فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

این فصل به دو بخش متفاوت تقسیم میشه!

اولیش، مجموعه‌هـای متناهی، نامتناهی و متمم یک‌مجموعه‌اس.

تـوی ایـن بخـش یـاد می‌گیـری عضوهـای چه مجموعه‌هایی رو بشـمری تموم میشن و کدوم‌ها تموم نمیشـن. همین‌طور یاد می‌گیـری مجموعهٔ مرجع چیـه و اعضایی که متعلق بـه یه مجموعه نیستن کجا قرار می‌گیرن.

دومیش الگو و دنباله‌اس.

توی این بخش یواش‌یـواش یاد می‌گیری چطوری پدیده‌های نظم‌پذیر رو تـوی قالب ریاضی بیاری و رفتارشون رو پیش‌بینی کنی.

آخرش هم با چند تا دنبالهٔ مهم آشنا میشی.



درس ۱ مجموعه‌ها

یادآوری: در سال‌های گذشته با مجموعه‌های مهمی از اعداد مانند اعداد طبیعی و ... آشنا شدید که به‌طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ — مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — مجموعهٔ اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

مجموعهٔ اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'$ = مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد

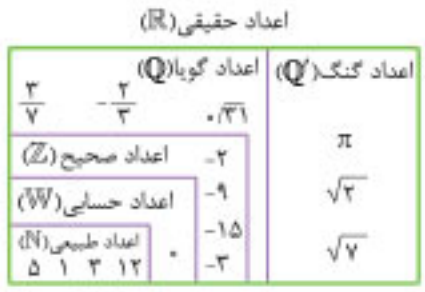
مجموعهٔ اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

نکته: ۱ مجموعهٔ اعداد طبیعی، زیرمجموعهٔ اعداد حسابی و مجموعهٔ اعداد حسابی، خود، زیرمجموعهٔ اعداد صحیح و مجموعهٔ اعداد صحیح، زیرمجموعهٔ اعداد گویا است. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

۲ مجموعهٔ اعداد گویا و گنگ هیچ اشتراکی با هم ندارند ولی هر دو زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$

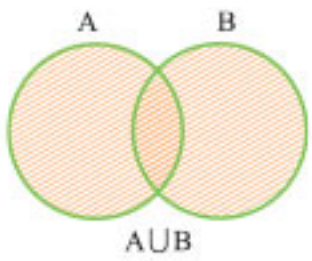
در نمودار زیر، همهٔ مجموعه‌های گفته‌شده در نکته، نشان داده شده و رابطهٔ بین آن‌ها مشخص شده است:





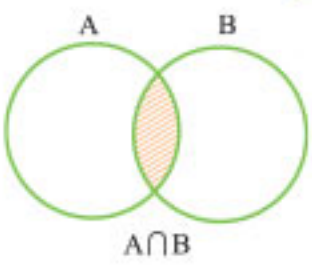
مهم: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی 2^n است.

اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن، عضو مجموعهٔ A **یا** مجموعهٔ B یا عضو هر دوی آن‌ها باشند. اجتماع دو مجموعه را با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهند.

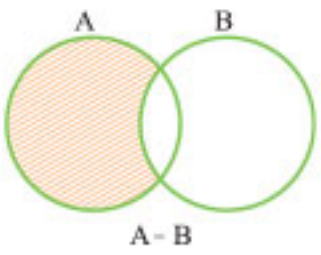
اشتراک دو مجموعه



اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو هر دو مجموعهٔ A **و** B باشند. اشتراک دو مجموعه را با نماد $A \cap B$ نمایش می‌دهند.

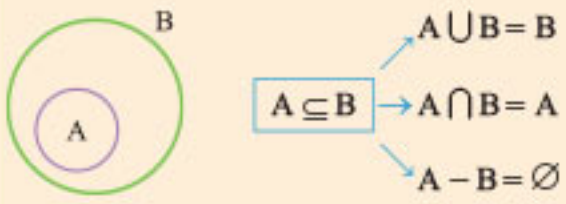
نکته: دو مجموعهٔ A و B را **جدا از هم** گوییم، هرگاه $A \cap B = \varnothing$ باشد.

تفاضل دو مجموعه



مجموعهٔ $A - B$، مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعهٔ A **باشند** ولی عضو مجموعهٔ B **نباشند**.

نکته: با توجه به نمودار مقابل، اگر $A \subseteq B$ باشد، نتایج زیر به‌دست می‌آید:



همین‌طور اگر هر یک از سه نتیجه برقرار باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم $A \subseteq B$.

مهروماه

۴۲. حاصل $(-۱,۲a-۱]\cap[a+۱,۳)$ برابر با یک بازهٔ بسته است. حدود a کدام است؟

۱) $-۱<a<۱$ ۲) $-۲<a<۲$ ۳) $-۱<a<۲$ ۴) نشدنی

۴۳. اگر $A=[b-۱,\frac{c}{۲}]$، $B=[۲,۳a+۱)$، $A\cup B=[-۷,۴)$ و $A\cap B$ یک عضو داشته باشد، $a+b+c$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۲

۴۴. برای چند عدد طبیعی n، بازهٔ $(\frac{n+۳}{n},\frac{۳-n}{۲})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟ (تجربی اردیبهشت ۱۴۰۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

- **مجموعه‌های متناهی:** مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، **مجموعهٔ متناهی** می‌نامیم.
- **مجموعه‌های نامتناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها از هر عددی **بزرگ‌تر** است، مانند مجموعه اعداد صحیح بیش از ۱۰۰، در واقع هر مجموعه‌ای را که **متناهی نباشد**، می‌توان **نامتناهی** در نظر گرفت.

مثال: چند مجموعه از مجموعه‌های زیر، نامتناهی هستند؟

الف) مجموعهٔ اعداد گویای بین صفر و یک
ب) مجموعهٔ اعداد گنگ بین صفر و دو
پ) مجموعهٔ اعداد طبیعی بین صفر و دو
ت) مجموعهٔ اسامی خیابان‌های تهران

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۲» در مورد مجموعهٔ «الف» می‌دانیم بین هر دو عدد گویا، نامتناهی عدد گویا وجود دارد. همین‌طور در مجموعهٔ «ب» هم تعداد اعداد گنگ بین صفر و دو، بی‌نهایت است و قابل شمارش نیست. در مورد مجموعهٔ «پ» تنها عدد طبیعی بین صفر و دو، عدد «۱» است؛ در نتیجه مجموعهٔ «پ» قابل شمارش و متناهی است. مجموعهٔ «ت» که مجموعهٔ اسامی خیابان‌های تهران است، علی‌رغم زیادبودن تعدادشان، پایان‌پذیر و قابل شمارش هستند.
پس گزینهٔ «۲» درست است.

مهم: جدول بررسی اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

تفاضل	اشتراک	اجتماع	انواع مجموعه‌ها
متناهی	متناهی	متناهی	دو مجموعهٔ متناهی
نامتناهی = متناهی − نامتناهی	متناهی	نامتناهی	یک مجموعهٔ متناهی و دیگری نامتناهی
نامعلوم	نامعلوم	نامتناهی	دو مجموعهٔ نامتناهی

مثال: اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، کدام حکم زیر درست است؟

۱) $A\cup B$ متناهی است. ۲) $A\cap B$ نامتناهی است. ۳) $A-B$ متناهی است. ۴) $B-A$ متناهی است.

پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به جدول قبل، $A\cup B$ و $B-A$ نامتناهی هستند، ولی $A\cap B$ و $A-B$ هردو متناهی هستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۵. کدام مجموعه نامتناهی است؟ (مشابه کتاب درسی)

۱) مجموعهٔ اعداد اول چهاررقمی
۲) مجموعهٔ انسان‌هایی که در سال ۱۳۹۹ متولد شده‌اند.
۳) مجموعهٔ تمام دایره‌ها به مرکز (۱,۱)
۴) مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از $۱۰^{۱۰۰}$

۴۶. کدام مجموعه متناهی است؟

۱) مجموعهٔ اعداد گویا بین صفر و یک
۲) مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۰/۱ و ۰/۲
۳) مجموعهٔ اعداد گنگ بین $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$
۴) مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۳

۴۷. چه تعداد از مجموعه‌های زیر، نامتناهی هستند؟

الف) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی ۲۴
ب) مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت ۲
پ) مجموعهٔ اعداد گویا که گنگ نباشند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

مثال: در مرحلهٔ پانزدهم از الگوی زیر، تعداد دایره‌های رنگی کدام است؟



۱) ۵۱
۲) ۵۹
۳) ۵۵
۴) ۶۳

پاسخ گزینهٔ «۴» اگر دایره‌های رنگی را بشماریم، می‌توان به اعداد مقابل دست یافت: ۷, ۱۱, ۱۵, ...

یعنی در هر مرحله، ۴ واحد به تعداد آن‌ها اضافه می‌شود؛ بنابراین برای رسیدن به پانزدهمین مرحله، ۱۴ بار عدد ۴ به عدد اول یعنی ۷ اضافه می‌گردد.

$$7 + (14 \times 4) = 7 + 56 = 63$$

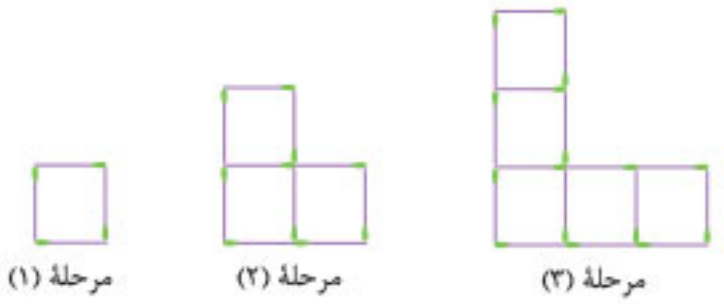
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۹۳. با توجه به الگوی مقابل، در چندمین مرحله تعداد نقاط ۸۲ تا می‌شود؟



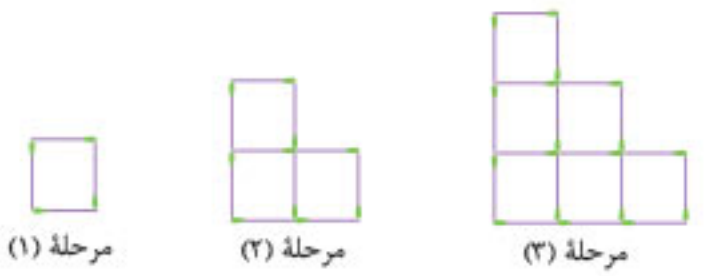
۱) ۲۵
۲) ۲۶
۳) ۲۷
۴) ۲۸

۹۴. تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحلهٔ دهم الگوی مقابل کدام است؟



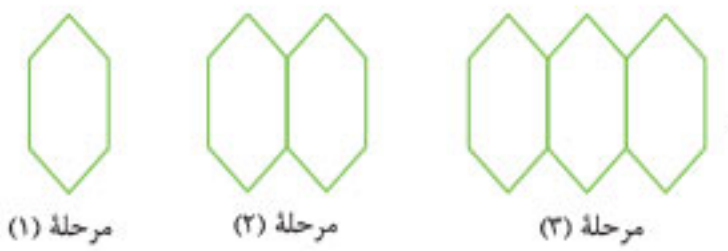
۱) ۵۸
۲) ۶۴
۳) ۷۰
۴) ۷۶

۹۵. با تعدادی چوب‌کبریت مطابق الگوی زیر، اشکالی را می‌سازیم. تعداد چوب‌کبریت‌های استفاده‌شده در مرحلهٔ هفتم کدام است؟



۱) ۵۳
۲) ۵۴
۳) ۶۹
۴) ۷۰

۹۶. با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خط‌ها در مرحلهٔ دهم کدام است؟



۱) ۵۰
۲) ۵۱
۳) ۶۰
۴) ۶۱

۹۷. با توجه به الگوی زیر، تعداد نقاط در مرحلهٔ دهم کدام است؟



۱) ۱۰۰
۲) ۱۲۱
۳) ۸۱
۴) ۱۴۴

الگوهای مهم

الگوی خطی

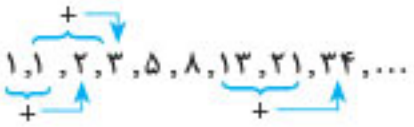


به‌طور کلی الگوهایی را که جملهٔ عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

در این الگوها، **اختلاف** هر دو جملهٔ متوالی، برابر **ضریب** n است؛ مثلاً اختلاف دو جملهٔ متوالی از دنبالهٔ $a_n = 3n - 1$ برابر ۳ است.

دنبالهٔ بازگشتی

دنباله‌ای را که هر جملهٔ آن با **نظم خاصی** از روی جملات قبلی‌اش پیدا شود، **دنبالهٔ بازگشتی** می‌نامند. مشهورترین دنبالهٔ بازگشتی، **دنبالهٔ فیبوناچی** است که در آن دو جملهٔ اول دنباله، یک هستند و از جملهٔ سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید؛ یعنی:



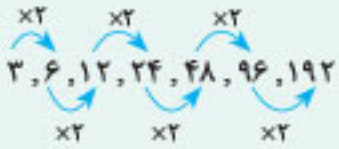
همچنین می‌توان فرمول آن را به‌صورت مقابل نوشت:

$$\begin{cases} t_2 = t_1 = 1 \\ t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \end{cases}$$

مثال: اگر جملات یک دنباله به‌صورت $a_{n+1} = 2a_n$ نوشته شود، در صورتی‌که $a_1 = 3$ باشد، چندمین جمله برابر ۱۹۲ می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ گزینهٔ «۳» این دنباله از جملهٔ اول برابر ۳ شروع می‌شود و هر جمله، ۲ برابر جملهٔ قبلی است. جملات دنباله را می‌نویسیم:



همان‌طور که می‌بینید، جملهٔ هفتم این دنباله برابر ۱۹۲ است.

مطالعهٔ آزاد:



دنبالهٔ فیبوناچی: این اعداد به نام لئوناردو فیبوناچی ریاضی‌دان ایتالیایی نام‌گذاری شده است. وی نخستین ریاضی‌دان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است که بیشتر فعالیت‌هایش از آثار ریاضی‌دان‌های مسلمان به خصوص خوارزمی، کرجی و ابوکامل تأثیر پذیرفته است. در دوران حیات فیبوناچی مسابقات ریاضی در اروپا مرسوم بود. در یکی از همین مسابقات که در سال ۱۲۲۵ در شهر پیزا توسط امپراتور فردریک دوم برگزار شده بود، مسئلهٔ زیر مطرح شد:

«فرض کنیم خرگوش‌هایی وجود دارند که هر جفت (یک نر و ماده) از آن‌ها به سن یک ماهگی رسیده باشند. به ازای هر ماه که از زندگی‌شان سپری شود یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند. حال اگر فرض کنیم این خرگوش‌ها هرگز نمی‌میرند و در آغاز یک جفت از این نوع خرگوش در اختیار داشته باشیم که به تازگی متولد شده‌اند، حساب کنید پس از n ماه چند جفت از این نوع خرگوش خواهیم داشت.» اگر تعداد خرگوش‌ها را در ماه‌های اول، دوم و ... حساب کنیم، به دنبالهٔ فیبوناچی می‌رسیم. فیبوناچی با حل این مسئله و معرفی این دنباله به جهان که خواص شگفت‌انگیزی دارد، تأثیر زیادی بر ریاضی و حتی سایر علوم گذاشت.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۲۴. جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل کدام است؟ $1, -8, 27, -64, \ldots$

۱) $-n^3$ ۲) $(-1)^n n^3$ ۳) $(-1)^{n+1} n^3$ ۴) n^3

۱۲۵. جملهٔ چندم دنبالهٔ $a_n = 3n - 3$ با جملهٔ هفتم دنبالهٔ $b_n = \frac{7n-1}{n+1}$ برابر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۶. حاصل‌ضرب ده جملهٔ اول دنباله با جملهٔ عمومی $t_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{11}$ ۴) $-\frac{1}{11}$

۱۲۷. در دنبالهٔ $t_n = \frac{n}{16} + (-\frac{1}{2})^n$ چند جملهٔ منفی وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

★ ۱۲۸. چند جملهٔ دنبالهٔ $t_n = -2n + 7$ در مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{3 - t_n}{5} < \frac{10}{3}$ قرار می‌گیرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) بی‌شمار

مهروماه

• **روش دوم:** چون تعداد جملات درج شده فرد است، بنابراین جملهٔ وسطی آن‌ها، همان جملهٔ وسط دو عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{22}{3}$ است؛ بنابراین فقط کافی است میانگین این دو عدد را بیابیم.

به همین راحتی! $x=\frac{\frac{22}{3}+\frac{2}{3}}{2}=\frac{\frac{24}{3}}{2}=\frac{8}{2}=4$

نکته: در هر دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات متساوی‌الفاصله از طرفین با هم برابر هستند. اگر تعداد جملات فرد باشد، این مجموع‌ها دو برابر جملهٔ وسطی هستند؛ برای نمونه به دنبالهٔ ۹ جمله‌ای زیر توجه کنید:

$$\underset{t_1}{1},\ \underset{t_2}{5},\ \underset{t_3}{9},\ \underset{t_4}{13},\ \underset{t_5}{17},\ \underset{t_6}{21},\ \underset{t_7}{25},\ \underset{t_8}{29},\ \underset{t_9}{33}$$

$13+21=34$

$9+25=34$

$5+29=34$

$1+33=34$

مجموع جملات متساوی‌الفاصله از طرفین مثلاً مجموع جمله‌های اول از راست و چپ یا مجموع جمله‌های دوم از راست و چپ و... عدد ثابت ۳۴ می‌باشد که دو برابر جملهٔ وسط یعنی ۱۷ است.

این رابطه را به زبان ریاضی به‌صورت زیر بیان می‌کنند:

در دنبالهٔ حسابی اگر مجموع اندیس‌های دو جمله با مجموع اندیس‌های دو جملهٔ دیگر برابر باشند، مجموع زوج جمله‌ها با هم برابرند؛ یعنی به شرط $m+n=p+q$ ، داریم: $t_m+t_n=t_p+t_q$

اگر مجموع اندیس‌های $m+n$ یا $p+q$ دو برابر اندیس k باشد، می‌توان نوشت: $t_m+t_n=2t_k$

در مثال مطرح‌شده داریم: $t_1+t_9=t_2+t_8=2t_5$

مثال: در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم، هفتم و یازدهم دنباله به‌ترتیب $2x-3$ ، $3x+6$ و $6x+1$ هستند. حاصل جمع جملات پنجم و نهم دنباله کدام است؟

۱) ۴۳ ۲) ۵۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

پاسخ گزینهٔ «۲» از آن‌جایی‌که $2(7)=11+3$ ، بنابراین: $t_3+t_{11}=2t_7$

$$(2x-3)+(6x+1)=2(3x+6)\Rightarrow 8x-2=6x+12\Rightarrow 2x=14\Rightarrow x=7$$

بنابراین جملات سوم، هفتم و یازدهم به‌ترتیب ۱۱، ۲۷ و ۴۳ هستند.

از طرفی با توجه به این‌که $11+3=9+5$ ، بنابراین: $t_5+t_9=t_3+t_{11}$

$$\Rightarrow t_5+t_9=11+43\Rightarrow t_5+t_9=54$$

نکته: ۱ اگر به جملات یک دنبالهٔ حسابی، مقدار ثابت k واحد اضافه کنیم، دنبالهٔ حسابی جدیدی با همان قدرنسبت و جملهٔ اول t_1+k تشکیل می‌گردد.

۲ اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی در مقدار ثابت k (با شرط $k\neq 0$) ضرب شوند، دنبالهٔ حسابی جدیدی با قدرنسبت kd و جملهٔ اول ka_1 تشکیل می‌شود.

مثال: یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=7n-5$ مفروض است. اگر به جملهٔ اول و قدرنسبت، هر کدام سه واحد اضافه کنیم تا دنبالهٔ جدیدی به دست آید، جملهٔ پنجم دنبالهٔ جدید کدام است؟

۱) -12 ۲) -15 ۳) -45 ۴) -51

پاسخ گزینهٔ «۲» جملات جدید را با t_n نمایش می‌دهیم. از آن‌جایی‌که جملهٔ اول دنبالهٔ قدیم $(a_1=5-7)$ برابر -2 و قدرنسبت دنبالهٔ قدیم هم -7 یعنی ضریب n در فرمول $a_n=7n-5$ است، جملهٔ اول دنبالهٔ جدید $t_1=-2+3=1$ و قدرنسبت آن $d=-7+3=-4$ می‌شود، پس: $t_5=t_1+(5-1)d=1+4(-4)=1-16=-15$

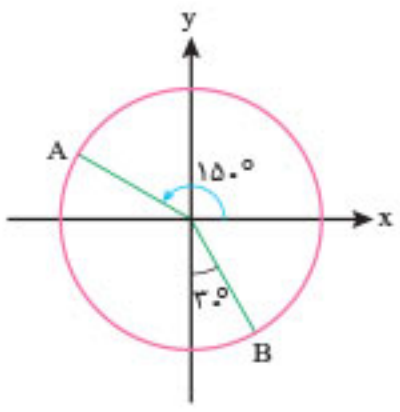
فصل ۲

مثلثات

این فصل با یکی از مهم‌ترین، چالشـــی‌ترین و قدیمی‌ترین مطالب ریاضی آشنات می‌کنه! البته نترس 😀 بخش سخت مثلثات توی کتاب امسال نیست! توی این فصل یاد می‌گیری چطور طول اضلاع یه مثلث قائم‌الزاویه رو به کمک زاویه‌هاشـــون پیدا کنی! یاد می‌گیری ســـینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت چیه! همین‌طور یـــاد می‌گیری چطوری ارتفاع چیزی رو کـــه بهش دسترســـی نداری، پیدا کنـــی. از این به بعـــد، مثلثات جزء جدایی‌ناپذیر ریاضی میشه؛ پس سعی کن باهاش دوست باشی!



۲۷۶. در دایرهٔ مثلثاتی مقابل، شیب خط AB کدام است؟



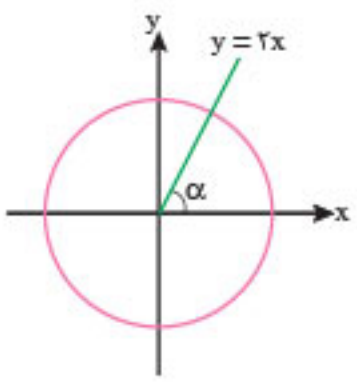
۱) ۱

۲) -۱

۳) $-\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$

۲۷۷. با توجه به شکل مقابل، حاصل عبارت $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ کدام است؟



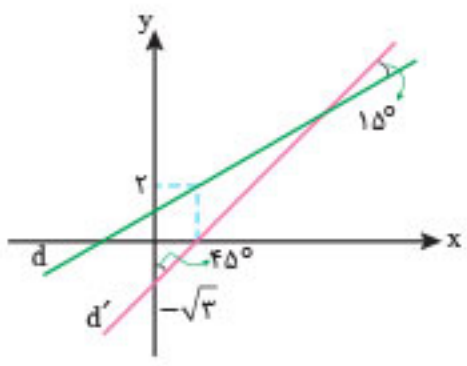
۱) ۳

۲) -۳

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $-\sqrt{۳}$

۲۷۸. با توجه به شکل مقابل، عرض‌ازمبدأ خط d کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

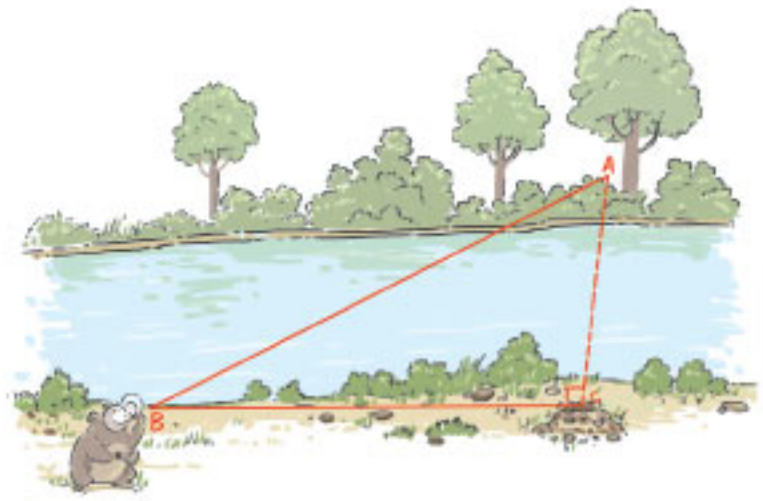
۳) ۱

۴) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$

۲۷۹. خطی با معادلهٔ $(۲k+۳)x-(۵-k)y-۷۸=۰$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد. مجموع مقادیر k، عرض‌ازمبدأ و شیب در این خط کدام است؟

۱) -۱۵ ۲) -۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۱

درس ۳ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی



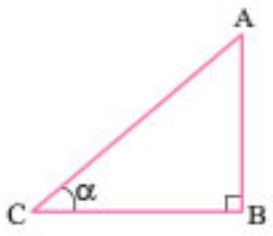
در این بخش می‌خواهیم روابطی را که بین نسبت‌های مثلثاتی وجود دارد بررسی کنیم.

اولین و مهم‌ترین رابطهٔ بین نسبت‌های مثلثاتی، رابطهٔ زیر است:

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر بگیرید:



$$\left.\begin{matrix}\sin\alpha=\frac{AB}{AC}\\ \cos\alpha=\frac{BC}{AC}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=\frac{AB^۲}{AC^۲}+\frac{BC^۲}{AC^۲}=\frac{AB^۲+BC^۲}{AC^۲}=\frac{AC^۲}{AC^۲}=۱$$

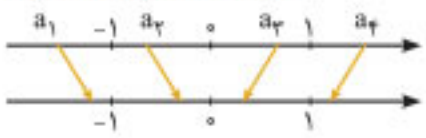
۳۸۵. اگر $0<a<1$ باشد، در بین اعداد زیر بزرگ‌ترین عدد کدام است؟

۱) $\sqrt[5]{a}$ ۲) a^5 ۳) $\frac{1}{a^5}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt[5]{a}}$

۳۸۶. اگر $0<a<1$ باشد، فاصلهٔ کدام عدد از صفر کمتر است؟

۱) $a^2\sqrt{a}$ ۲) $\frac{1}{a}$ ۳) $a\sqrt[3]{a}$ ۴) $\sqrt[5]{a}$

۳۸۷. هریک از اعداد مشخص‌شده روی محور بالا، به یکی از نقاط مشخص‌شـــده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ پنجم آن عدد است، وصل شده است. کدام مورد نادرست وصل شده است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) a_4 و a_2 ۲) a_2 و a_1

۳) a_2 و a_3 ۴) a_4 و a_1

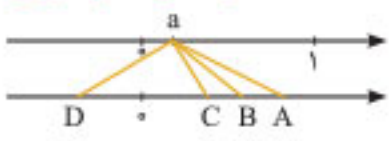
۳۸۸. در شکل زیر، نقطه‌ای بزرگ‌تر از یک از محور بالا به ریشه‌های ســـوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. A ، B ، C و D به‌ترتیب از راست به چپ برابر کدام گزینه است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) $-B, \sqrt[5]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[3]{a}$ ۲) $-B, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}$

۳) $-C, \sqrt[5]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[3]{a}$ ۴) $-C, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}$

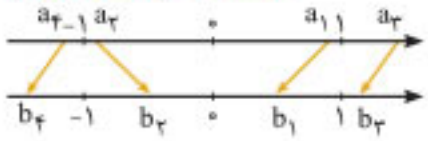
۳۸۹. در شکل زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های ســـوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. A ، B ، C و D به‌ترتیب از راست به چپ برابر کدام گزینه است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



۱) $-B, \sqrt[5]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[3]{a}$ ۲) $-B, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}$

۳) $-C, \sqrt[5]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[3]{a}$ ۴) $-C, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}$

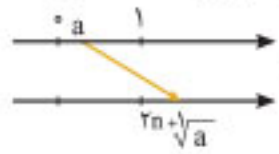
۳۹۰. در شکل زیر، هر یک از اعداد روی محور بالا به یکی از نقاط مشخص‌شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن است، وصل شده‌اند. چند تا از پیکان‌ها نادرست است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

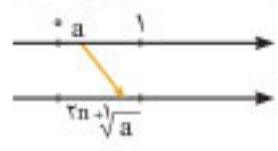


۱) ۱ ۲) ۲

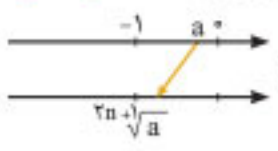
۳) ۳ ۴) ۴

۳۹۱. با فرض $\sqrt[n]{a^n}=a$ و $a^4<a^2$، آن‌گاه $\sqrt[2n+1]{a}$ روی محور طول‌ها چه وضعیتی نسبت به a دارد؟ ($n\geq 2$ و زوج) (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۹۲. چند مورد از مقایسه‌های زیر صحیح است؟

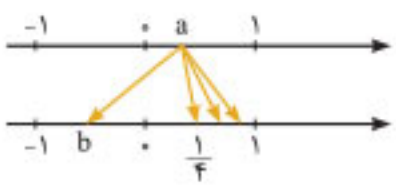
الف) $-3\sqrt[4]{3}>-2\sqrt[4]{2}$ ب) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2}}<\sqrt[6]{10}$ پ) $\sqrt[6]{4}>\sqrt[9]{8}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۹۳. اگر $0<a<1$ باشد، حاصل $A=|a-\sqrt{a}|-|a-\sqrt[3]{a}|+|\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}|$ کدام است؟

۱) $2a$ ۲) $2\sqrt[3]{a}$ ۳) $2\sqrt{a}$ ۴) صفر

۳۹۴. در شکل زیر، عدد a را به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم آن وصل کرده‌ایم. مقدار b کدام است؟



۱) $-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt[4]{4}}{4}$

۳) $-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt[4]{2}}{8}$

توان و رادیکال

روابط توان‌های صحیح زیر را به خاطر بسپارید:

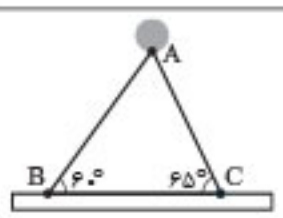
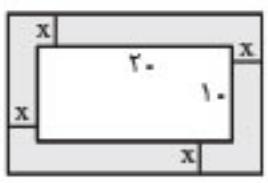
۱) $a^0=1$ ۲) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}, a\neq 0$ ۳) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

۴) $a^m\div a^n=a^{m-n}, a\neq 0$ ۵) $a^m\times b^m=(ab)^m$ ۶) $a^m\div b^m=(\frac{a}{b})^m, b\neq 0$

۷) $(a^m)^n=a^{mn}$

مهروماه

۱	سؤالات امتحانی شبه نهایی ـ نوبت دوم		اردیبهشت ۱۴۰۳
	درس: ریاضی ۱ (دهم)	رشته: ریاضی و فیزیک ـ علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ: ۱۴۰۳/۰۲/۰۱

ردیف	سؤالات	نمره
۱	در هر یک از عبارت‌های زیر، پاسخ صحیح را از بین پاسخ‌های داخل پرانتز انتخاب کنید و در پاسخ‌نامه بنویسید. الف) مجموعهٔ تهی، یک مجموعهٔ ..... است. (نامتناهی ـ متناهی) ب) جملهٔ ششم الگوی $۵,۸,۱۳,۲۰,\ldots$ برابر ..... است. (۴۰ ـ ۳۶) پ) واسطهٔ هندسی بین دو عدد ۸ و ۱۸ برابر ..... است. (۱۳ ـ ۱۲) ت) اگر $\sin\theta$ مثبت و $\cos\theta$ منفی باشد، زاویهٔ θ در ربع ..... دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. (دوم ـ چهارم) ث) اگر a و b دو عدد مثبت باشند، تساوی ..... همواره درست است. ($\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ـ $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$)	۱/۲۵
۲	در هر مورد، جای خالی را با یک کلمه یا عدد مناسب، کامل کنید. الف) طول بازهٔ $(-۳,۷)$ برابر ..... است. ب) نمایش $\sqrt{(-۷)^۲}$ را به‌صورت عدد صحیح ..... می‌توان نوشت. پ) کسر $\frac{\sin ۳۸^\circ}{\cos ۳۸^\circ}$ برابر(° _) cot است. ت) اگر α زاویه‌ای باشد که یک خط، با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه شیب خط برابر ..... است. ث) برای عدد صفر، فاکتوریل به‌صورت ... =!۰ تعریف می‌شود.	۱/۲۵
۳	دنبالهٔ حسابی روبه‌رو را در نظر بگیرید. $۸,۵,۲,\ldots$ جملهٔ پانزدهم این دنباله را به کمک جملهٔ عمومی، به دست آورید.	۱
۴	در یک کلاس ۳۷ نفری، ۱۷ نفر عضو گروه آموزشی و ۲۵ نفر عضو گروه فرهنگی هستند. اگر ۳ نفر عضو هیچ‌یک از این دو گروه نباشند، تعیین کنید چند نفر هم عضو گروه آموزشی و هم عضو گروه فرهنگی هستند.	۱
۵	مطابق شکل مقابل، یک بالن توسط دو طناب AB و AC، به زمین بسته شده است. اگر طول طناب AB برابر ۳۶ متر باشد، با توجه به شکل، ابتدا ارتفاع بالن را تعیین و سپس طول طناب AC را محاسبه کنید. $(\sin ۶۵^\circ \simeq ۰/۹)$ 	۱/۵
۶	با فرض بامعنی‌بودن عبارت مقابل، حاصل آن را محاسبه کنید. $\frac{\sin x-\sin^۳ x}{\cos^۳ x}\times\cot x$	۱/۲۵
۷	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $۵\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}-(۸^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۲}{۳}}$	۱
۸	مخرج کسر روبه‌رو را گویا کنید. $\frac{۶}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}$	۱
۹	کسر $\frac{x^۲-۵xy+۶y^۲}{x^۲-۴y^۲}$ را تا حد امکان ساده کنید.	۱
۱۰	به کمک تشکیل معادله و حل آن، مسئلهٔ زیر را حل کنید. یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۲۰ سانتی‌متر، درون یک قاب با مساحت ۶۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب‌عکس را پیدا کنید. 	۱/۵
۱۱	نامعادلهٔ مقابل را به روش تعیین علامت حل کنید. $\frac{۳-x}{۴+۲x}>۰$	۱
۱۲	نمودار سهمی به معادلهٔ $y=۶x-x^۲$ را رسم کنید.	۱
۱۳	الف) تابعی مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند، ولی همانی نباشد. ب) نمودار تابع f یک خط راست موازی محور x ها است و $f(۵)=۴$. اگر نمودار تابع g نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد، آن‌گاه حاصل $۲f(۹)-g(۸)$ را محاسبه کنید. (دلیل خود را به‌طور کامل بنویسید)	۱/۲۵

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

سؤال	گزینه
۱۹۶	۲
۱۹۷	۴
۱۹۸	۴
۱۹۹	۴
۲۰۰	۲
۲۰۱	۳
۲۰۲	۲
۲۰۳	۱
۲۰۴	۱
۲۰۵	۳
۲۰۶	۱
۲۰۷	۱
۲۰۸	۲
۲۰۹	۴
۲۱۰	۲
۲۱۱	۲
۲۱۲	۴
۲۱۳	۳
۲۱۴	۱
۲۱۵	۲
۲۱۶	۴
۲۱۷	۴
۲۱۸	۳
۲۱۹	۳
۲۲۰	۱
۲۲۱	۴
۲۲۲	۴
۲۲۳	۴
۲۲۴	۲
۲۲۵	۳
۲۲۶	۳
۲۲۷	۱
۲۲۸	۴
۲۲۹	۳
۲۳۰	۲
۲۳۱	۲
۲۳۲	۴
۲۳۳	۲
۲۳۴	۲

سؤال	گزینه
۱۵۷	۱
۱۵۸	۲
۱۵۹	۲
۱۶۰	۲
۱۶۱	۱
۱۶۲	۳
۱۶۳	۴
۱۶۴	۱
۱۶۵	۳
۱۶۶	۳
۱۶۷	۱
۱۶۸	۴
۱۶۹	۲
۱۷۰	۲
۱۷۱	۴
۱۷۲	۴
۱۷۳	۳
۱۷۴	۳
۱۷۵	۲
۱۷۶	۱
۱۷۷	۱
۱۷۸	۴
۱۷۹	۴
۱۸۰	۳
۱۸۱	۴
۱۸۲	۱
۱۸۳	۳
۱۸۴	۳
۱۸۵	۴
۱۸۶	۲
۱۸۷	۴
۱۸۸	۳
۱۸۹	۱
۱۹۰	۴
۱۹۱	۳
۱۹۲	۱
۱۹۳	۲
۱۹۴	۴
۱۹۵	۲

سؤال	گزینه
۱۱۸	۳
۱۱۹	۳
۱۲۰	۱
۱۲۱	۳
۱۲۲	۴
۱۲۳	۴
۱۲۴	۳
۱۲۵	۱
۱۲۶	۴
۱۲۷	۳
۱۲۸	۱
۱۲۹	۲
۱۳۰	۲
۱۳۱	۴
۱۳۲	۴
۱۳۳	۴
۱۳۴	۴
۱۳۵	۱
۱۳۶	۳
۱۳۷	۱
۱۳۸	۲
۱۳۹	۱
۱۴۰	۳
۱۴۱	۲
۱۴۲	۳
۱۴۳	۳
۱۴۴	۳
۱۴۵	۳
۱۴۶	۴
۱۴۷	۲
۱۴۸	۲
۱۴۹	۱
۱۵۰	۲
۱۵۱	۴
۱۵۲	۳
۱۵۳	۲
۱۵۴	۲
۱۵۵	۳
۱۵۶	۲

سؤال	گزینه
۷۹	۱
۸۰	۲
۸۱	۳
۸۲	۴
۸۳	۴
۸۴	۲
۸۵	۱
۸۶	۴
۸۷	۴
۸۸	۴
۸۹	۴
۹۰	۳
۹۱	۴
۹۲	۴
۹۳	۳
۹۴	۱
۹۵	۴
۹۶	۲
۹۷	۲
۹۸	۲
۹۹	۲
۱۰۰	۴
۱۰۱	۱
۱۰۲	۲
۱۰۳	۱
۱۰۴	۳
۱۰۵	۲
۱۰۶	۳
۱۰۷	۳
۱۰۸	۴
۱۰۹	۳
۱۱۰	۴
۱۱۱	۴
۱۱۲	۳
۱۱۳	۱
۱۱۴	۳
۱۱۵	۲
۱۱۶	۳
۱۱۷	۲

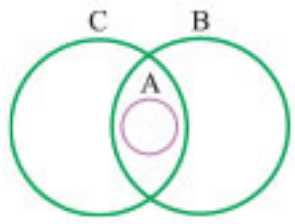
سؤال	گزینه
۴۰	۲
۴۱	۳
۴۲	۴
۴۳	۱
۴۴	۱
۴۵	۳
۴۶	۴
۴۷	۳
۴۸	۳
۴۹	۱
۵۰	۴
۵۱	۴
۵۲	۴
۵۳	۳
۵۴	۳
۵۵	۲
۵۶	۱
۵۷	۲
۵۸	۱
۵۹	۴
۶۰	۲
۶۱	۴
۶۲	۱
۶۳	۴
۶۴	۴
۶۵	۳
۶۶	۲
۶۷	۴
۶۸	۱
۶۹	۳
۷۰	۱
۷۱	۲
۷۲	۴
۷۳	۴
۷۴	۱
۷۵	۲
۷۶	۴
۷۷	۳
۷۸	۳

مهروماه

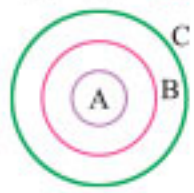
۱۶. **گزینه ۴** چون $A-B=\varnothing$، پس $A\subseteq B$ است و چون $A-C=\varnothing$، پس $A\subseteq C$ است، یعنی A همزمان، زیرمجموعهٔ B و C است.
این اتفاق در ۴ حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

• **حالت اول:** $A=B=C$ باشد.

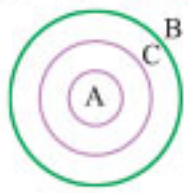
• **حالت دوم:** A در قسمت اشتراک B و C باشد.



• **حالت سوم:** $A\subseteq B\subseteq C$ باشد.



• **حالت چهارم:** $A\subseteq C\subseteq B$ باشد.



در تمام این حالات، تنها گزینه‌ای که همواره صحیح است، گزینهٔ «۴» است، یعنی $B\cap C\neq\varnothing$ است.

۱۷. **گزینه ۴**

راهبرد:

۱ در جبر مجموعه‌ها، معمولاً رابطه‌ها دوطرفه نیستند، یعنی از $A=B$ می‌توان نتیجه گرفت $A\cap C=B\cap C$ ولی برعکس آن می‌تواند برقرار نباشد، یعنی از $A\cap C=B\cap C$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A=B$ است.

۲ از $A=B$ می‌توان نتیجه گرفت $A-C=B-C$ ولی برعکس آن درست نیست، یعنی نمی‌توان از $A-C=B-C$ نتیجه گرفت $A=B$ است.

۳ از $A\subseteq B$ می‌توان نتیجه گرفت $A\cap C\subseteq B\cap C$ ولی برعکس آن درست نیست یعنی نمی‌توان از $A\cap C\subseteq B\cap C$ نتیجه گرفت $A\subseteq B$ است.

در این سؤال نمی‌توان از $A\cap C\subseteq A\cap B$ نتیجه گرفت $C\subseteq B$ است. برای بررسی غلط بودن این رابطه کافی است یک مثال بزنیم. فرض کنید $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{۱,۲,۹\}$ و $C=\{۲,۷\}$ باشد. می‌بینید که:

$$\left.\begin{matrix}A\cap C=\{۲\}\\ A\cap B=\{۱,۲\}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cap C\subseteq A\cap B$$

ولی همان‌طور که می‌بینید $C\subseteq B$ نیست.
با همین مثال می‌توان فهمید که فقط گزینهٔ «۴» برقرار است.

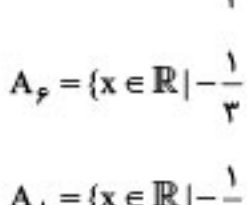
۱۸. **گزینه ۲** با توجه به موضوع اشاره‌شده در راهبرد سؤال قبل می‌توان گفت قسمت «الف» و «پ» درست هستند ولی قسمت‌های «ب» و «ت» درست نیستند، یعنی در مورد $A-B=\varnothing$ نمی‌توان قطعاً گفت $A=B$ است چرا که مثلاً ممکن است $A\subseteq B$ باشد.
همین‌طور از این‌که بخش مشترک A و B با بخش مشترک A و C برابر است نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$ است.

نکته: نمی‌توان از طرفین یک تساوی چیزی را خط زد، یعنی:
$A\cap C=A\cap B\not\Rightarrow C=B$

۱۹. **گزینه ۲** اولاً چون $B\subseteq A$ است، پس $A\cap B=A$ و قطعاً $A-B=\varnothing$ است.
حال حاصل $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing\cup(B-A)$ برابر $B-A$ است.
یعنی به‌طور کلی می‌توان گفت:

$$[\underbrace{(A-B)}_{\varnothing}\cup(B-A)]\cup\underbrace{(A\cap B)}_{A}=\underbrace{(B-A)}_{B-A}\cup A$$

نمودار $B-A$ را رسم می‌کنیم.



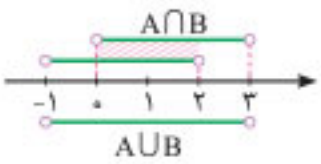
اگر به این هاشورها مجموعهٔ A را بیفزاییم، مجموعهٔ B حاصل می‌شود.

۲۰. **گزینه ۱** از آن‌جایی که اجتماع $B-A$ با A برابر مجموعهٔ A شده است؛ بنابراین $B-A$ باید زیرمجموعهٔ A باشد و این امکان‌پذیر نیست مگر این‌که B زیرمجموعهٔ A باشد، پس $B-A$ برابر تهی است.

۲۱. **گزینه ۱** دقت کنید که $A-B\subseteq A$ است، پس $(A-B)-A=\varnothing$ می‌شود. همین‌طور می‌توان گفت $A\cap B\subseteq A$ است، پس $(A\cap B)-A=\varnothing$ می‌شود؛ بنابراین اجتماع دو مجموعهٔ تهی برابر تهی است.

نکته: همواره اشتراک یا تفاضل یک مجموعه با هر مجموعهٔ دلخواه، زیرمجموعهٔ خودش است، یعنی:
$A\cap X\subseteq A$
$A-X\subseteq A$
(X هر مجموعهٔ دلخواه است.)

۲۲. **گزینه ۲** ابتدا اجتماع و اشتراک دو مجموعه را می‌یابیم. برای این‌کار بهتر است به نمودار محور طول‌ها بپردازیم.



$$A\cap B=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰<x<۲\},\ A\cup B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱<x<۳\}$$

حال کافی است اشتراک را از اجتماع کم کنیم:

$$(A\cup B)-(A\cap B)=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱<x\leq ۰\ \text{یا}\ ۲\leq x<۳\}$$

۲۳. **گزینه ۱** با توجه به تعریف A_n، مجموعه‌های $A_۴$، $A_۵$، ... و $A_۸$ را می‌نویسیم:

$$A_۴=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{۱}{۲}<x<\frac{۱}{۲}\}\qquad A_۵=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{۲}{۵}<x<\frac{۳}{۵}\}$$

$$A_۶=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{۱}{۳}<x<\frac{۲}{۳}\}\qquad A_۷=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{۲}{۷}<x<\frac{۵}{۷}\}$$

$$A_۸=\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{۱}{۴}<x<\frac{۳}{۴}\}$$

برای پیدا کردن اشتراک مجموعه‌های بالا باید از بین نقاط ابتدایی بازه‌ها ($-\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۲}{۵}$، $-\frac{۱}{۳}$، $-\frac{۲}{۷}$ و $-\frac{۱}{۴}$) بزرگ‌ترین مقدار و از بین نقاط انتهایی بازه‌ها ($\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۳}{۴}$) کمترین مقدار را انتخاب کرد.

$$A_۴\cap A_۵\cap A_۶\cap A_۷\cap A_۸=(-\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$$

۲۴. **گزینه ۱** مجموعهٔ $\{-۱,-۳\}$ تنها شامل دو عضو -۱ و -۳ است. بنابراین عدد -۲ در این مجموعه قرار ندارد.

۷۰۳. **گزینه ۴** اگر سهمی، محور طول‌ها را ۲ بار قطع کند، علامت Δ مثبت و اگر سهمی بر محور طول‌ها مماس شود (آن را در یک نقطه قطع کند)، Δ صفر است.

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow m^2 - 4(2)(m+6) \geq 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 \geq 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4) \geq 0 \Rightarrow$$

m		-4		12
$m^2-8m-48$	$+$	0	$-$	0	$+$

مجموعه جواب نامعادله $\{m \geq 12\} \cup \{m \leq -4\}$ است. این مجموعه شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

۷۰۴. **گزینه ۴** قرار است که معادلهٔ زیر هیچ جوابی نداشته باشد:

$$-x^2 + 2x = mx + 4$$

این معادله پس از مرتب‌سازی، یک معادلهٔ درجهٔ دوم است. پس شرط جواب نداشتن آن، $\Delta < 0$ است:

$$x^2 + (m-2)x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} (m-2)^2 - 4(1)(4) < 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 < 16 \Rightarrow -4 < m-2 < 4 \xrightarrow{+2} -2 < m < 6$$

یادآوری: برای $k > 0$ می‌توان گفت:

$$u^2 < k \Rightarrow -\sqrt{k} < u < \sqrt{k}$$

$$u^2 > k \Rightarrow u > \sqrt{k} \text{ یا } u < -\sqrt{k}$$

۷۰۵. **گزینه ۴**

راهبرد: نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور طول‌هاست، اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

علامت a را مثبت و علامت $\Delta = b^2 - 4ac$ را منفی در نظر می‌گیریم.

۱) $m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4(m+2)(1) < 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m - 8 < 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - m - 2 < 0$$

جواب‌های معادلهٔ $m^2 - m - 2 = 0$، $m = -1$ و $m = -\frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$ هستند. جدول تعیین علامت عبارت $m^2 - m - 2$ به این شکل است:

m		-1		2
m^2-m-2	$+$	0	$-$	0	$+$

جواب

۲) $\Rightarrow -1 < m < 2$

اشتراک ۱ با مجموعهٔ ۲ برابر $-1 < m < 2$ است.

نکته: در معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $b = a + c$، آن‌گاه جواب‌های معادله $x = -1$ و $x = -\frac{c}{a}$ هستند.

۷۰۶. **گزینه ۲** علامت عبارت همواره مثبت است:

۱) ضریب $x^2 > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1$

۲) $\Delta < 0 \Rightarrow 24 - 4(1-a)(-a) < 0 \Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0$

$$\xrightarrow{\div(-4)} a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow a > 3, a < -2$$

۱ ∩ ۲ $\Rightarrow a < -2$

۷۰۷. **گزینه ۲**

راهبرد: اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره زیر محور طول‌ها باشد، $\Delta < 0$ و $a < 0$.

$$\Delta < 0 \Rightarrow k^2 - 4k\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow k^2 + 2k < 0$$

$$a < 0 \Rightarrow k < 0$$

با توجه به منفی‌بودن علامت k نامعادلهٔ $k^2 + 2k < 0$ را به روش زیر حل می‌کنیم:

$$k(k+2) < 0 \xrightarrow{k<0} k + 2 > 0 \Rightarrow k > -2$$

اشتراک جواب‌ها $-2 < k < 0$ است.

۷۰۸. **گزینه ۲**

$$(a-3)x^2 + 2a + 1 > 2x + 8 \Rightarrow (a-3)x^2 - 2x + 2a - 7 > 0$$

$$\Delta = 4 - 4(a-3)(2a-7) < 0 \Rightarrow 1 - (2a^2 - 13a + 21) < 0$$

$$\Rightarrow -2a^2 + 13a - 20 < 0 \Rightarrow 2a^2 - 13a + 20 > 0$$

$$\Rightarrow (a-4)(2a-5) > 0 \Rightarrow a < \frac{5}{2} \text{ یا } a > 4 \quad (1)$$

$$a - 3 > 0 \Rightarrow a > 3 \quad (2)$$

اشتراک رابطه‌های ۱ و ۲ به‌صورت $a > 4$ است.

۷۰۹. **گزینه ۳** ضابطهٔ نمودار تابع درجهٔ دوم کوچک‌تر یا مساوی ضابطهٔ خط است.

$$-3x^2 + 2x \leq mx + 3 \Rightarrow 3x^2 + (m-2)x + 3 \geq 0$$

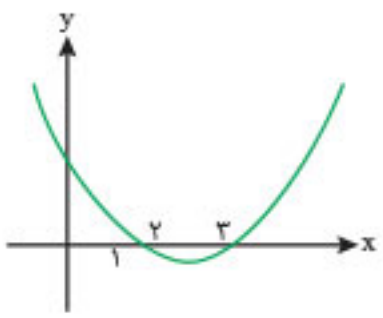
برای این‌که نامعادلهٔ بالا برقرار باشد، باید:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 4(3)(3) \leq 0 \Rightarrow (m-2)^2 - 36 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 \leq 36 \Rightarrow -6 \leq m-2 \leq 6 \xrightarrow{+2} -4 \leq m \leq 8$$

به ازای $13 = 1 + (-4) - 8$ عدد صحیح رابطهٔ مفروض برقرار است.

۷۱۰. **گزینه ۳** می‌توان نمودار سهمی را به‌صورت مقابل در نظر گرفت. پس $x = 2$ و $x = 3$ جواب‌های معادلهٔ $x^2 + mx + n = 0$ هستند.



$$x^2 + mx + n = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow 4 + 2m + n = 0 & (1) \\ x = 3 \Rightarrow 9 + 3m + n = 0 & (2) \end{cases}$$

اگر معادلهٔ ۱ را از معادلهٔ ۲ کم کنیم، داریم $m + 5 = 0$. در نتیجه $m = -5$ و با جای‌گذاری m در یکی از معادلات $n = 6$ خواهد شد:

$$n - m = 6 + 5 = 11$$

۷۱۱. **گزینه ۲**

$x = 1$ و $x = 2$ ریشه‌ها و صفرهای $P = x^2 + ax + b$ هستند.

$$x = 1 \Rightarrow (1)^2 + a(1) + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

$$x = 2 \Rightarrow (2)^2 + a(2) + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4$$

با حل دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی مقدارهای a و b را می‌یابیم:

$$a = -3, b = 2 \Rightarrow a^2 b = (-3)^2(2) = 18$$

۷۱۲. **گزینه ۱** $x = 1$ و $x = b$ جواب‌های معادلهٔ $ax^2 + ax + 3 = 0$ هستند. با جای‌گذاری $x = 1$ در معادله، مقدار a را می‌یابیم:

$$x = 1 \Rightarrow a(1)^2 + a(1) + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

توان: عبارتی مثل $\underbrace{۴\times۴\times۴\times\cdots\times۴}_{n\text{ تا}}$ را به‌صورت ۴^n می‌نویسیم.

▪ ضرب اعداد توان‌دار

۱) پایه‌ها یکسان: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

۲) توان‌ها یکسان: $a^m \times b^m = (a\times b)^m$

▪ تقسیم اعداد توان‌دار

۱) پایه‌ها یکسان: $a^m \div a^n = a^{m-n}\ (a\neq ۰)$

۲) توان‌ها یکسان: $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m\ (b\neq ۰)$

▪ تفاوت دو مدل توان‌رسانی

$(a^m)^n = a^{mn} \xrightarrow{\text{مثال}} (۳^۲)^۳ = ۳^۶$

$a^{m^n} \xrightarrow{\text{مثال}} ۳^{۳^۲} = ۳^۸$

▪ ریشه‌های دوم یک عدد: ریشه‌های دوم عدد $a\ (a>۰)$ را با $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم:

$۹ \begin{cases} \sqrt{۹}=۳ \\ -\sqrt{۹}=-۳ \end{cases}$

▪ جذر یا رادیکال با فرجهٔ ۲: جذر یک عدد مثبت، همواره برابر ریشهٔ دوم مثبت آن است:

$\sqrt{۹}=۳$

نکته: اعداد منفی جذر ندارند: $\sqrt{-۴}=$ وجود ندارد.

▪ ریشهٔ سوم یک عدد: اگر a یک عدد حقیقی باشد، ریشهٔ سوم آن را با نماد $\sqrt[۳]{a}$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید هر عدد فقط یک ریشهٔ سوم دارد.

$\sqrt[۳]{۸}=۲\ ,\ \sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

نکته:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{ab}\ ; & a,b>۰ \text{ و } n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{ab}\ ; & a \text{ و } b \text{ دلخواه و } n \text{ فرد}\end{cases}$$

توان منفی: اگر a و b اعداد طبیعی و $b\neq ۰$ باشد، آن‌گاه:

$(\frac{a}{b})^{-n}=(\frac{b}{a})^n \xrightarrow{\text{مثال}} (\frac{۳}{۴})^{-۷}=(\frac{۴}{۳})^۷$

توان‌های گویا: اگر $a>۰$ باشد:

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

انواع اتحادها

۱) **مربع دوجمله‌ای:**

$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲ \qquad (a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$

۲) **مزدوج:** $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$

۳) **جمله مشترک:** $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

۴) **مربع سه‌جمله‌ای:**

$(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$

۵) **مکعب دوجمله‌ای:**

$(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳$

$(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$

۶) **چاق و لاغر:**

$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳$

$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$

روش‌های تجزیه

۱) **فاکتورگیری ساده:** از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم:

$x^۳-۴x^۲=x^۲(x-۴)$

۲) **اتحادها:** برعکس اتحادها را حفظ باشید.

تجزیهٔ جمله مشترک:

ضرب دو عدد

$x^۲+\textcircled{b}x+\textcircled{c}=(x\quad)(x\quad)$

جمع دو عدد

فصل چهارم: معادله‌ها و نامعادله‌ها

معادله

یک تساوی جبری که به ازای بعضی از عددها به تساوی تبدیل شود.

▪ معادلهٔ درجهٔ اول: معادله‌ای به فرم $Ax+B=۰\ (A\neq ۰)$ است.

$Ax+B=۰\Rightarrow x=\frac{-B}{A}$

▪ معادلهٔ درجهٔ دوم: معادله‌ای به فرم $ax^۲+bx+c=۰\ (a\neq ۰)$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند.

▪ ویژگی حاصل‌ضرب صفر: $A\times B=۰\Rightarrow A=۰$ یا $B=۰$

روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم

▪ روش تجزیه

۱) **فاکتورگیری:**

$$ax^۲+bx=۰\Rightarrow x(ax+b)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ \\ \text{یا} \\ ax+b=۰\Rightarrow x=\frac{-b}{a}\end{cases}$$

۲) **اتحاد مزدوج:**

$$x^۲-a^۲=۰\Rightarrow(x-a)(x+a)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=a \\ x=-a\end{cases}$$

۳) **اتحاد جمله مشترک:**

$$x^۲+(a+b)x+ab=۰\Rightarrow(x+a)(x+b)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-a \\ x=-b\end{cases}$$

▪ روش ریشه‌گیری

$$x^۲=a \xrightarrow{\text{اگر } a \text{ عددی مثبت باشد.}} \begin{cases}x=\sqrt{a} \\ x=-\sqrt{a}\end{cases}$$

▪ روش مربع کامل

۱) عبارات شامل متغیر را در یک طرف تساوی و عدد ثابت را در طرف دیگر تساوی قرار می‌دهیم.

۲) اگر $x^۲$ ضریبی به جز ۱ داشت، طرفین تساوی را بر ضریب $x^۲$ تقسیم می‌کنیم.

۳) مربع نصف ضریب x را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.

۴) یک طرف معادله، به اتحاد مربع دوجمله‌ای تبدیل شده است.

۵) ادامهٔ آن را مثل قبل حل می‌کنیم.

مثال:

$۲x^۲-۳x-۲=۰$

$\xrightarrow{①}۲x^۲-۳x=۲\xrightarrow[\div ۲]{②}x^۲-\frac{۳}{۲}x=۱\xrightarrow{③}$

$x^۲-\frac{۳}{۲}x+(\frac{۳}{۴})^۲=۱+(\frac{۳}{۴})^۲\xrightarrow{④}x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۱۶}=۱+\frac{۹}{۱۶}$

$$\Rightarrow(x-\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۲۵}{۱۶}\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow x=\frac{۸}{۴} \\ x-\frac{۳}{۴}=-\frac{۵}{۴}\Rightarrow x=-\frac{۲}{۴}\end{cases}$$

مهروماه