frac{1}{3})^-}\frac{-3}{\frac{3}{2\sqrt{3x}}}=-2$$

۱۷۶۷. گزینهٔ ۲ ابتدا قدرمطلق را تعیین تکلیف می‌کنیم:

از آنجایی که تابع $f(x)=x^3-3x^2+2$ در $x=1$ مقداری برابر صفر دارد $f'(x)=3x^2-6x$، پس $f'(1)<0$ است، تابع در $x=1$ نزولی بوده و نموداری به‌صورت زیر دارد و همان‌طور که از نمودار مشخص است، هنگامی که از سمت راست به عدد ۱ نزدیک می‌شویم، تابع با مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود و قرینهٔ آن از قدرمطلق خارج می‌شود:



$$\lim_{x\to1^+}\frac{-x^3+3x^2-2}{\sqrt{4x+4}-\sqrt{8}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to1^+}\frac{6x-3x^2}{\frac{4}{2\sqrt{4x+4}}}=\frac{3}{\frac{2}{\sqrt{8}}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

۱۷۶۸. گزینهٔ ۱ $x=1$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از آنجایی که حاصل حد، متناهی است، نتیجه می‌شود که این نقطه صفرکنندهٔ صورت نیز هست تا حد به حالت $\frac{0}{0}$ بشود و پس از رفع ابهام بتوان حدی متناهی داشت، پس:

۱. $x=1$ ریشهٔ صورت کسر است:

$$\sqrt{a+3}=\sqrt{1-2a}\Rightarrow a+3=1-2a\Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

۲. با جای‌گذاری a و وجود حد $\frac{0}{0}$، از قاعدهٔ هوپیتال کمک می‌گیریم که پاسخ حد یا همان L مشخص شود:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{-\frac{2}{3}x+3}-\sqrt{x+\frac{4}{3}}}{x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to1}\frac{\frac{-\frac{2}{3}}{2\sqrt{-\frac{2}{3}x+3}}-\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{4}{3}}}}{2x-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{-\frac{2}{3}}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}-\frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}(\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}})=\frac{-1}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{21}}{14}$$

۱۷۶۹. گزینهٔ ۲ هنگامی که x به‌سمت ۸ میل می‌کند، صورت کسر به‌سمت صفر می‌رود و از آنجایی که حاصل حد، غیرصفر است، مخرج نیز باید به‌سمت صفر میل کند تا حد $\frac{0}{0}$ بعد از رفع ابهام، حدی مخالف صفر داشته باشد، پس:

$$8a-b=0$$

حالا که حد $\frac{0}{0}$ داریم، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to8}\frac{b\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}}}{a}=\frac{b\times\frac{\frac{1}{12}}{4}}{a}=\frac{b}{48a}$$

از آنجایی که $b=8a$ است، مقدار $\frac{b}{48a}$ برابر خواهد شد با:

$$\frac{b}{48a}=\frac{8a}{48a}=\frac{8}{48}=\frac{1}{6}$$

۱۷۷۰. گزینهٔ ۱ $x=1$ صفرکنندهٔ صورت کسر است و از آنجایی که حاصل حد، مخالف صفر است، متوجه می‌شویم که این نقطه، ریشهٔ مخرج هم باید باشد تا حد داده‌شده به حالت $\frac{0}{0}$ بشود و پس از رفع ابهام، حدی برابر ۵ داشته باشد، پس:

۱. $x=1$ ریشهٔ مخرج است: $1+a+b+c=0$

۲. حالا که حد $\frac{0}{0}$ است، از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{4x^3+2ax+b}=5$$

مجدداً $x=1$ ریشهٔ صورت است و با همان استدلال قبل باید ریشهٔ مخرج باشد:

$$4+2a+b=0$$

۳. مجدداً از قاعدهٔ هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to1}\frac{2}{12x^2+2a}=5\Rightarrow\frac{1}{6+a}=5$$

$$\Rightarrow6+a=\frac{1}{5}\Rightarrow a=-5/8\xrightarrow{4+2a+b=0}b=7/6$$

$$\xrightarrow{1+a+b+c=0}c=-2/8$$

۱۷۷۱. گزینهٔ ۴

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin3x\cos(\frac{x}{2})}{\sin^2x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to\pi}\frac{\sin3x}{\sin x}\times\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin x}=\frac{0}{0}\times\frac{0}{0}$$

به‌جای هر کدام از حدودی که $\frac{0}{0}$ هستند، هوپیتال آن را جایگزین می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to\pi}\frac{3\cos 3x}{\cos x}\times\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{-1}{2}\sin(\frac{x}{2})}{\cos x}=(\frac{-3}{-1})(\frac{-\frac{1}{2}}{-1})=\frac{3}{2}$$

۱۷۷۲. **گزینهٔ ۳** عبارت را به‌صورت حاصل‌ضرب ۵۰ حد $\frac{0}{0}$ می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}\times\cdots\times\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[50]{x}-1}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times\cdots\times\lim_{x\to1}\frac{1}{50\sqrt[50]{x^{49}}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{50}=\frac{1}{50!}$$

دقت کنید که هر حدی که به‌صورت $\lim_{x\to1}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{x-1}$ است، هوپیتالی به‌صورت $\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{1}=\frac{1}{n}$ دارد.

۱۷۷۳. **گزینهٔ ۲**

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 17x}=\frac{0}{0}$$

حد کسر $\frac{0}{0}$ است اما طبق مطالب مطرح‌شده، در ریشه‌های زیر رادیکال اجازهٔ استفاده از قاعدهٔ هوپیتال وجود ندارد، پس ابتدا به دنبال حذف رادیکال هستیم و برای این منظور کافی است صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{1-\cos x}$ ضرب کنیم و یا از اتحاد $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ کمک بگیریم:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 17x}\times\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin 17x\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\pi^+}\frac{|\sin x|}{\sin 17x\underbrace{\sqrt{1-\cos x}}_{\sqrt{2}}}$$

عبارت داخل قدرمطلق در سمت راست $x=\pi$، منفی است و قرینهٔ آن از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sin x}{\sqrt{2}\sin 17x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\cos x}{17\sqrt{2}\cos 17x}=-\frac{1}{17\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{34}$$

۱۷۷۴. **گزینهٔ ۴** از آنجایی که $x=-\frac{\pi}{4}$ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است، اجازهٔ استفاده از هوپیتال را نداریم و ابتدا سعی می‌کنیم حذف رادیکال را انجام دهیم. با کمک اتحاد $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$ داریم:

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^-}\frac{|\sin x+\cos x|}{\cos 2x}$$

در همسایگی چپ $x=-\frac{\pi}{4}$، $|\sin x|>|\cos x|$ و $\sin x+\cos x<0$ است، پس قرینهٔ عبارت داخل قدرمطلق از آن خارج می‌شود:

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^-}\frac{-(\sin x+\cos x)}{\cos 2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^-}\frac{-\cos x+\sin x}{-2\sin 2x}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}}{(-2)\times(-1)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۷۷۵. **گزینهٔ ۱**

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^3+x^2-5x+3}}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{0}{0}$$

حد کسر $\frac{0}{0}$ است اما در این فرم نمی‌توان از قاعدهٔ هوپیتال برای رفع ابهام کمک گرفت، زیرا همان‌طور که گفته شده، در ریشه‌های زیر رادیکال اجازهٔ مشتق‌گیری از تابع را نداریم و ابتدا باید نماد رادیکال از روی عبارت صفرکننده برداشته شود.

از آنجایی که $y=x^3+x^2-5x+3$ در $x=1$ صفر می‌شود، عبارت به $x-1$ بخش‌پذیر است و داریم:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-5x+3 & x-1 \\ -(x^3-x^2) & \hline x^2+2x-3 \\ \hline 2x^2-5x+3 & \\ -(2x^2-2x) & \\ \hline -3x+3 & \\ -(-3x+3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3)$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2(x+3)}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1^-}\frac{\overbrace{-(x-1)}^{}\overbrace{|x-1|}^{}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1^-}\frac{-2(x-1)}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to1^-}\frac{-2}{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}=-8$$

۱۷۷۶. **گزینهٔ ۳** از آنجایی که $f(x)$ و $g(x)$ در $x=2$ مقدار برابر دارند، حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است:

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt[3]{x+6}-2}=\frac{0}{0}$$

حال برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال کمک می‌گیریم:

$$\lim_{x\to2}\frac{f'(x)-g'(x)}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}=\frac{f'(2)-g'(2)}{\frac{1}{12}}=12(f'(2)-g'(2))=12(\frac{1}{3}+3)=40$$

از آنجایی که خط g بر خط مماس تابع f عمود است، شیب‌های این دو خط، معکوس و قرینهٔ یکدیگر هستند، یعنی $g'(2)=\frac{5+1}{-2}=-3\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{3}$.

۱۷۷۷. **گزینهٔ ۲** از آنجایی که x به‌سمت صفر میل می‌کند، کم‌توان صورت و مخرج را جایگزین می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}=2$$

۱۷۷۸. **گزینهٔ ۳** چنانچه از هم‌ارزی کم‌توان بخواهیم استفاده کنیم، در صورت کسر $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}$ را خواهیم داشت و بنابر مطالب گفته‌شده، در این شرایط با ضرب در چاق، تغییر ظاهری در عبارت ایجاد می‌کنیم و مجدداً به سراغ هم‌ارزی کم‌توان می‌رویم:

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+x)-x}{kx^n(\sqrt[3]{(x^2+x)^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^3+x^2}})}=4$$

حالا به سراغ هم‌ارزی کم‌توان می‌رویم:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{kx^n(3x^{\frac{2}{3}})}=4$$

برای آنکه در $x=0$ حدی متناهی و مخالف صفر داشته باشیم، باید xهای صورت و مخرج هم‌توان باشند، بنابراین:

بنابراین:

$$\begin{cases} n+\frac{2}{3}=2\Rightarrow n=\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3k}=4\Rightarrow k=\frac{1}{12}\end{cases}\Rightarrow 4k-3n=\frac{1}{3}-4=-\frac{11}{3}$$

۱۷۷۹. **گزینهٔ ۲** ابتدا با کمک هم‌ارزی برنولی می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to0}\frac{(2x-3)^3+27-54x}{(1+x^2)-(1-\frac{x}{2}^2)}$$

حالا از هم‌ارزی کم‌توان کمک می‌گیریم که داریم:

$$\lim_{x\to0}\frac{-36x^2}{\frac{3x^2}{2}}=-24$$

۱۷۸۰. **گزینهٔ ۳** در مخرج کسر از عدد ۹ زیر رادیکال فاکتور می‌گیریم و سپس از هم‌ارزی برنولی استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{3(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-3x})}=\lim_{x\to0}\frac{x}{3(1+\frac{x}{2}-1+\frac{3x}{2})}=\lim_{x\to0}\frac{x}{3(2x)}=\frac{1}{6}$$