

به نام خدای مهربان



مقدمه

هدف کتاب

امتحان نهایی تأثیر به‌سزایی در قبول شدن شما در رشته و دانشگاه مورد علاقه‌تون و نتیجتاً در آینده شغلی و جایگاهتون در جامعه داره. در درس‌هایی مثل ریاضی، شما در کنکور فقط باید به جواب آخر برسید و راه‌لنتون اهمیتی نداره؛ اما در امتحان نهایی، مرحله‌به‌مرحله پاسختون نمره داره و جواب آخرتون فقط بخش کوچیکی از نمره هست؛ پس باید خیلی خیلی بیشتر از گذشته برای امتحان نهایی وقت بگذارید.

ساختار بیست‌پک

مجموعه بیست‌پک شامل: ۱ کتاب پرسؤال ۲ کاربرگ امتحانی ۳ خلاصه‌کپسولی

۱ کتاب پرسؤال:

در درسنامه، فصل را مطابق کتاب درسی تقسیم‌بندی کردیم و یک درسنامه کامل برای شما نوشته‌ایم که با حل تمرین‌های کتاب درسی غنی شده و با خواندن آن می‌توانید به همه سؤالات امتحان نهایی پاسخ دهید. ما مرحله‌به‌مرحله پاسخ مثال‌ها را توضیح دادیم و شما هم باید تمامی این مراحل را به‌خوبی یاد بگیرید؛ چون اگر کامل ننویسید، مٌصحح‌های امتحان نهایی به شما نمره کامل را نخواهند داد!

در این کتاب، تمام مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی، سؤالات امتحان‌های نهایی داخل و خارج از کشور و سؤالاتی از کنکور را که ممکن است در امتحان نهایی هم با آن روبه‌رو شوید، جمع‌آوری کرده‌ایم و به‌صورت کاملاً تشریحی به آن‌ها پاسخ داده‌ایم. برخی از سؤالات را که با آیکون +۲۰ مشخص کرده‌ایم، کمی چالشی‌تر هستند و ویژه کسانی است که می‌خواهند در امتحان نهایی نمره بیست بگیرند.

بچه‌های عزیز باز هم تأکید می‌کنم که به شیوه نوشتن پاسخ تشریحی خیلی توجه کنید؛ هر قسمت از این پاسخ‌ها در امتحان نهایی دارای بارم است.

۲ کاربرگ امتحانی:

کاربرگ امتحانی شامل امتحان‌های فصل‌به‌فصل، دو امتحان تألیفی نوبت اول، دو امتحان شبیه‌سازی‌شده نهایی و دو امتحان برگزارشده اخیر به همراه پاسخ تشریحی و بارم‌بندی ریز هر سؤال است.

پیشنهاد می‌کنیم بعد از حل تمامی سؤالات هر فصل در کتاب پرسؤال، امتحان آن فصل را در کاربرگ حل کنید، همچنین حل امتحان‌های نوبت اول و دوم می‌تواند کمک بسیار زیادی به موفقیت شما در جلسه امتحان بکند.

۳ خلاصه‌کپسولی:

سی تیپ بسیار پرتکرار امتحان‌های نهایی گذشته را با توضیح برایتان گردآوری کرده‌ایم. به احتمال بسیار زیاد، امتحان نهایی شما هم شباهت‌های فراوانی به امتحان نهایی‌های گذشته خواهد داشت. از مرور این گنج ارزشمند در شب امتحان غافل نشوید.

امید است که با مطالعه مجموعه بیست‌پک و حل سؤالات آن، نمره کامل این درس را در امتحان نهایی کسب کنید.

با سپاس فراوان از تمام دوستانی که در تألیف این کتاب همراهان بودند.

دوستدار شما

مؤلفین بیست‌پک

فهرست

فصل اول:

تابع



پاسخنامه	سؤالات امتحانی	درسنامه	
۱۶۲	۱۶	۶	درس ۱
۱۶۸	۳۲	۱۸	درس ۲
۱۷۸	۴۴	۳۷	درس ۳

فصل دوم:

مثلثات



پاسخنامه	سؤالات امتحانی	درسنامه	
۱۸۲	۵۵	۴۶	درس ۱
۱۸۸	۶۶	۶۰	درس ۲

فصل سوم:

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت



پاسخنامه	سؤالات امتحانی	درسنامه	
۱۹۵	۷۸	۶۹	درس ۱
۲۰۱	۸۷	۸۲	درس ۲

فصل چهارم:

مشتق



پاسخنامه	سؤالات امتحانی	درسنامه	
۲۰۵	۹۴	۹۱	درس ۱
۲۰۸	۱۰۹	۹۷	درس ۲
۲۱۵	۱۱۵	۱۱۴	درس ۳

فصل پنجم:

کاربرد مشتق



پاسخنامه	سؤالات امتحانی	درسنامه	
۲۱۶	۱۲۶	۱۱۷	درس ۱
۲۲۲	۱۳۲	۱۳۰	درس ۲

فصل ششم:

هندسه



پاسخنامه	سؤالات امتحانی	درسنامه	
۲۲۶	۱۴۴	۱۳۴	درس ۱
۲۳۱	۱۵۳	۱۴۸	درس ۲

فصل هفتم:

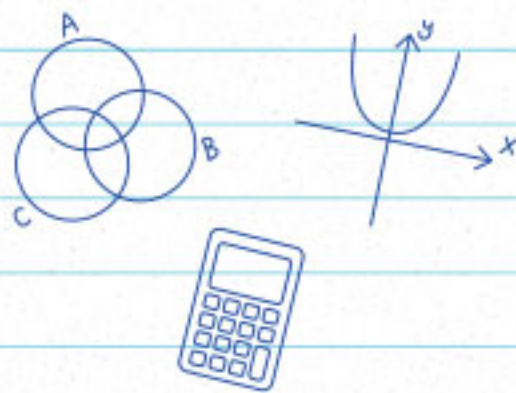
احتمال



پاسخنامه	سؤالات امتحانی	درسنامه	
۲۳۶	۱۵۸	۱۵۵	درس ۱

فصل اول

تابع



مشاوره: به فصل اول کتاب ریاضی دوازدهم خوش اومدین. این فصل جزء فصل‌های مهم و پایه‌ای کتاب ریاضی دوازدهم و ادامهٔ مبحث تابع سال دهم و یازدهم. ۳ تا درس توی فصل اول اومده که هرکدومشون چند تا مبحث رو شامل می‌شن. توی اولین درس این فصل، تابع چندجمله‌ای و به‌طور خاص تابع درجه ۳ معرفی می‌شه و بعدش می‌ریم سراغ صعودی یا نزولی بودن یک تابع. درکل درس اول خوراک سؤالای درست و نادرست و جای خالیه و همیشه از این درس توی امتحان نهایی سؤالای درست و نادرست و جای خالی داشتیم. درس دوم هم خودش دو قسمت می‌شه، ترکیب توابع و رسم به کمک تبدیل‌ها و انتقال. نقطه‌ضعف بچه‌ها توی این درس، پیدا کردن دامنهٔ تابع مرکبه! که پیشنهاد می‌کنم حتماً روی این قسمت مسلط بشین! درس سوم هم راجع به یک‌به‌یک کردن توابع با محدودسازی دامنهٔ اوناست و در آخر راجع به تابع وارون بحث شده که ادامهٔ درس تابع سال یازدهمه....

بارم‌بندی این فصل توی امتحان نهایی دو سال اخیر به‌صورت زیر هست:

مباحثی که می‌خوانید		بارم‌بندی در خرداد ۱۴۰۲	بارم‌بندی در خرداد ۱۴۰۳
درس ۱	توابع چندجمله‌ای / توابع صعودی و نزولی	۰/۵	۱
درس ۲	ترکیب توابع	۱/۵	۰/۷۵
درس ۳	تابع وارون	۰/۲۵	۱/۵
مجموع		۲/۲۵	۳/۲۵

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

درس ۱

توابع چندجمله‌ای

تعریف: هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی باشد و $a_n \neq 0$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم.

مشاوره نهایی: توی چند سال اخیر، از این قسمت، سؤالای جای خالی و درست و نادرست زیادی در امتحان نهایی طرح شده؛ برای همین به نکات مهم زیر، توجه ویژه‌ای داشته باشید.

● نکات توابع چندجمله‌ای

- بیشترین توان x ، یعنی n ، درجهٔ آن چندجمله‌ای است؛ برای نمونه $y = x^4 - 3x^2 + 1$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است.
- n عدد صحیح نامنفی است؛ پس اگر در عبارتی، توان x عددی منفی یا غیر صحیح بود، آن عبارت چندجمله‌ای نیست؛ برای نمونه $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ یا $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ چندجمله‌ای نیستند.
- دامنهٔ همهٔ توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. (بعداً به نگاهی به نمودارهاشون بندازید.)
- برد توابع چندجمله‌ای با درجهٔ فرد $\mathbb{R}$ است. (مهم‌ترین تابع چندجمله‌ای با درجهٔ زوج، تابع درجهٔ دومه که برد اون در ادامه بررسی می‌شه.)

(مشابه مثال کتاب درسی)

سؤال کدام یک از توابع زیر، چندجمله‌ای است؟

الف) $y = \sqrt[3]{x} + 1$

ب) $y = 3x^2 + \sin x$

پ) $y = \sqrt{2x} + \frac{1}{x}$

جواب الف) با توجه به این‌که توان x در $\sqrt[3]{x}$ ، برابر $\frac{1}{3}$ است و طبق تعریف توابع چندجمله‌ای، عدد $\frac{1}{3}$ عدد صحیح نامنفی نیست؛ بنابراین $y = \sqrt[3]{x} + 1$ چندجمله‌ای نیست.

ب) عبارات شامل نسبت‌های مثلثاتی، چندجمله‌ای نیستند!

پ) این عبارت چندجمله‌ای است؛ زیرا ضریب x ، زیر رادیکال قرار دارد نه خود x !



در جدول زیر، توابع چند جمله‌ای مهم که در سال‌های قبل با آن‌ها آشنا شده‌اید، آورده شده است:

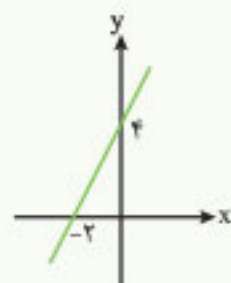
نام	مشهور به	ضابطه	نمودارها	دامنه	برد	نمونه
چند جمله‌ای درجه صفر	تابع ثابت	$y = k$		$\mathbb{R}$	$\{k\}$	
چند جمله‌ای درجه ۱	تابع خطی	$y = ax + b \ (a \neq 0)$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
چند جمله‌ای درجه ۲	تابع سهمی	$y = ax^2 + bx + c$ (فرم ۱) $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ (فرم ۲) ($a \neq 0$)		$\mathbb{R}$	$a > 0$ $[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$ $a < 0$ $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$	

توجه: تابع چند جمله‌ای درجه ۳ را مفصل‌تر در ادامه بررسی خواهیم کرد.

یادآوری: در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع چند جمله‌ای درجه ۱ (خطی) و درجه ۲ (سهمی) آشنا شده‌ایم. برای یادآوری، از هر کدام یک نمونه رسم می‌کنیم.

سؤال نمودار تابع خطی $y = 2x + 4$ را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

جواب روش رسم: دو نقطه روی خط به دلخواه انتخاب می‌کنیم. (بهتر است این دو نقطه محل برخورد خط با محورهای مختصات باشند، یعنی یک بار x را برابر صفر قرار دهیم و y را پیدا کنیم و یک بار y را برابر صفر قرار دهیم و x را پیدا کنیم.)



$$y = 2x + 4 \begin{cases} x=0 \rightarrow y = 2(0) + 4 = 4 \\ y=0 \rightarrow 0 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جدول نقطه یابی}} \begin{array}{c|cc} x & 0 & -2 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$$

این دو نقطه را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و به کمک آن‌ها نمودار خط را رسم می‌کنیم:

دامنه و برد تابع خطی $y = 2x + 4$ هر دو، برابر $\mathbb{R}$ است. ($D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{R}$)

سؤال نمودار تابع سهمی با ضابطه $y = x^2 - 4x + 3$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

جواب روش رسم: مختصات رأس سهمی $S(x_S, y_S)$ را از روابط $x_S = \frac{-b}{2a}$ و $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ پیدا می‌کنیم؛ سپس دو نقطه کمکی در اطراف رأس سهمی پیدا می‌کنیم و به کمک این نقطه‌ها نمودار سهمی را رسم می‌کنیم. (بهتره محل برخورد سهمی با محورهای مختصات هم مشخص باشه.)

$$y = x^2 - 4x + 3 \begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} \rightarrow x_S = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow y_S = \frac{-((-4)^2 - 4(1)(3))}{4(1)} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow S(2, -1)$$

توجه کنید که به روش دیگر برای پیدا کردن y_S اینه که x_S رو به دست بیاریم و توی ضابطه $y = x^2 - 4x + 3$ قرار بدیم تا y_S به دست بیاد.

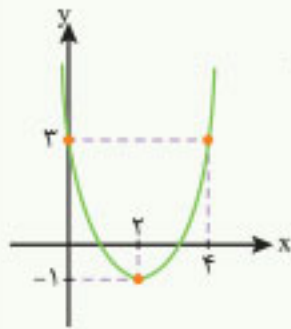
رأس سهمی

$$\downarrow$$

$$\text{جدول نقطه یابی: } \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 & 4 \\ \hline y & 3 & -1 & 3 \end{array}$$


رقت کنید: دو نقطه کمکی را به صورت مقابل پیدا می‌کنیم:

$$y = x^2 - 4x + 3 \begin{cases} x=0 \rightarrow y = (0)^2 - 4(0) + 3 = 3 \Rightarrow (0, 3) \\ x=4 \rightarrow y = (4)^2 - 4(4) + 3 = 3 \Rightarrow (4, 3) \end{cases}$$



نکته: اگر طول نقاط کمکی که در نظر می‌گیریم، به فاصله یکسان از طول رأس سهمی باشند، عرض هایشان یکسان است.

این سه نقطه را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و به کمک آن‌ها سهمی را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار رسم شده، دامنه این سهمی، برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازه $[-1, +\infty)$ است.

$$(D_f = \mathbb{R} \text{ و } R_f = [-1, +\infty))$$

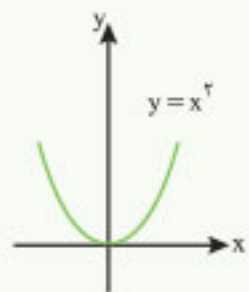
سؤال نمودار تابع با ضابطه $y = (x+1)^2 + 2$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

جواب روش رسم: به کمک انتقال‌های افقی و عمودی از روی نمودار $y = x^2$ ، آن را رسم می‌کنیم.

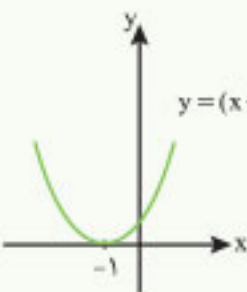
رسم به کمک انتقال را در سال دهم یاد گرفته‌اید:

$$\left. \begin{aligned} & k > 0: \text{ نمودار } y = x^2, k \text{ واحد به سمت چپ می‌رود.} \\ & k < 0: \text{ نمودار } y = x^2, |k| \text{ واحد به سمت راست می‌رود.} \end{aligned} \right\} y = (x+k)^2 \quad \left. \begin{aligned} & k > 0: \text{ نمودار } y = x^2, k \text{ واحد به سمت چپ می‌رود.} \\ & k < 0: \text{ نمودار } y = x^2, |k| \text{ واحد به سمت راست می‌رود.} \end{aligned} \right\} y = x^2 + k$$

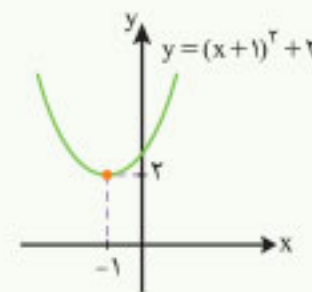
$$\left. \begin{aligned} & k > 0: \text{ نمودار } y = -x^2, k \text{ واحد به سمت چپ می‌رود.} \\ & k < 0: \text{ نمودار } y = -x^2, |k| \text{ واحد به سمت راست می‌رود.} \end{aligned} \right\} y = -(x+k)^2 \quad \left. \begin{aligned} & k > 0: \text{ نمودار } y = -x^2, k \text{ واحد به سمت چپ می‌رود.} \\ & k < 0: \text{ نمودار } y = -x^2, |k| \text{ واحد به سمت راست می‌رود.} \end{aligned} \right\} y = -x^2 + k$$



یک واحد به چپ



دو واحد به بالا



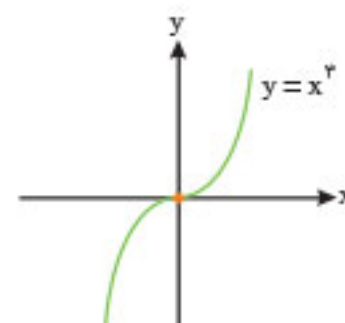
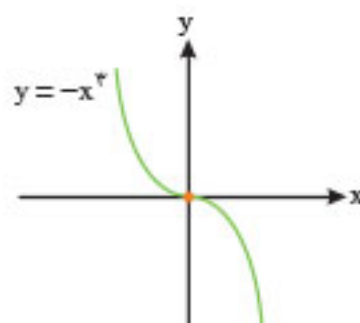
با توجه به نمودار، $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = [2, +\infty)$ است.

تابع درجه ۳

تعریف: تابع چندجمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)، یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۳ است. هم دامنه و هم برد این تابع، $\mathbb{R}$ است.

(از روی نمودارهاشون معلومه!)

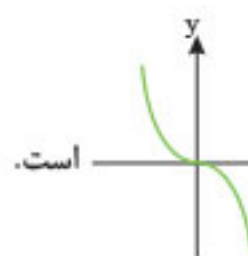
نمودارهای $y = x^3$ و $y = -x^3$ به صورت زیر هستند: (می‌تونن چندتا نقطه روش مشخص کنی تا به همین نمودارها برسی)



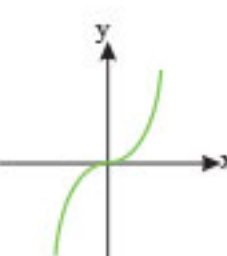
رسم نمودار تابع چندجمله‌ای درجه ۳ به فرم $y = a(x+b)^3 + c$

نمودار توابع درجه ۳ به فرم $y = a(x+b)^3 + c$ را به کمک انتقال و تقارن از روی نمودار تابع $y = x^3$ رسم می‌کنیم. برای این کار، نیاز است پارامترهای a ،

b و c را بشناسیم:



اگر $a > 0$ باشد، نمودار تابع درجه ۳ به صورت x باشد، نمودار تابع درجه ۳ به صورت x است.

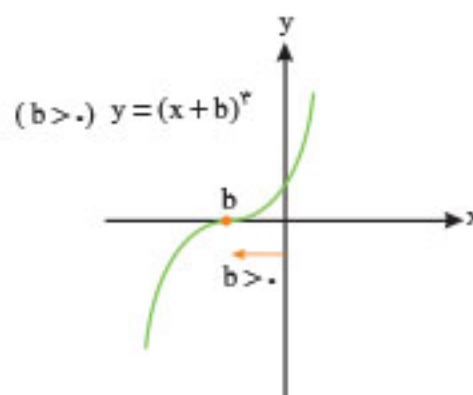
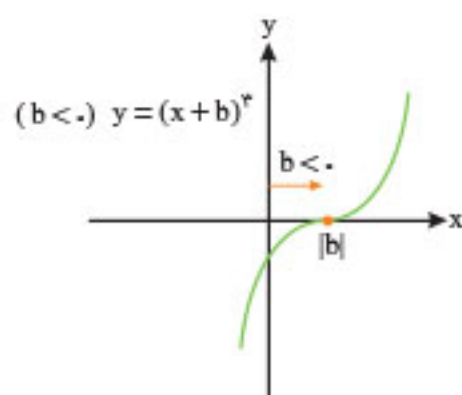


اگر $a < 0$ باشد، نمودار تابع درجه ۳ به صورت x باشد، نمودار تابع درجه ۳ به صورت x است.

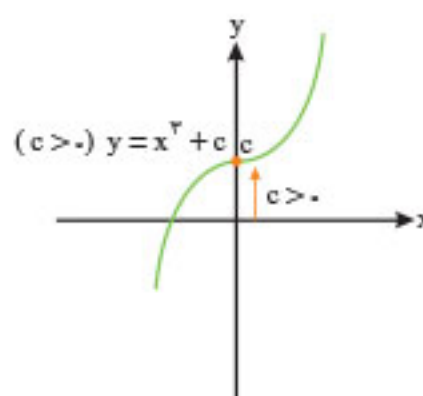
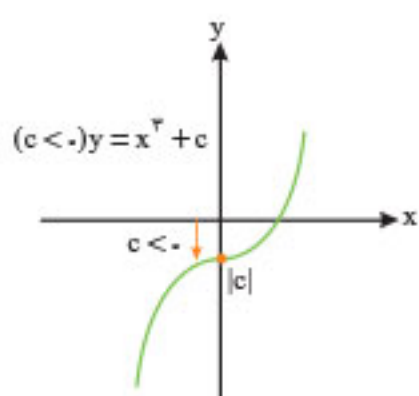


در ادامه می‌خوانیم اگر $a > 0$ باشد، تابع درجه ۳، اکیداً صعودی و اگر $a < 0$ باشد، این تابع اکیداً نزولی است.

اگر $b > 0$ باشد، نمودار تابع درجه ۳ به اندازه b واحد به سمت چپ می‌رود و اگر $b < 0$ باشد، نمودار آن به اندازه $|b|$ واحد به سمت راست می‌رود:



اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع درجه ۳ به اندازه c واحد به بالا می‌رود و اگر $c < 0$ باشد، نمودار آن به اندازه $|c|$ واحد به پایین می‌آید:



$$y = \underset{(r)}{a} (\underset{(l)}{x + b})^r + \underset{(r)}{c}$$

تذکره: بهتر است ترتیب انتقال‌ها برای رسم نمودار تابع $y = a(x+b)^r + c$ به صورت مقابل باشد:

(فعالیت کتاب درسی)

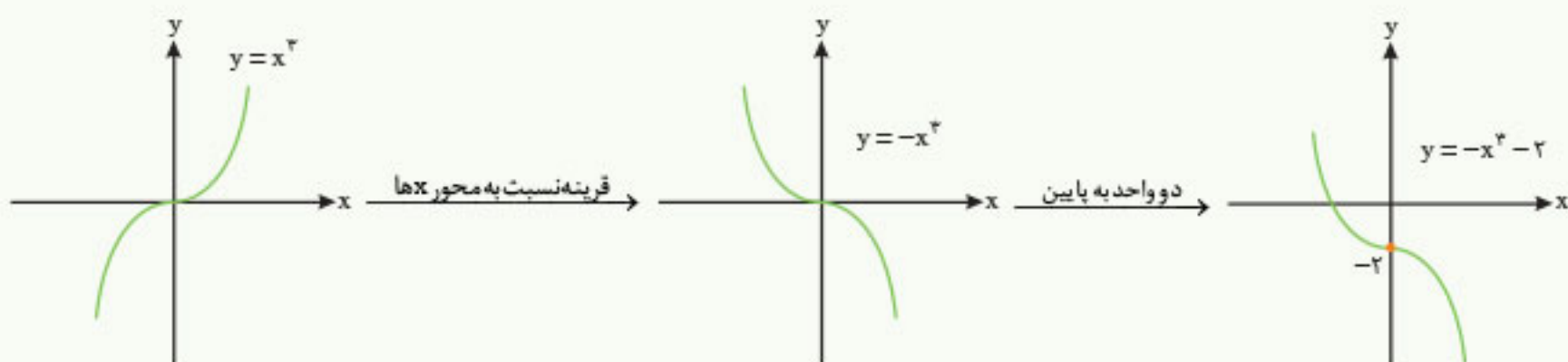
سؤال با استفاده از نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

الف) $y = -x^3 - 2$

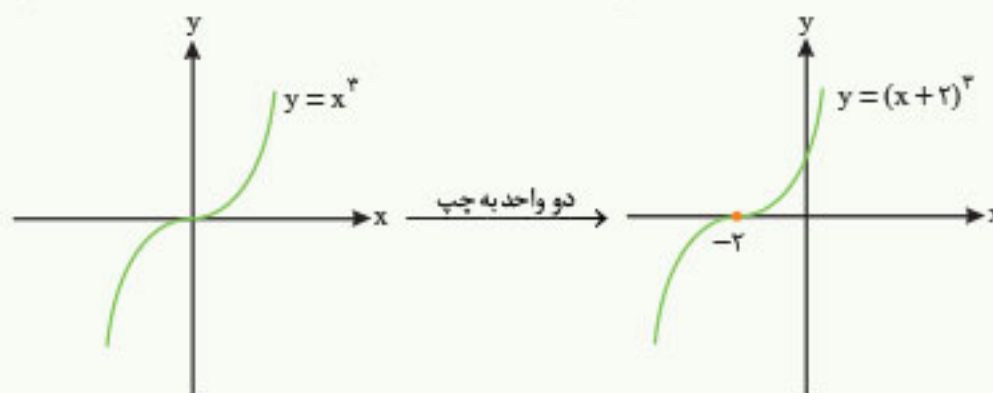
ب) $y = (x+2)^3$

پ) $y = -(x-2)^3$

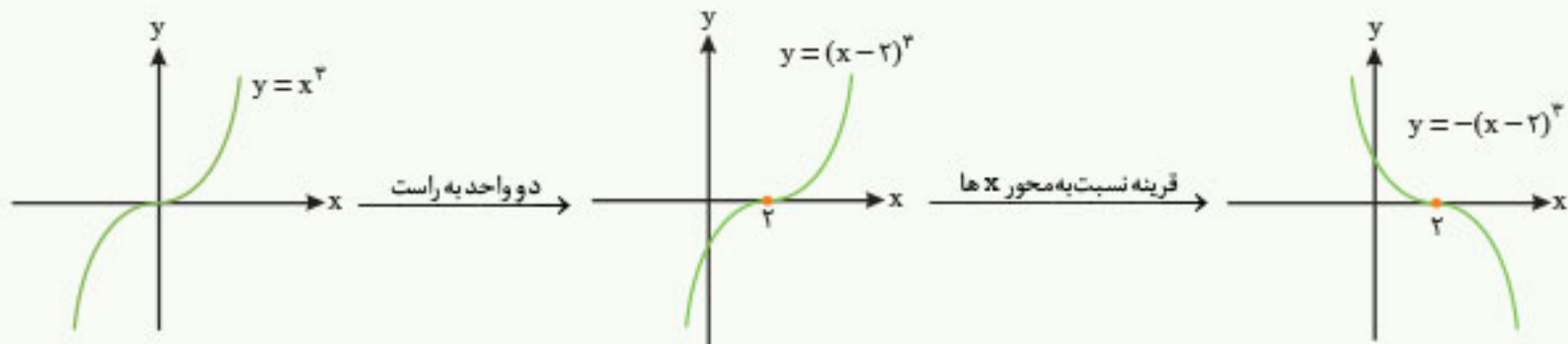
جواب الف) نمودار $y = -x^3 - 2$ را از روی نمودار $y = x^3$ طبق مراحل زیر، رسم می‌کنیم:



ب) برای رسم نمودار $y = (x+2)^3$ از روی نمودار $y = x^3$ ، کافی است نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت چپ ببریم:



پ) برای رسم نمودار $y = -(x-2)^3$ ، ابتدا نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به سمت راست می‌بریم و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



همان‌طور که در نمودارها نیز مشخص است، دامنه و برد در همه موارد برابر $\mathbb{R}$ است.

● رسم نمودار تابع چندجمله‌ای درجه ۳ به فرم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

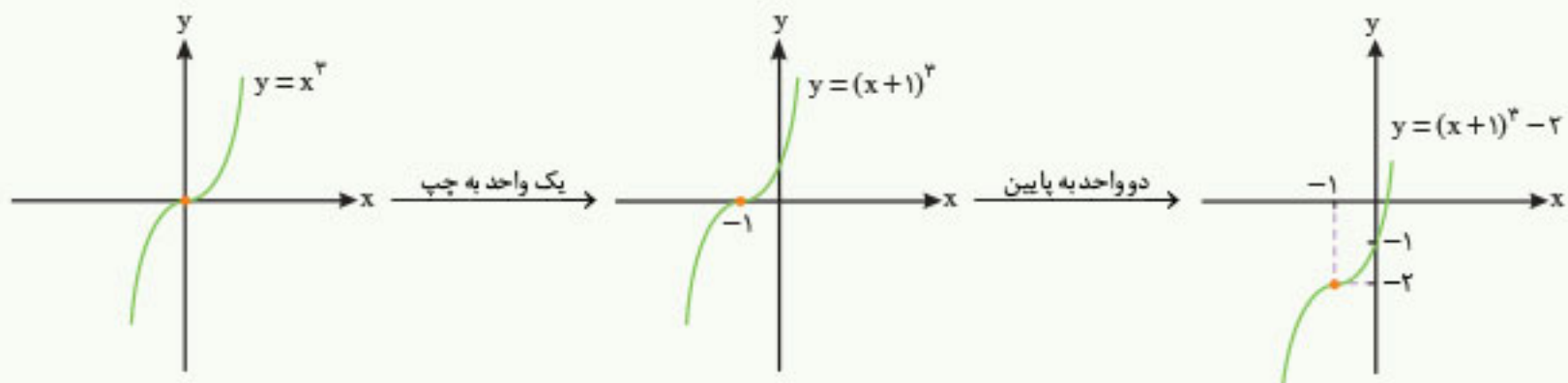
برای رسم نمودار توابع درجه ۳ به فرم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)، ابتدا سعی می‌کنیم ضابطه داده شده را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به شکل $y = a(x+b)^3 + c$ تبدیل کنیم و سپس به کمک انتقال، نمودار آن را رسم کنیم.

سؤال نمودار تابع $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ را رسم کنید.

$$y = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 - 1 \Rightarrow y = (x+1)^3 - 2$$

جواب به ضابطه تابع، ۱ واحد اضافه و کم می‌کنیم:

حال برای رسم نمودار تابع $y = (x+1)^3 - 2$ از روی نمودار تابع $y = x^3$ به ترتیب، انتقال‌های زیر را انجام می‌دهیم:
 ۱) یک واحد آن را به چپ می‌بریم. ۲) دو واحد نمودار را پایین می‌آوریم.



سؤال نمودار تابع $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9$ را رسم کنید.

$$y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 + 1 = -(x-2)^3 + 1$$

برای رسم نمودار $y = -(x-2)^3 + 1$ از روی نمودار تابع $y = x^3$ ، مراحل زیر را طی می‌کنیم:



● مقایسه نمودار توابع $y = x^3$ و $y = x^2$

با رسم نمودار دو تابع در یک دستگاه مختصات، به نکات زیر می‌رسیم:

۱) این دو تابع در نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ با هم برابر هستند.

۲) در x های منفی، همیشه نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.

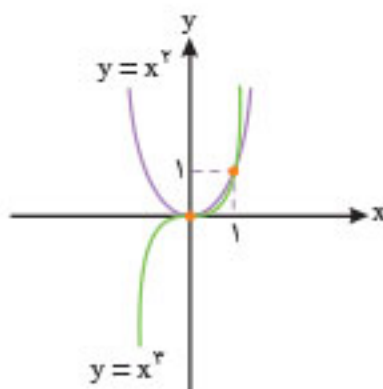
۳) در x های مثبت، دو حالت داریم: الف) در بازه $(0, 1)$ ، نمودار $y = x^3$ پایین‌تر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

ب) در بازه $(1, +\infty)$ ، نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.

مشاوره نهایی: بیشتر از بازه $(0, 1)$ توی نهایی سؤال می‌آید!

توجه: اعداد بین صفر و یک هر چه به عدد بزرگ‌تری برسند، مقدارشان کمتر می‌شود، به زبان ریاضی:

$$x \in (0, 1) \Rightarrow x^3 < x^2$$

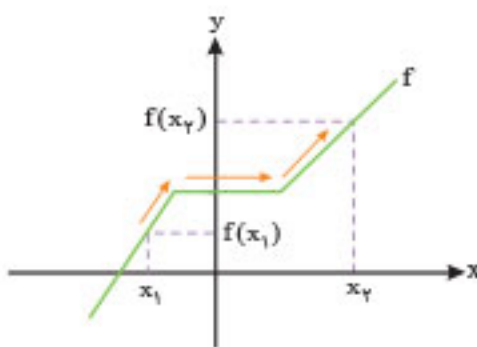


توابع صعودی و نزولی

تابع صعودی

تعریف: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آن‌گاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

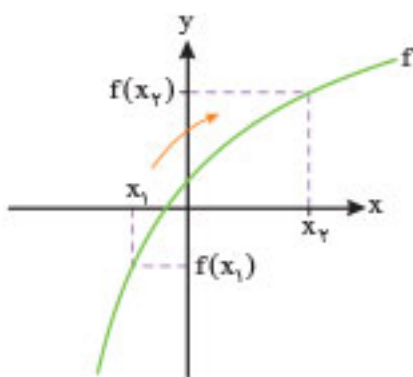
از لحاظ نموداری، تابعی صعودی است که با حرکت از چپ به راست روی نمودار، هیچ‌وقت رو به پایین حرکت نکنیم. (با افزایش مقدار x ، مقدار f یا زیاد شود یا ثابت بماند.)



تابع اکیداً صعودی

تعریف: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آن‌گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.

از لحاظ نموداری، تابعی اکیداً صعودی است که با حرکت از چپ به راست روی نمودار، همواره رو به بالا حرکت کنیم. (با افزایش x ، مقدار f همواره زیاد می‌شود.)

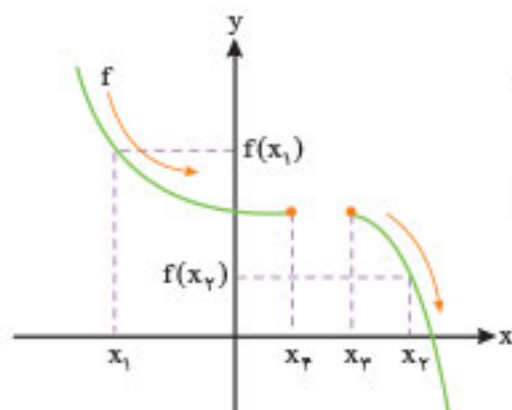


تابع نزولی

تعریف: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آن‌گاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

از لحاظ نموداری، تابعی نزولی است که وقتی از چپ به راست روی نمودار حرکت می‌کنیم، اصلاً رو به بالا حرکت نکنیم. (با افزایش x ، مقدار f یا کم شود یا ثابت بماند.)

دقت کنید: در نقاط x_1 و x_2 ، مقدار f ثابت مانده است.

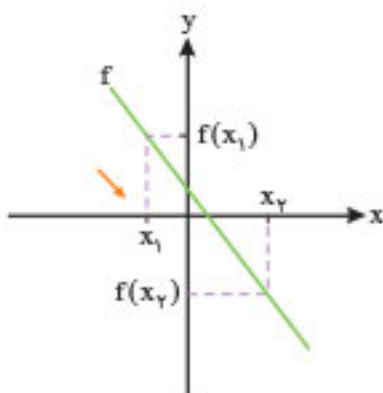


تابع اکیداً نزولی

تعریف: اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آن‌گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

از لحاظ نموداری، تابعی اکیداً نزولی است که وقتی از چپ به راست روی نمودار حرکت می‌کنیم، همیشه رو به پایین برویم. (یعنی با افزایش مقدار x ، مقدار f همواره کم شود.)

توی تعریف‌های بالا، به علامت‌های نامساوی دقت کنید. اونایی که $<$ یا $>$ هستند، کلمه «اکیداً» رو دارند و اونایی که $\leq$ یا $\geq$ هستند، کلمه «اکیداً» رو ندارند.



جمع‌بندی:

با افزایش x ، $f(x)$ زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	صعودی
با افزایش x ، $f(x)$ همواره زیاد می‌شود.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	اکیداً صعودی
با افزایش x ، $f(x)$ کم می‌شود یا ثابت می‌ماند.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	نزولی
با افزایش x ، $f(x)$ همواره کم می‌شود.	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	اکیداً نزولی

نکته: تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. (این نکته، بارها و بارها سؤال امتحان نهایی بوده!)

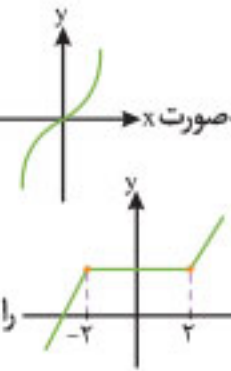
توابع یکنوا، اکیداً یکنوا و غیریکنوا

تعریف: به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

نکته: توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند؛ یعنی تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و تابع اکیداً نزولی، نزولی هم هست، ولی عکس این موضوع درست نیست؛ یعنی ممکن است یک تابع یکنوا، اکیداً یکنوا نباشد.

برای نمونه، تابع $y = x^3$ را در نظر بگیرید. نمودار $y = x^3$ به صورت x است. این تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی (اکیداً یکنوا) است؛ همچنین می‌توان گفت

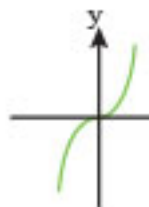


این تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی (یکنوا) است. حال تابعی با نمودار x را در نظر بگیرید. این تابع صعودی (یکنوا) است؛ ولی اکیداً صعودی (اکیداً یکنوا) نیست.

تعریف: اگر تابعی در یک بازه نه صعودی و نه نزولی باشد، می‌گوییم آن تابع غیریکنوا است.



برای نمونه تابع $y = |x|$ با نمودار x روی $\mathbb{R}$ غیر یکنوا است.



نکته: اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک‌به‌یک نیز هست، ولی عکس این موضوع درست نیست؛ برای نمونه تابع $y = x^3$ با نمودار x اکیداً یکنوا و یک‌به‌یک است، اما تابع $y = \frac{1}{x}$ با نمودار x یک‌به‌یک است، ولی اکیداً یکنوا نیست. تابع $y = \frac{1}{x}$ در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی

است؛ همچنین در بازه $(0, +\infty)$ هم اکیداً نزولی است، اما در کل غیریکنوا است.

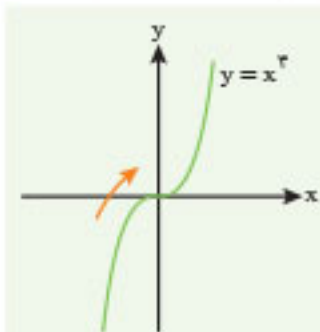
نتیجه: اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد، حتماً اکیداً یکنوا نیست.

مشاوره نهایی: تعریف‌ها و نکات بالا رو حتماً بارها و بارها بخونید و به خاطر بسپارید. از این

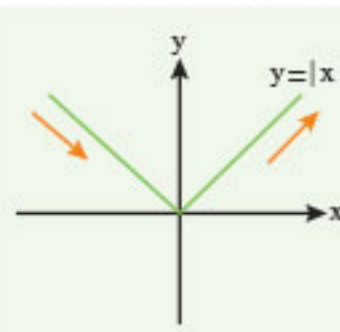
قسمت، سؤالی زیادی به صورت جای خالی و درست و نادرست توی امتحان نهایی سال‌های اخیر طرح شده.

برای این که بتونی تو به نگاه، مطالب بالا رو مرور کنی، به نمودار روبه‌رو دقت کن:

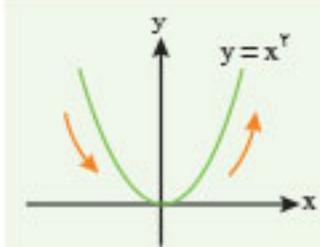
توابع مهمی که باید نمودار آن‌ها را بشناسید، در جدول زیر آورده‌ایم و آن‌ها را از نظر یکنوایی بررسی کرده‌ایم. (تمرین‌ها و مثال‌های مهم کتاب رو یک جا توی این جدول ببین.)



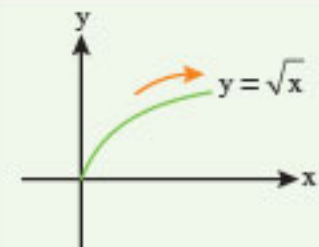
(ب) تابع $y = x^3$ در مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) اکیداً صعودی است؛ در نتیجه اکیداً یکنوا است.



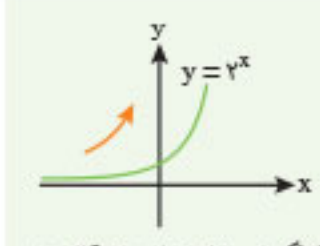
(الف) تابع $y = |x|$ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ ولی در $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است (غیریکنواست).



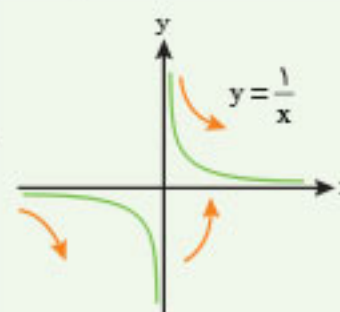
(ت) تابع $y = x^2$ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ ولی روی $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است (غیریکنواست).



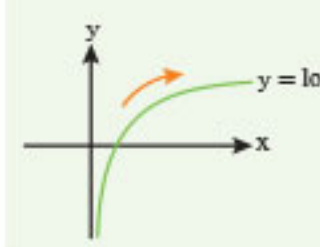
(پ) تابع $y = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش، یعنی بازه $[0, +\infty)$ ، اکیداً صعودی است؛ در نتیجه اکیداً یکنوا است.



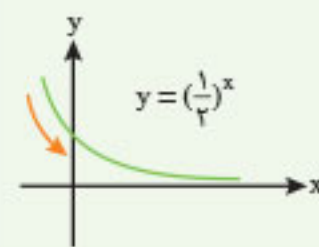
(ج) تابع $y = 2^x$ در بازه $(-\infty, +\infty)$ اکیداً صعودی، در نتیجه اکیداً یکنوا است (به طور کلی توابع نمایی به صورت $y = a^x$ که در آن $a > 1$ است، روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی هستند).



(ث) تابع $y = \frac{1}{x}$ در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ نیز اکیداً نزولی است؛ ولی روی $\mathbb{R}$ اکیداً یکنوا نیست (در کل غیریکنواست). از چپ به راست، نمودار رفته پایین، یهویی برگشته بالا و دوباره رفته پایین!



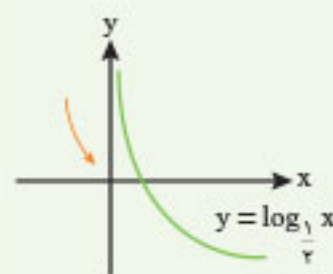
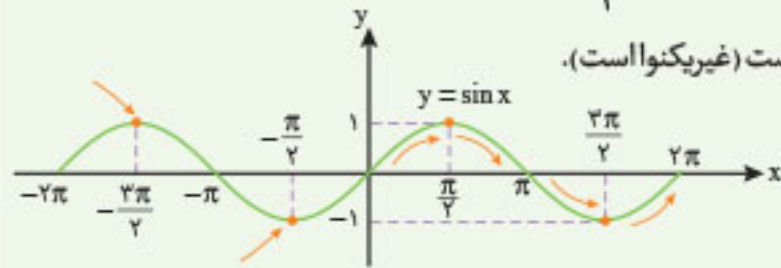
(ح) تابع $y = \log_2 x$ در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی، در نتیجه اکیداً یکنوا است. (به طور کلی توابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a x$ که در آن $a > 1$ است، روی دامنه‌اش اکیداً صعودی هستند.)



(چ) تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ در بازه $(-\infty, +\infty)$ اکیداً نزولی، در نتیجه اکیداً یکنوا است. (به طور کلی توابع نمایی به صورت $y = a^x$ که در آن $0 < a < 1$ است، روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی هستند.)

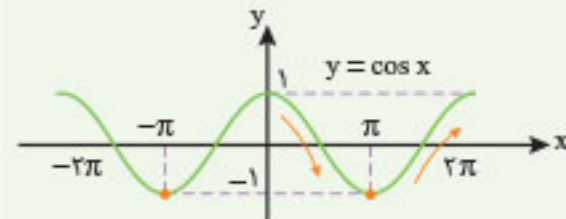


د) تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی، در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی و در بازه $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ اکیداً صعودی است؛ ولی روی $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است (غیریکنوا است).



خ) تابع $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی، در نتیجه اکیداً یکنوا است. (به طور کلی توابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a x$ که در آن $0 < a < 1$ است، روی دامنه‌اش اکیداً نزولی هستند.)

ذ) تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, \pi]$ اکیداً نزولی و در بازه $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی است؛ ولی روی $\mathbb{R}$ نه صعودی و نه نزولی است (غیریکنوا است).

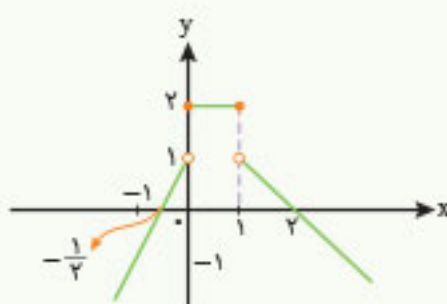


(مشابه تمرین کتاب درسی)

سؤال نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی هستند.

الف) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x < 0 \\ 2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2 & ; x > 1 \end{cases}$

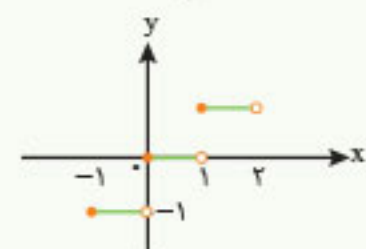
ب) $y = [x] ; x \in [-1, 2)$



جواب الف) این تابع، یک تابع چندضابطه‌ای است. نمودار تابع خطی $y = 2x + 1$ را در بازه $(-\infty, 0)$ رسم می‌کنیم. f در بازه $[0, 1]$ تابع ثابت ۲ است؛ خط $y = -x + 2$ را نیز در بازه $(1, +\infty)$ رسم می‌کنیم. طبق نمودار، مشاهده می‌کنیم که تابع در بازه $(-\infty, 1]$ صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ نزولی است.

دقت کنید: تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

اگر می‌گفت توی چه بازه‌ای اکیداً صعودی است، می‌گفتیم کل بازه $(-\infty, 0]$ و اگر می‌گفت توی چه بازه‌ای اکیداً نزولی است، می‌گفتیم بازه $[1, +\infty)$!



ب) نمودار تابع $y = [x]$ در بازه $[-1, 2)$ به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، این تابع در کل این بازه، صعودی است. توجه کنید تابع روی بازه‌های $(-1, 1)$ ، $[0, 1)$ و $[1, 2)$ نزولی هم هست (زیرا تابع ثابت است).

نکته: کاربرد یکنوایی توابع در حل نامعادلات:

۱) اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و $f(a) < f(b)$ ، آنگاه $a < b$.

۲) اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و $f(a) < f(b)$ ، آنگاه $a > b$.

یعنی توی توابع اکیداً صعودی می‌تونیم اها رو از طرفین نامعادله حذف کنیم؛ ولی توی توابع اکیداً نزولی اگه اها رو از طرفین نامعادله خط بزنیم، باید جهت عوض بشه!

حفظیات:

- دامنه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.
- برد توابع چندجمله‌ای با درجه فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.
- دامنه و برد تابع چندجمله‌ای درجه ۳، برابر $\mathbb{R}$ است.
- نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ ، پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار می‌گیرد.
- تابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.
- به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.
- به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.
- توابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا هستند.
- توابع یکنوا، لزوماً اکیداً یکنوا نیستند.
- به تابعی که نه صعودی و نه نزولی باشند، غیریکنوا می‌گوییم.
- همه توابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک هستند.
- لزومی ندارد هر تابع یک‌به‌یک حتماً اکیداً یکنوا باشد.

خلاصه نموداری درس ۱

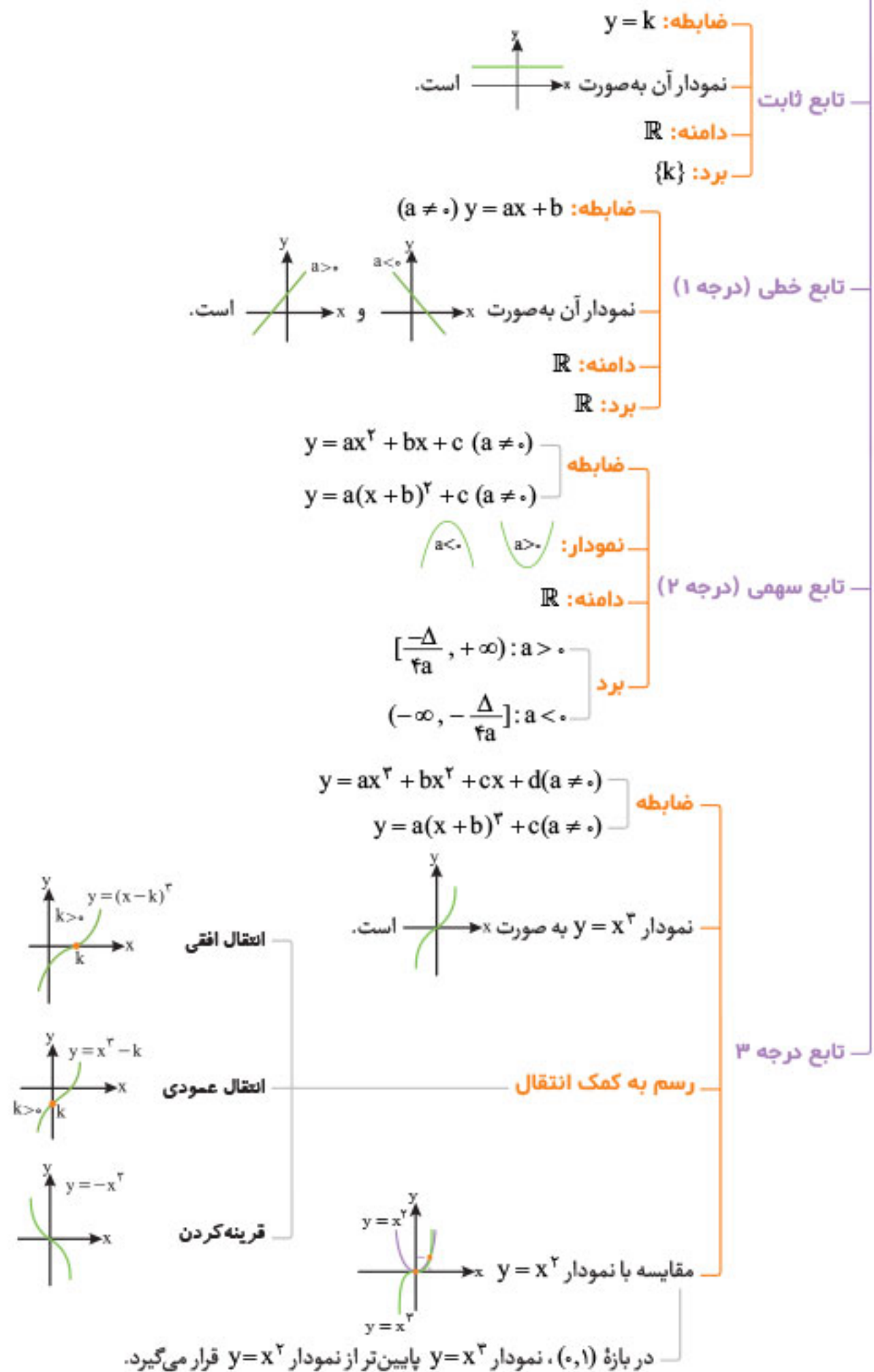
توابع چندجمله‌ای

تعریف: هر تابع به صورت $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ که در آن، n عدد صحیح نامنفی و ضرایب، اعداد حقیقی هستند ($a \neq 0$).

دامنه: $\mathbb{R}$

برد: برد توابع چندجمله‌ای با درجه فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.

مهم‌ترین توابع چندجمله‌ای



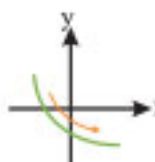
توابع صعودی و نزولی

اکیداً یکنوا

اکیداً صعودی

تعریف: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
نمودار: با حرکت از چپ به راست، همواره رو به بالا حرکت می‌کنیم.


اکیداً نزولی

تعریف: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
نمودار: با حرکت از چپ به راست، همواره رو به پایین حرکت می‌کنیم.


یکنوا

صعودی

تعریف: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$
نمودار: با حرکت از چپ و راست، هیچ‌گاه رو به پایین حرکت نمی‌کنیم.


نزولی

تعریف: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
نمودار: با حرکت از چپ به راست، هیچ‌گاه رو به بالا حرکت نمی‌کنیم.

ثابت: تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی!


غیریکنوا

تعریف: تابعی که روی دامنه‌اش نه صعودی است و نه نزولی.

 مهم‌ترین تابع غیریکنوا $y = \frac{1}{x}$ که نمودار آن به صورت به صورت است.


مهم‌ترین توابع اکیداً یکنوا

اکیداً صعودی

 $y = ax + b$ با شرط $a > 0$
 $y = x^r$
 $y = a^x$
 $y = a^x$ با شرط $a > 1$
 $y = \log_a x$ با شرط $a > 1$
 $y = \log_a x$
 $y = ax + b$ با شرط $a < 0$
 $y = -x^r$
 $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$
 $y = \log_a x$ با شرط $0 < a < 1$
 $y = \log_a x$

اکیداً نزولی

سؤالات امتحانی

سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱. تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است. ☐ ☒ (دی ۱۴۰۱)
۲. تابع $y = \sqrt{3}x^2 - \pi x + 1$ ، یک تابع چندجمله‌ای است. ☐ ☒ (شهریور ۱۴۰۲)
۳. تابع $y = \sqrt{2}x^2 - \frac{2}{p}x$ ، یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است. ☐ ☒ (مشابه خرداد ۱۴۰۱، دی ۱۴۰۰)
۴. دامنه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است. ☐ ☒ (شهریور ۱۴۰۰)
۵. تابع $f(x) = \sin x + 5x^2$ ، یک تابع چندجمله‌ای است. ☐ ☒ (دی ۹۹ - خارج)
۶. تابع $y = 2x^5 - 4x^2 + \sqrt{7}x$ ، یک تابع چندجمله‌ای نیست. ☐ ☒ (خرداد ۹۹ - خارج)
۷. اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = (x-3)^2$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست به دست آورد. ☐ ☒ (دی ۹۸ - خارج)
۸. برد تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 1$ برابر $\mathbb{R}$ است. ☐ ☒
۹. تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست. ☐ ☒ (شهریور ۱۴۰۲)
۱۰. بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. ☐ ☒ (خرداد ۱۴۰۲)
۱۱. تابع $f(x) = -1 - x^2$ در دامنه خود، اکیداً نزولی است. ☐ ☒
۱۲. هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است. ☐ ☒
۱۳. هر تابع یکنوا، یک‌به‌یک است. ☐ ☒ (دی ۱۴۰۱)
۱۴. تابع $f(x) = x^2$ ، تابعی اکیداً صعودی است. ☐ ☒ (خرداد ۱۴۰۱)
۱۵. تابع $y = -x^2 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است. ☐ ☒ (پرتکرار (مشابه دی ۱۴۰۰ - خارج، مشابه خرداد ۱۴۰۰ - خارج، شهریور ۹۸)
۱۶. تابع $y = (\frac{1}{p})^x$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً نزولی است. ☐ ☒ (شهریور ۱۴۰۰ - خارج)
۱۷. تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش، اکیداً نزولی است. ☐ ☒ (شهریور ۱۴۰۰)
۱۸. تابع $f(x) = |x|$ در بازه $(0, +\infty)$ ، صعودی اکید است. ☐ ☒ (دی ۹۸ - خارج)
۱۹. هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا نیست. ☐ ☒ (دی ۹۹ - خارج)
۲۰. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. ☐ ☒ (خرداد ۹۹، دی ۹۷)
۲۱. اگر برای هر دو نقطه a و b از دامنه f که $a < b$ است داشته باشیم $f(a) > f(b)$ ، آن‌گاه f تابعی اکیداً صعودی است. ☐ ☒
۲۲. تابع $f(x) = \frac{-1}{x}$ روی مجموعه اعداد حقیقی غیرصفر، اکیداً صعودی است. ☐ ☒
۲۳. تابع $f = \{(-3, 1), (-4, 0), (2, 5), (0, m)\}$ به‌ازای ۵ عدد صحیح مختلف برای m صعودی است. ☐ ☒
۲۴. تابع $f(x) = |x-1| + |x-2|$ روی بازه $(2, +\infty)$ ، اکیداً صعودی است. ☒ ☐ (+۲۰)
۲۵. تابع $y = [x]$ در بازه $(-2, 2)$ ، اکیداً یکنوا است. ☐ ☒
۲۶. اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم $f(2x) > f(x-1)$ ، آن‌گاه $x > -1$ است. ☒ ☐ (+۲۰)

سؤالات جای خالی

جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید.

۲۷. تابع $f(x) = 2x(x - x^2 + 2) + 2x^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه است.
۲۸. در بازه $(0, 1)$ ، نمودار تابع $y = x^2$ ، از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.
۲۹. تابع $y = (x+1)^2$ در دامنه تعریف خود (صعودی / نزولی) است.
۳۰. نمودار تابع $y = 1 - (x-2)^2$ از ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

(پرتکرار (دی ۱۴۰۱، دی ۱۴۰۰، دی ۹۹)

(خرداد ۹۸)



(خرداد ۹۹ - خارج دی ۹۸)
(شهریور ۹۹)

۳۱. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع نامیده می‌شود.

۳۲. توابع اکیداً یکنوا، همواره هستند.

۳۳. تابع $y = x^2 - 4x + 1$ در بازه نزولی است.

۳۴. تابع $y = x + |x|$ روی $\mathbb{R}$ ، تابعی است. (صعودی / اکیداً صعودی)

۳۵. تابع $y = x - |x|$ در بازه $(a, +\infty)$ ، هم صعودی و هم نزولی است. حداقل مقدار a ، برابر است.

۳۶. تابع $f(x) = x^2 |x|$ در بازه $(a, +\infty)$ ، صعودی است. حداقل مقدار a ، برابر است.

مسائل

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۳۷. به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد هر یک از آن‌ها را مشخص کنید.

(الف) $y = (x+1)^3 - 2$

(ب) $y = -(x-1)^3 + 1$

(پ) $y = -x^3 + 2$

(ت) $y = (-x+2)^3 - 3$

مقایسه نمودارهای $y = x^3$ و $y = x^3$ در کتاب درسی اومده؛ در همین راستا دو سؤال زیر رو بررسی کنید:

(مشابه فعالیت کتاب درسی)

۳۸. نمودار توابع $y = x$ ، $y = x^2$ و $y = x^3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید:

(الف) در کدام بازه‌ها، نمودار $y = x^3$ پایین‌تر از نمودارهای توابع $y = x^2$ و $y = x$ قرار می‌گیرد؟

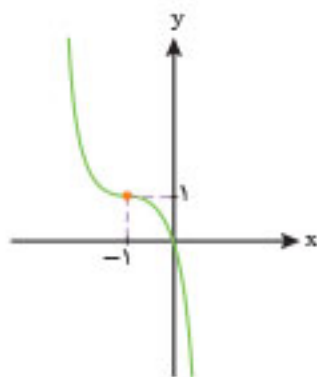
(ب) در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y = x$ پایین‌تر از نمودارهای توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ قرار می‌گیرد؟

۳۹. با رسم نمودار توابع $y = -x^2$ و $y = -x^3$ ، مشخص کنید در کدام بازه (ها) نمودار تابع $y = -x^3$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = -x^2$ قرار می‌گیرد؟

توی رسم توابع درجه ۳ به فرم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

۴۰. نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را رسم کنید.

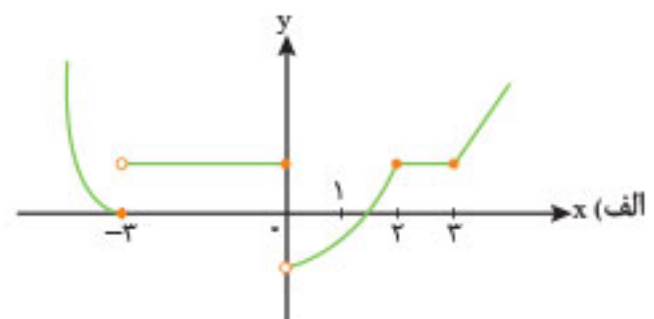
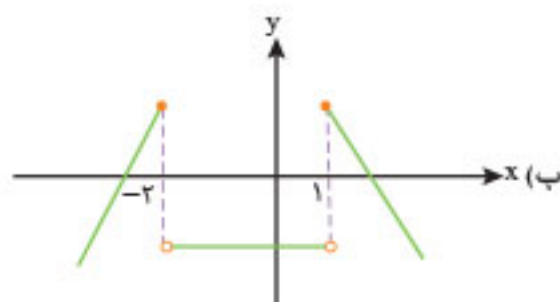
۴۱. نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ به صورت شکل مقابل است. مقادیر a ، b ، c و d را مشخص کنید.



۴۲. اگر تابع $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 4), (-1, k)\}$ اکیداً نزولی باشد، حدود k را به دست آورید.

۴۳. در هر کدام از قسمت‌های زیر، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی)، در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) و در چه بازه‌هایی هم صعودی و هم نزولی است.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



توی سؤال زیر، شرط صعودی و نزولی بودن چندجمله‌ای‌های درجه اول و دوم و سوم رو یک‌جا بررسی می‌کنیم.

۴۴. مقادیر m را طوری مشخص کنید که:

(الف) تابع $y = mx + 2$ ، هم صعودی و هم نزولی باشد.

(ب) تابع $y = -x^2 + mx + 1$ در بازه $[2, +\infty)$ ، اکیداً نزولی باشد.

(پ) تابع $y = (-9 + m^2)x^3 + 5$ روی $\mathbb{R}$ ، اکیداً نزولی باشد.

توی سؤالاتی که خودتون باید نمونه‌ای رسم کنید یا مثال بزنید، معمولاً بی‌شمار جواب وجود داره!

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۵. روی بازه $(0, 2)$ نمودار تابعی رسم کنید که:

(پ) غیریکنوا باشد.

(ب) اکیداً نزولی باشد.

(الف) اکیداً صعودی باشد.

۴۶. نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ اکیداً صعودی باشد، ولی روی $(-2, 2)$ اکیداً صعودی نباشد. (مشابه تمرین کتاب درسی)

در سؤال مهم زیر، اول باید بلد باشید نمودار هر یک از توابع چگونه رسم می‌شود و سپس با توجه به نمودار اون، صعودی یا نزولی بودن رو مشخص کنید.

۴۷. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس مشخص کنید هر کدام از آن‌ها در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند؟

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

ب) $y = x^2 + 2x$

ت) $y = |x - 2|$

ج) $y = x - \frac{x}{|x|}$ (+۲۰)

ح) $y = x - [x]$ (+۲۰)

الف) $y = x^2 - 1$

پ) $y = \frac{1}{x-1}$

ث) $y = (x-1)|x|$ (برگرفته از کنکور تجربی اردیبهشت ۱۴۰۳) (+۲۰)

چ) $y = \sqrt{x-1} + 1$

۴۸. نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید و مشخص کنید هر یک از آن‌ها در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۴۹. نمودارهای توابع $y = 2^{x-1}$ ، $y = (\frac{1}{2})^{x+1}$ و $y = -2^x$ را رسم کنید و بگویید هر کدام در کدام بازه (ها) صعودی و در کدام بازه (ها) نزولی هستند؟

۵۰. الف) نمودار تابع $y = \log_a x$ را در هر دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ رسم کنید و یکنوایی آن‌ها را بررسی کنید.

ب) نمودار تابع $y = -\log_a x$ را در همین دو حالت رسم کنید و یکنوایی آن‌ها را بررسی کنید.

پ) با مقایسه قسمت‌های «الف» و «ب» چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵۱. نمودار تابع $y = -\log(x-2) + 1$ را رسم کنید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

۵۲. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 2 \\ 3 & ; -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2+1 & ; x < -1 \end{cases}$$

۵۳. (+۲۰) حدود m را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & ; x \geq 1 \\ x+m & ; x < 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد.

۵۴. (+۲۰) تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; x \geq 2 \\ x^2-2x+2 & ; 0 < x < 2 \\ 2 & ; x \leq 0 \end{cases}$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چه قدر است؟

کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات رو در سؤال زیر می‌بینین.

۵۵. (+۲۰) اگر $f(a^2+1) < f(3a-1)$ و تابع f اکیداً صعودی باشد، حدود a را بیابید.

۵۶. از نامعادله $3^{2x+1} \leq \frac{1}{27}$ حدود x را بیابید.

ترکیب توابع

درس ۲

تعریف: فرض کنید f و g دو تابع باشند، به طوری که برد تابع f و دامنه تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند.

برای دو تابع f و g ، تابع مرکبی که با نماد $f \circ g$ نمایش داده می‌شود، به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعریف می‌شود.

نحوه تشکیل $(f \circ g)(x)$: ابتدا x را به تابع g می‌دهیم، سپس مقدار به دست آمده، یعنی $g(x)$ را به تابع f می‌دهیم تا به $f(g(x))$ برسیم.

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

ورودی x و خروجی $(f \circ g)(x)$ است.

(مشابه خرداد ۱۴۰۱)

$$\text{ورودی} \rightarrow 2x-2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \text{خروجی}$$

سؤال الف) اگر ورودی ماشین شکل زیر $\frac{11}{3}$ باشد، خروجی آن چه قدر است؟

ب) اگر خروجی این ماشین $\frac{4}{3}$ باشد، ورودی آن چه قدر است؟

جواب الف) ورودی همان x است. وقتی $x = \frac{11}{3}$ باشد، $2x-2$ برابر $2(\frac{11}{3})-2 = 9$ است. حال عدد ۹ را به $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ می‌دهیم تا خروجی به دست بیاید:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x=9} \frac{9}{\sqrt{9+1}} = \frac{9}{3+1} = \frac{9}{4}$$

پاسخ فصل اول

۱. درست زیرا در تابع $y = 2x(1-3x^2) + 1 = 2x - 6x^3 + 1$ بزرگترین توان x ، ۳ است.

۲. درست هم عدد $\sqrt{3}$ و هم عدد π ، جزء ضرایب هستند و مشکلی ایجاد نمی‌کنند!

۳. درست تابع $y = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{4}x$ یک دو جمله‌ای است که به دلیل وجود x^2 ، درجه ۳ است.

۴. درست دامنه همه توابع چند جمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

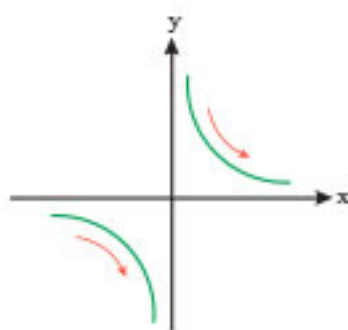
۵. نادرست به دلیل وجود $\sin x$ ، این تابع چند جمله‌ای نیست.

۶. نادرست $\sqrt{y}$ ضریب است. این تابع چند جمله‌ای است.

۷. درست x لجباز است و برعکس عمل می‌کند!

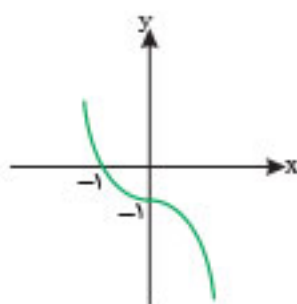
۸. درست برد همه توابع چند جمله‌ای با درجه فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.

۹. نادرست با توجه به نمودار $y = \frac{1}{x}$ ، این تابع در دامنه‌اش غیریکنواست.



۱۰. درست همه توابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی هستند و بی‌شمار تابع ثابت وجود دارد.

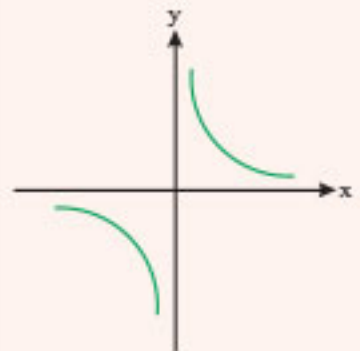
۱۱. درست نمودار آن به صورت مقابل و روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



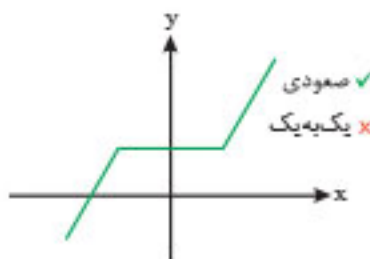
۱۲. درست

توجه: عکس این موضوع درست

نیست. مثال نقض آن هم تابع $y = \frac{1}{x}$ است که تابعی یک‌به‌یک است ولی اکیداً یکنوا نیست.

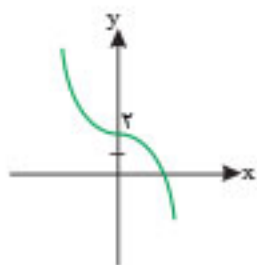


۱۳. نادرست تابع یکنوا یعنی تابع صعودی یا نزولی و چون در این‌گونه توابع، قسمتی از تابع می‌تواند تابع ثابت باشد، پس یک‌به‌یک نیست.



۱۴. درست

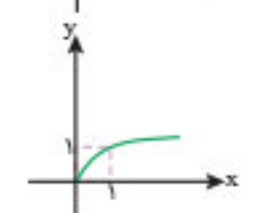
۱۵. نادرست نمودار $y = -x^2 + 2$ به صورت مقابل است و روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



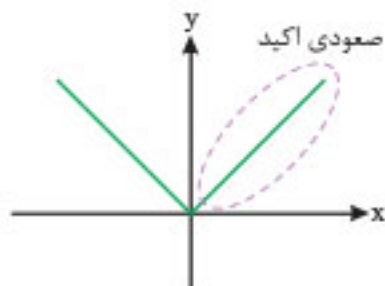
۱۶. درست نمودار تابع $y = (\frac{1}{x})^x$ به صورت مقابل است و در دامنه خود اکیداً نزولی است.



۱۷. نادرست تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش، یعنی بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی و نمودار آن به صورت مقابل است:



۱۸. درست نمودار $f(x) = |x|$ ، به صورت زیر است:



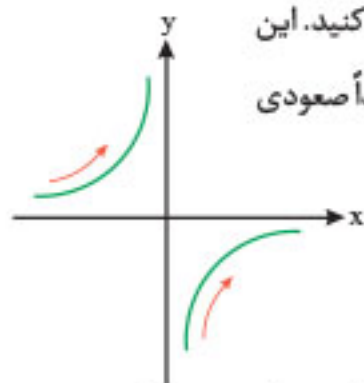
این تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۱۹. نادرست هر تابع یکنوا لزوماً اکیداً یکنوا نیست؛ ولی هر تابع اکیداً یکنوا، همیشه یکنوا است.

۲۰. درست دیگه باید کاملاً این موضوع رو یاد گرفته باشی!

۲۱. نادرست f اکیداً نزولی $(\forall a, b \in f, a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$

۲۲. نادرست به نمودار تابع $y = -\frac{1}{x}$ توجه کنید. این تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، ولی روی $\mathbb{R} - \{0\}$ غیریکنواست.



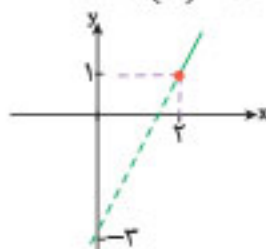
۲۳. درست ابتدا طول زوج مرتب‌ها را به ترتیب کم به زیاد مرتب می‌کنیم. x ها افزایش می‌یابند

$f = \{(-4, 0), (-3, 1), (0, m), (2, 5)\} \Rightarrow 1 \leq m \leq 5$
باید لا‌ها نیز افزایش یابند یا ثابت بمانند

m می‌تواند ۵ مقدار صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را اختیار کند.

۲۴. درست در بازه $(2, +\infty)$ هر دو عبارت $x-1$ و $x-2$ مثبت هستند؛ پس خودشان از داخل قدرمطلق خارج می‌شوند.

$x > 2 \rightarrow f(x) = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

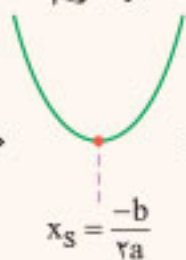


نمودار $y = 2x - 3$ به صورت مقابل است و تابعی اکیداً صعودی است.



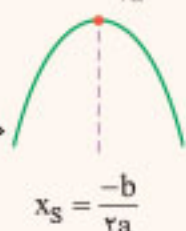
نکته: در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ داریم:

۱ $a > 0 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} (-\infty, -\frac{b}{2a}] \Rightarrow \text{اکیداً نزولی} \\ [-\frac{b}{2a}, +\infty) \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \end{cases}$$

۲ $a < 0 \Rightarrow$

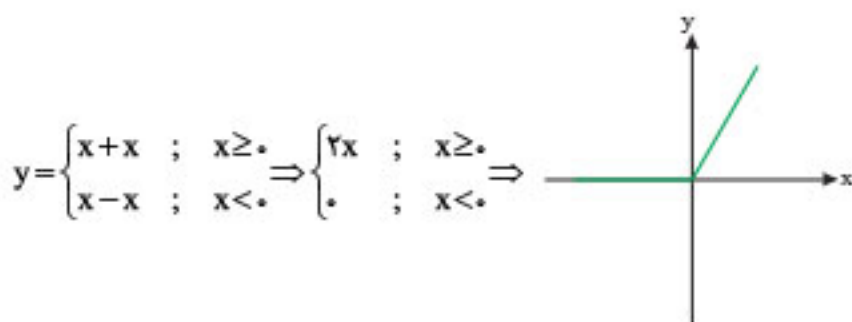


$$\Rightarrow \begin{cases} (-\infty, -\frac{b}{2a}] \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ [-\frac{b}{2a}, +\infty) \Rightarrow \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

$$y = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

با توجه به نکته بالا، این تابع در بازه $(-\infty, 2]$ نزولی (اکیداً نزولی) است.

۳۴. صعودی؛ نمودار تابع $y = x + |x|$ به صورت زیر است:

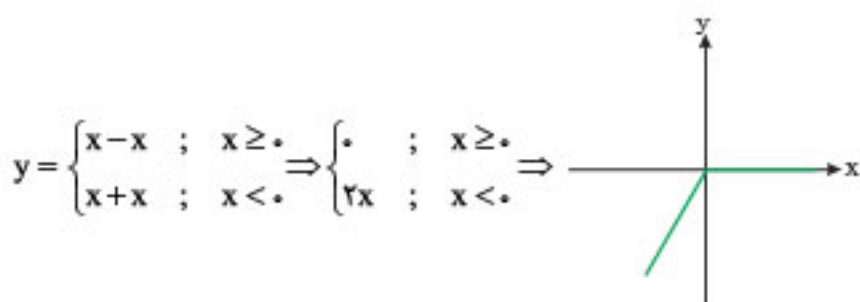


پس این تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است.

۲۵. صفر

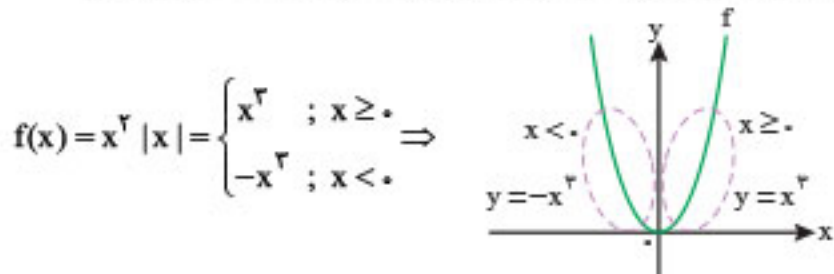
دقت کنید: تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است.

نمودار $y = x - |x|$ را رسم می‌کنیم:

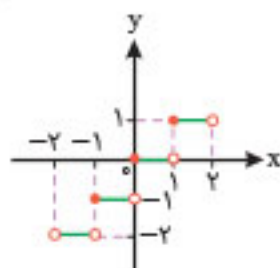


این تابع در بازه $(0, +\infty)$ تابع ثابت صفر است؛ پس حداقل مقدار a برابر صفر است.

۳۶. صفر؛ تابع $f(x) = x^2 |x|$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم و با توجه به نمودار آن، بازه صعودی را مشخص می‌کنیم:



با توجه به نمودار، f در بازه $(0, +\infty)$ صعودی است؛ بنابراین حداقل مقدار a ، صفر است.



۲۵. **نادرست** تابع $y = [x]$ در بازه $(-2, 2)$

یکنوا (صعودی) است، ولی اکیداً یکنوا نیست. به نمودار آن توجه کنید:

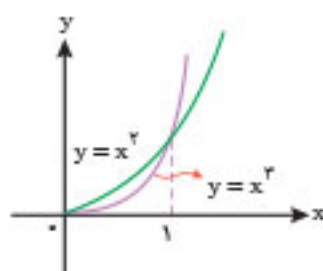
۲۶. **نادرست** در توابع اکیداً نزولی داریم:

یعنی اگر f از طرفین نامعادله خط بخورند، جهت نامعادله عوض می‌شود؛ پس:

$$f(2x) > f(x-1) \Rightarrow 2x < x-1 \Rightarrow x < -1$$

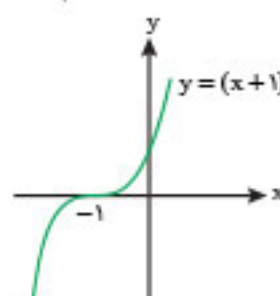
۲۷. عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = 2x^2 - 2x^2 + 4x + 2x^2 = 2x^2 + 4x$$



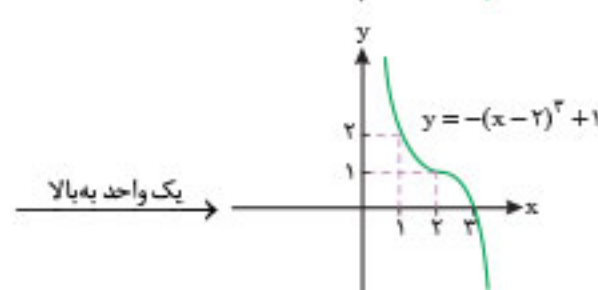
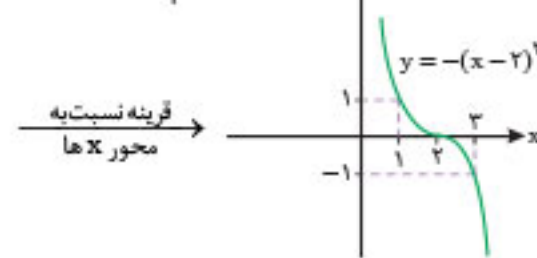
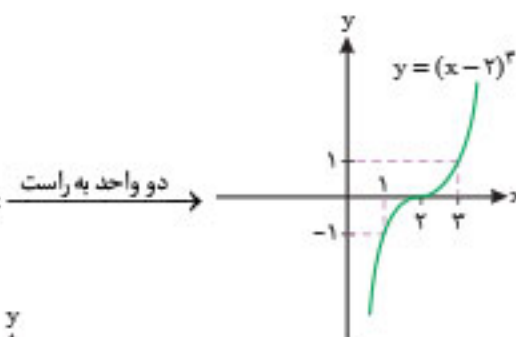
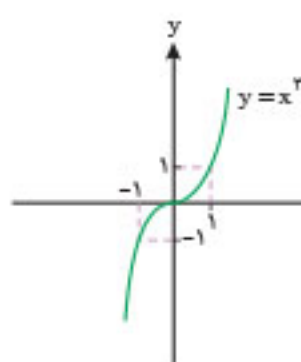
۲۸. پایین‌تر؛ با توجه به نمودار این دو تابع

در بازه $(0, 1)$ ، نمودار $y = x^2$ پایین‌تر از نمودار $y = x$ قرار می‌گیرد.



۲۹. صعودی؛ نمودار $y = (x+1)^2$ همان نمودار $y = x^2$ است که یک واحد به سمت چپ رفته است.

۳۰. سوم؛ نمودار تابع $y = 1 - (x-2)^2$ را به کمک $y = x^2$ رسم می‌کنیم:



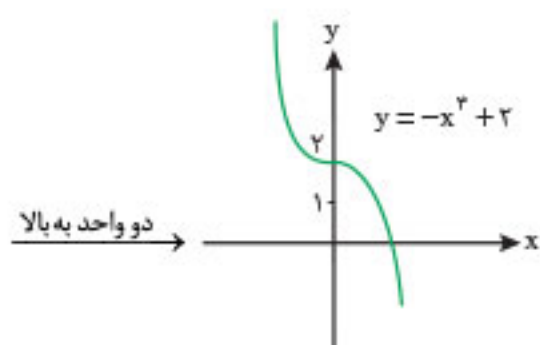
بنابراین نمودار این تابع از ناحیه سوم نمی‌گذرد. (امتداد آن از ناحیه دوم می‌گذرد).

۳۱. ثابت

۳۲. یکنوا؛ یعنی توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی به ترتیب صعودی و نزولی هم محسوب می‌شوند.

۳۳. $(-\infty, 2]$

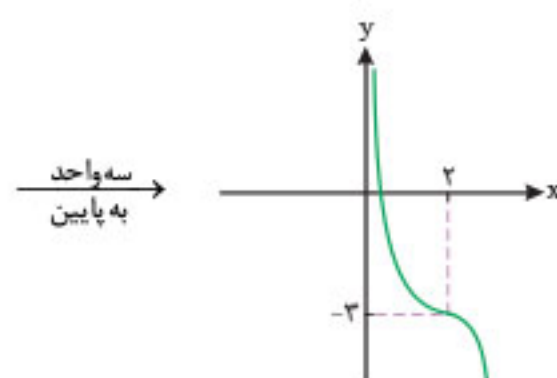
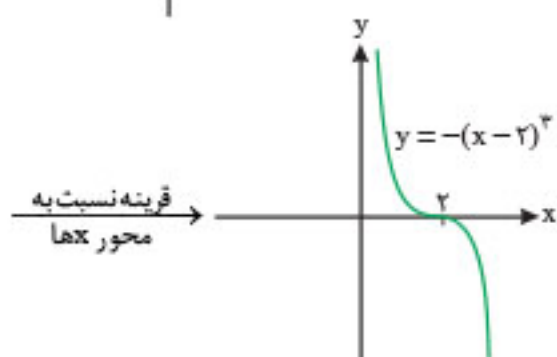
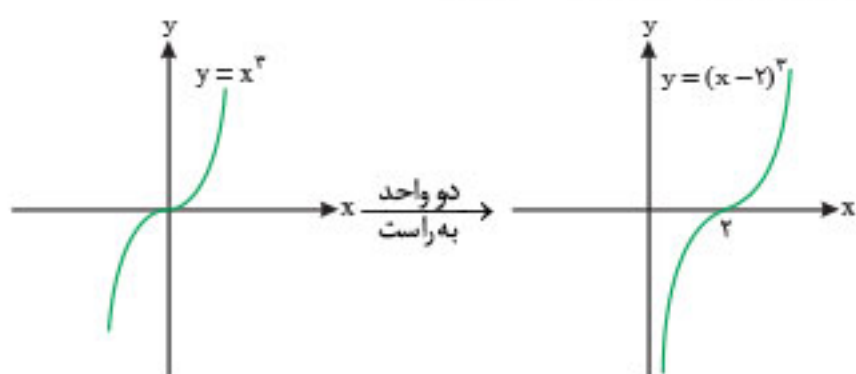




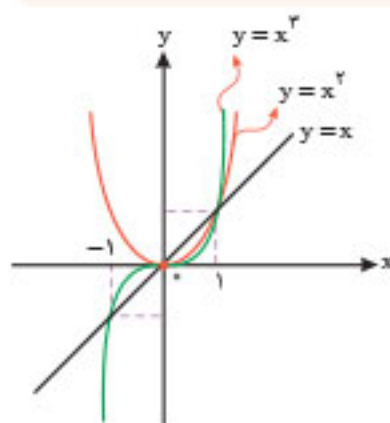
ت ابتدا از منفی داخل پرانتز فاکتور می‌گیریم، ضابطه آن برابر می‌شود با:

$$y = -(x-2)^3 - 3 \Rightarrow y = -(x-2)^3 - 3$$

حال برای رسم نمودار آن به کمک نمودار $y = x^3$ ، ابتدا آن را ۲ واحد به راست می‌بریم، سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم؛ در انتها نمودار را ۳ واحد به پایین می‌آوریم. نمودار آن به شکل زیر است:



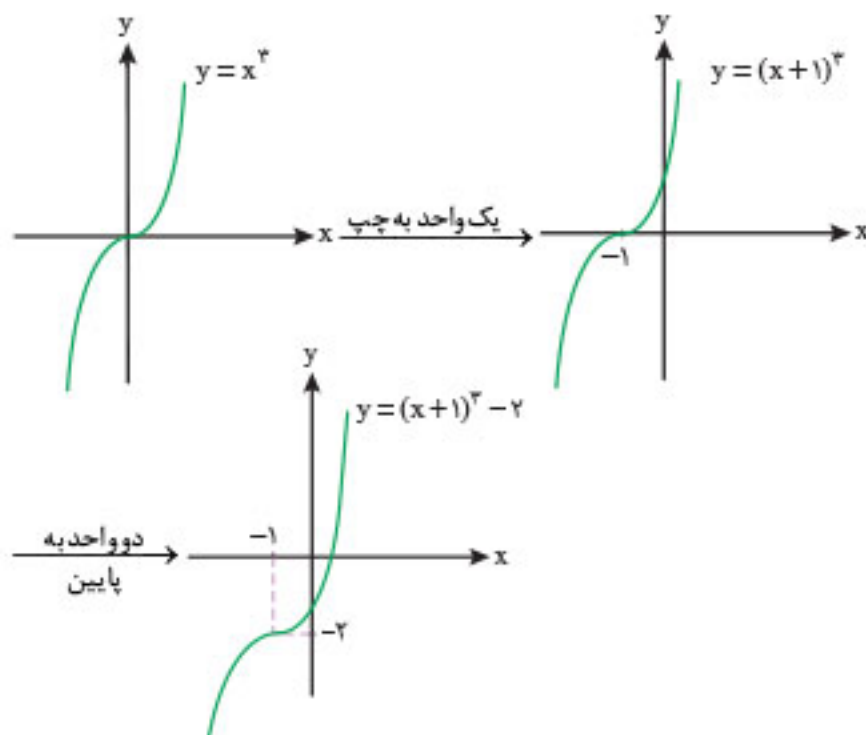
توجه: دامنه و برد همه توابع بالا برابر $\mathbb{R}$ است.



الف نمودارهای توابع $y = x^3$ ، $y = x^3 + 1$ و $y = x^3 - 1$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(0, 1)$ ، نمودار $y = x^3$ پایین‌تر از دو نمودار $y = x^3 + 1$ و $y = x^3 - 1$ قرار دارد.

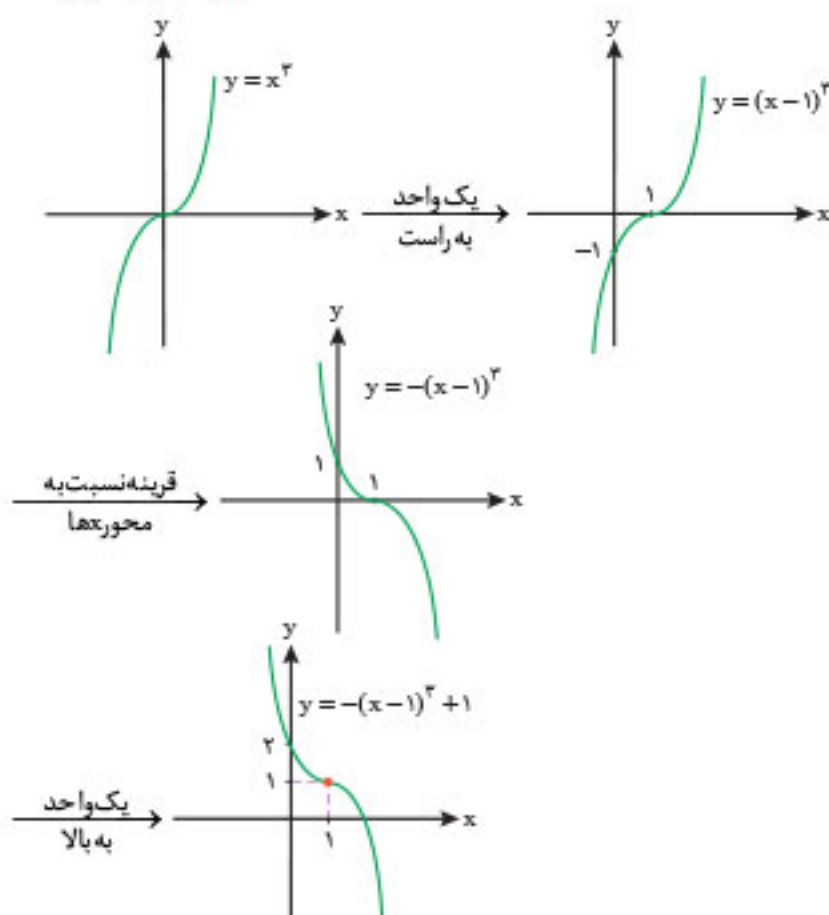
ب با توجه به نمودار رسم شده در بازه‌های $(-1, 0)$ و $(1, +\infty)$ ، نمودار تابع $y = x$ پایین‌تر از دو نمودار $y = x^3$ و $y = x^3 + 1$ قرار دارد.

الف ۳۷. ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را رسم کرده و سپس ۱ واحد به سمت چپ روی محور x ها و ۲ واحد به سمت پایین روی محور y ها انتقال می‌دهیم:

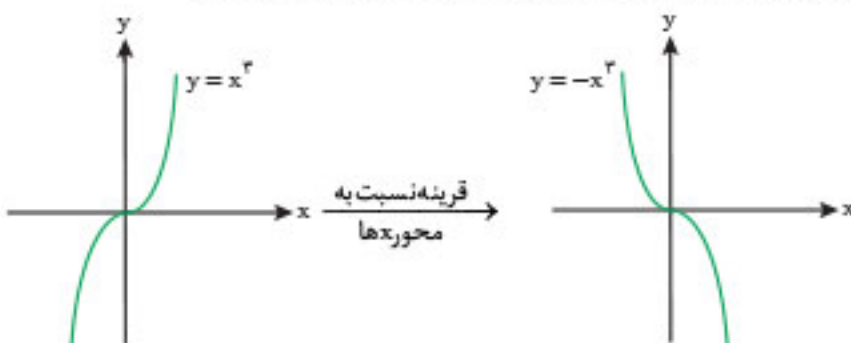


ب ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم کرده و ۱ واحد به سمت راست روی محور x ها انتقال می‌دهیم، سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و در آخر ۱ واحد به سمت بالا، روی محور y ها انتقال می‌دهیم:

$$y = -(x-1)^3 + 1$$



پ نمودار $y = x^3$ را رسم کرده و نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم؛ سپس ۲ واحد به سمت بالا، روی محور y ها انتقال می‌دهیم:

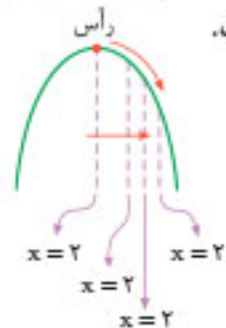




ب نمودار تابع در بازه $(-\infty, -2]$ اکیداً صعودی و صعودی است. در بازه $(-2, 1)$ تابع ثابت، یعنی هم صعودی و هم نزولی است. در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی و نزولی است.

الف ۴۴. تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد، تابعی ثابت است؛ پس اگر $m = 0$ باشد، تابع $y = 2$ خواهد شد که هم صعودی است و هم نزولی!

ب تابع $y = -x^2 + mx + 1$ یک سهمی ماکزیمم دار به صورت است؛ چون این تابع در بازه $[2, +\infty)$ اکیداً نزولی شده است، می توان در نظر گرفت که طول رأس سهمی برابر با ۲ و یا کمتر از ۲ بوده است.

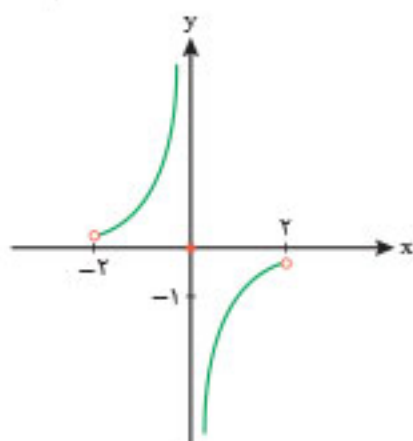
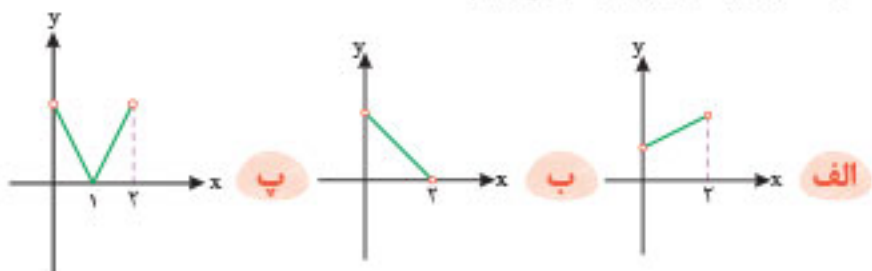


$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-m}{2(-1)} = \frac{m}{2} \leq 2 \Rightarrow m \leq 4$$

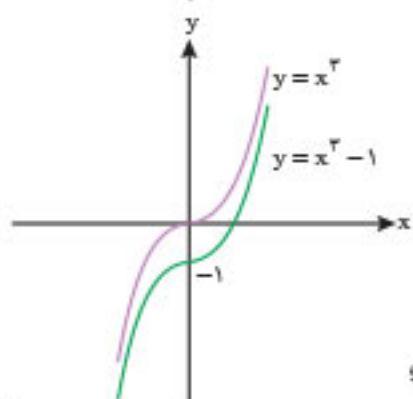
پ اگر ضریب x^2 منفی شود، تابع درجه سوم $y = (-9 + m^2)x^2 + 5$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی خواهد بود؛ پس:

$$-9 + m^2 < 0 \Rightarrow m^2 < 9 \Rightarrow -3 < m < 3$$

۴۵. نمودارهایی که رسم می کنیم، در این مسئله می تواند متفاوت باشد؛ برای نمونه نمودارهای زیر را رسم می کنیم:



۴۶. نمودار تابع $y = f(x)$ در بازه $(-2, 2)$ به شکل مقابل است. این تابع در بازه $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ اکیداً صعودی است؛ ولی روی $(-2, 2)$ اکیداً صعودی نیست و غیر یکنواست. این مسئله هم می تواند جواب های مختلفی داشته باشد.



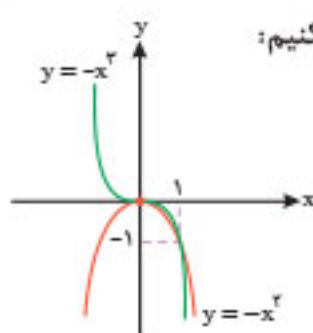
۴۷. **الف** تابع $y = x^3 - 1$ یک تابع درجه سوم است. ابتدا نمودار $y = x^3$ را رسم می کنیم، سپس آن را ۱ واحد به سمت پایین روی محور y ها انتقال می دهیم؛ این تابع، روی $\mathbb{R}$ صعودی است. (البته این تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است؛

ولی چون توی صورت سؤال صعودی یا نزولی بودن خواسته شده بود و توابع اکیداً صعودی، صعودی هم هستند؛ پس صرفاً می گوییم صعودی.)

ب نمودار تابع $y = x^2 + 2x$ ، نمودار یک سهمی است. به ضابطه تابع ۱ واحد اضافه و کم می کنیم تا آن را به صورت مربع کامل در بیاوریم:

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 1$$

۳۹. نمودارهای $y = -x^2$ و $y = -x^2$ را رسم می کنیم؛ با توجه به نمودارها، نمودار تابع $y = -x^2$ در بازه $(1, +\infty)$ پایین تر از نمودار تابع $y = -x^2$ قرار می گیرد.

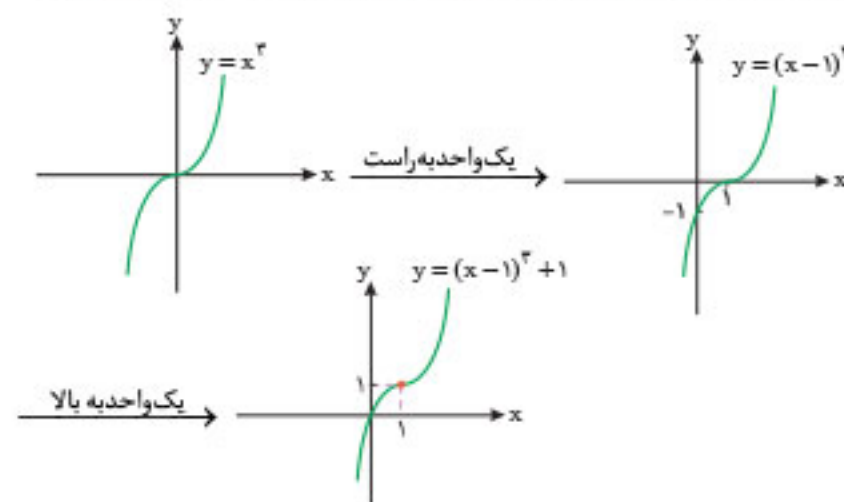


توجه: دو نمودار در نقاط $(0, 0)$ و $(1, -1)$ با هم متقاطع هستند.

۴۰. به کمک اتحاد مکعب دو جمله ای سعی می کنیم آن را به فرم $y = a(x+b)^2 + c$ تبدیل کنیم؛ پس به آن ۱ واحد اضافه و کم می کنیم:

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$$

حال به کمک انتقال، نمودار آن را از روی نمودار تابع $y = x^2$ رسم می کنیم:



۴۱. اگر فرم انتقالی تابع درجه سوم را به صورت $y = a(x+b)^2 + c$ در نظر بگیریم، مشاهده می کنیم:

۱ نمودار تابع درجه سوم، یک واحد به چپ و یک واحد به بالا رفته است؛ یعنی:

$$y = a(x+1)^2 + 1$$

۲ این نمودار از مبدأ مختصات می گذرد؛ یعنی $(0, 0)$ در ضابطه آن صدق می کند:

$$(0, 0) \rightarrow 0 = a(0+1)^2 + 1 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

در نتیجه داریم:

$$y = -(x+1)^2 + 1 = -(x^2 + 2x + 1) + 1 = -x^2 - 2x - 1 + 1 = -x^2 - 2x$$

$a=-1 \quad b=-1 \quad c=-1 \quad d=0$

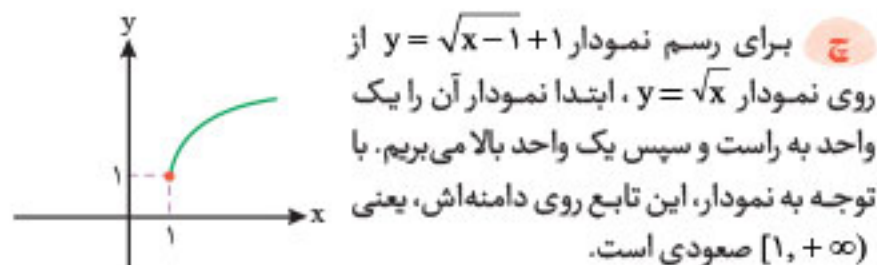
۴۲. ابتدا اعداد موجود در دامنه تابع f را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم:

$$f = \{(-2, 5), (-1, k), (0, 4), (1, 2)\}$$

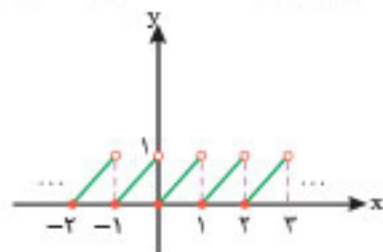
چون تابع اکیداً نزولی است، باید با افزایش x ها، y ها کاهش پیدا کنند؛ پس k باید از ۵ کمتر و از ۴ بیشتر باشد، در نتیجه $4 < k < 5$.

۴۳. **الف** نمودار تابع در بازه $(-\infty, -2]$ اکیداً نزولی و در بازه های $(-2, 3]$ و $(3, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه های $(-3, 0]$ و $(0, 2]$ و $(2, 3]$ تابع ثابت است. صعودی است.

توجه: در بازه های $(-3, 0]$ و $(2, 3]$ ، تابع ثابت است که هم صعودی محسوب می شود و هم نزولی!



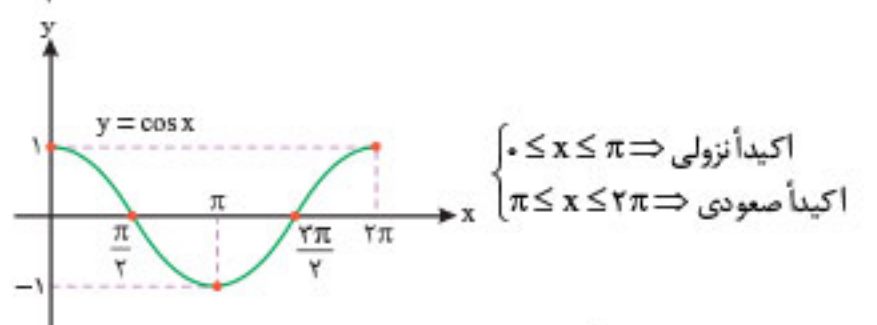
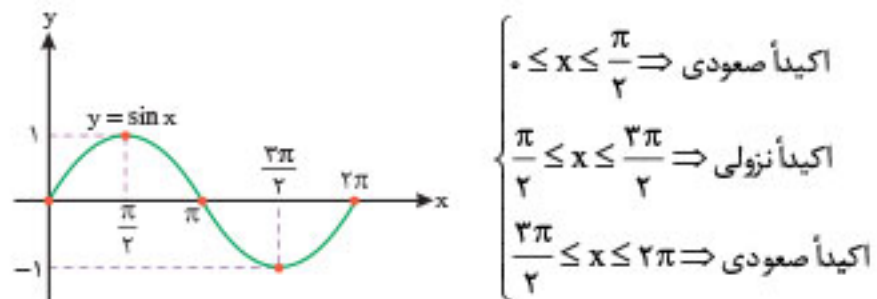
ح با عددگذاری نمودار تابع $y = x - [x]$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



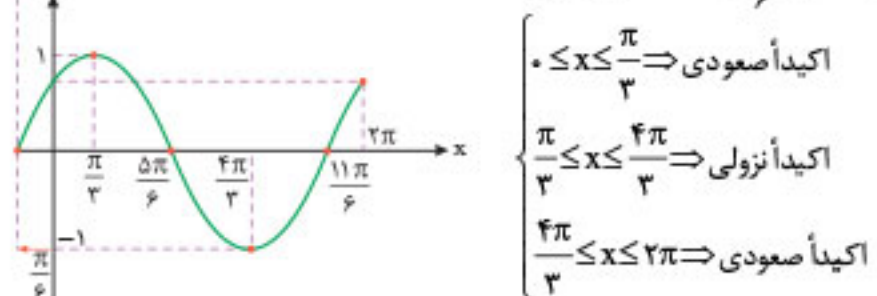
تذکره: تابع $x - [x]$ همیشه بین صفر و یک است.

این تابع در بازه‌های $\dots, [-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1, 2), \dots$ صعودی است، ولی در کل غیریکنوا است.

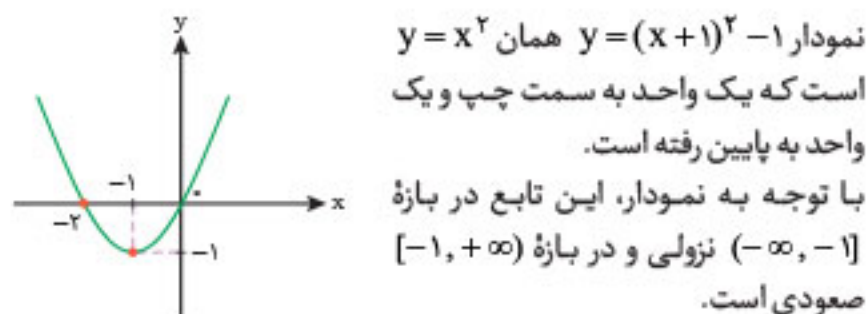
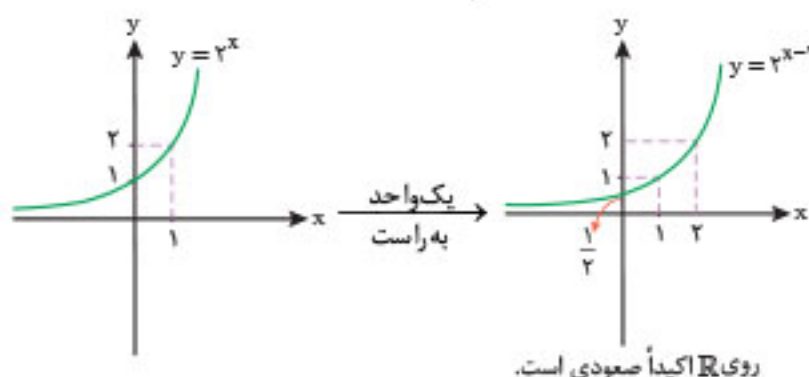
۴۸. نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر است:



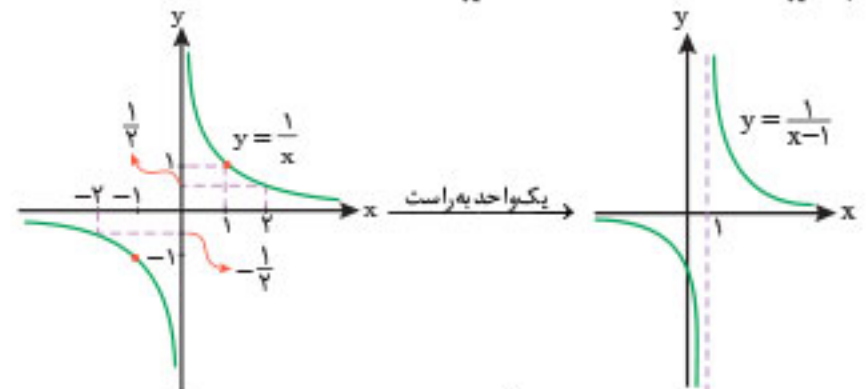
برای رسم نمودار تابع $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ، کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ به سمت چپ ببریم.



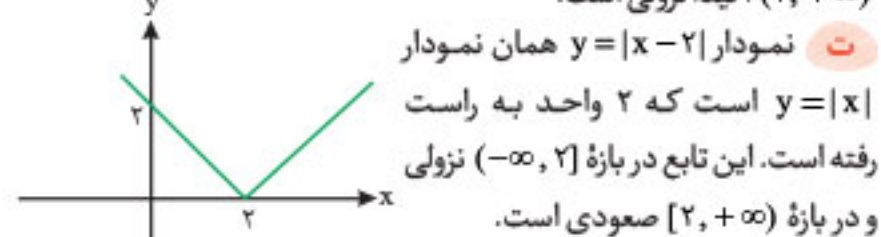
۴۹. نمودارهای $y = 2^x$ ، $y = (\frac{1}{2})^{x+1}$ و $y = -2^x$ به صورت زیر هستند:



پ تابع $y = \frac{1}{x}$ یک تابع گویا (هموگرافیک) است که در $x = 0$ (ریشه مخرج) تعریف نشده است. نمودار آن به شکل زیر است. برای رسم نمودار $y = \frac{1}{x-1}$ ، کافی است نمودار $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به راست ببریم.

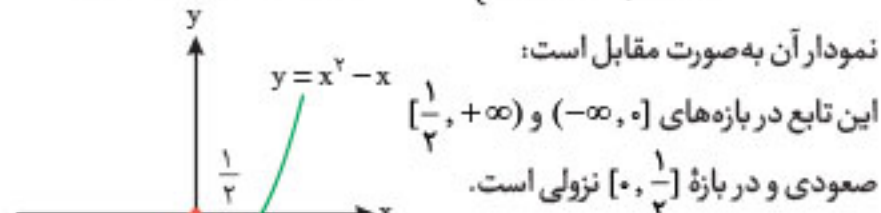


با توجه به نمودار، تابع $y = \frac{1}{x-1}$ در هر کدام از بازه‌های $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



ث تابع $y = (x-1)|x|$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

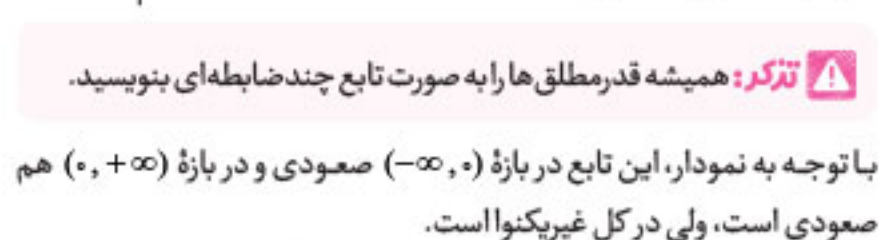
$$y = \begin{cases} (x-1)x & ; x \geq 0 \\ (x-1)(-x) & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2 - x & ; x \geq 0 \\ -x^2 + x & ; x < 0 \end{cases}$$

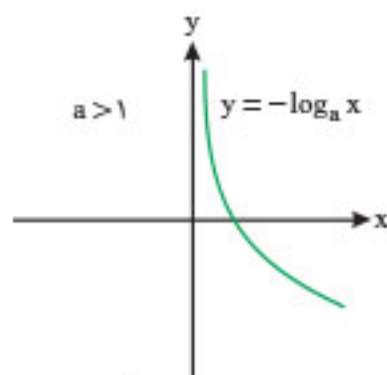


ج تابع $y = x - \frac{x}{|x|}$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} x - \frac{x}{x} & ; x > 0 \\ x - \frac{x}{(-x)} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x-1 & ; x > 0 \\ x+1 & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار آن به صورت مقابل است:



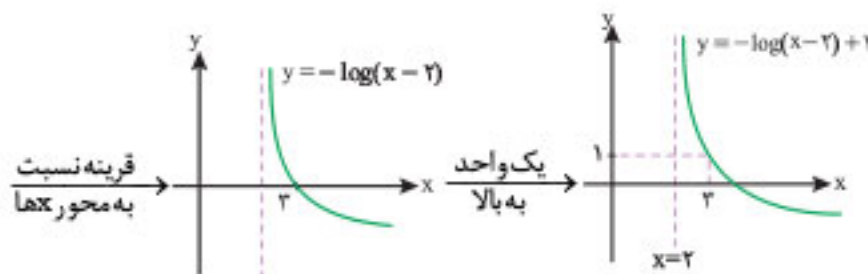
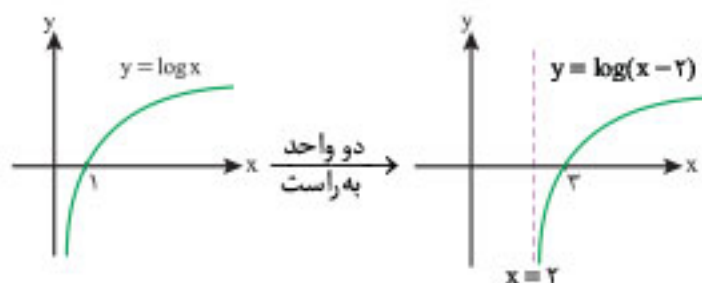


این تابع روی دامنه‌اش، یعنی $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

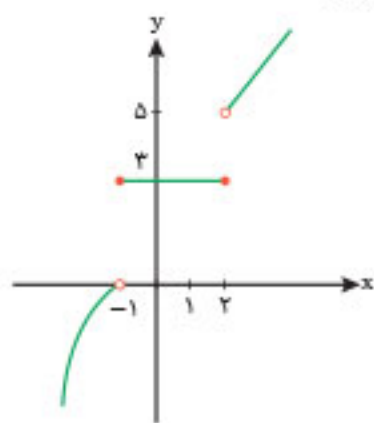
پ ۱) اگر $f(x) = \log_a x$ اکیداً صعودی باشد، $g(x) = -\log_a x$ اکیداً نزولی خواهد بود.

۲) اگر $f(x) = \log_a x$ اکیداً نزولی باشد، $g(x) = -\log_a x$ اکیداً صعودی خواهد بود. (علامت منفی جهت یکنوایی رو عوض می‌کند)

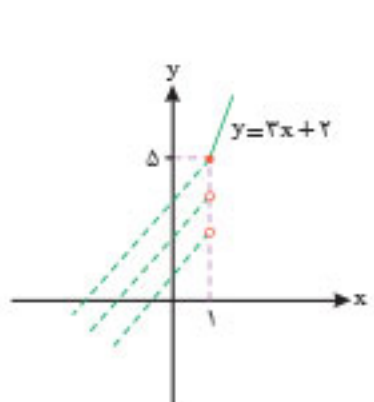
۵۱) نمودار تابع $y = -\log(x-2) + 1$ را به کمک انتقال از روی نمودار تابع $y = \log x$ رسم می‌کنیم:



این تابع روی دامنه‌اش، یعنی $x > 2$ اکیداً نزولی است.



۵۲) برای رسم نمودار تابع چندضابطه‌ای f ، نمودار خط $y = 2x + 1$ را در بازه $x > 2$ ، نمودار $y = 3$ را در بازه $-1 \leq x \leq 2$ و نمودار سهمی $y = -x^2 + 1$ را در بازه $x < -1$ رسم می‌کنیم؛ این تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است و در بازه $[-1, 2]$ نزولی است. این تابع در بازه $[-1, 2]$ تابع ثابت است که هم صعودی و هم نزولی است.

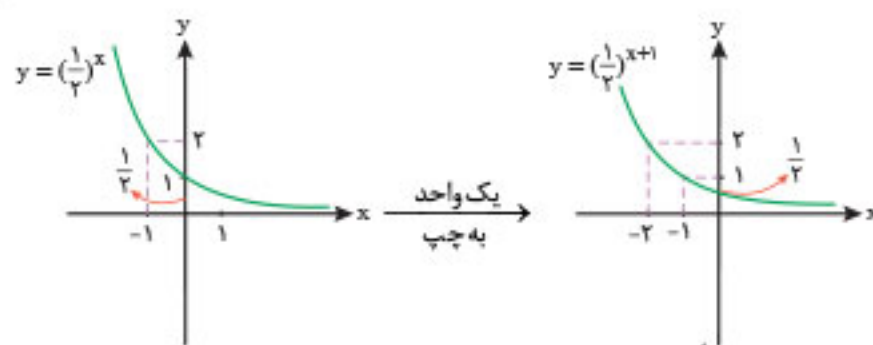


۵۳) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 1 \\ x+m & x < 1 \end{cases}$ به صورت مقابل است؛ مقدار $f(x) = x+m$ در $x=1$ برابر $1+m$ است.

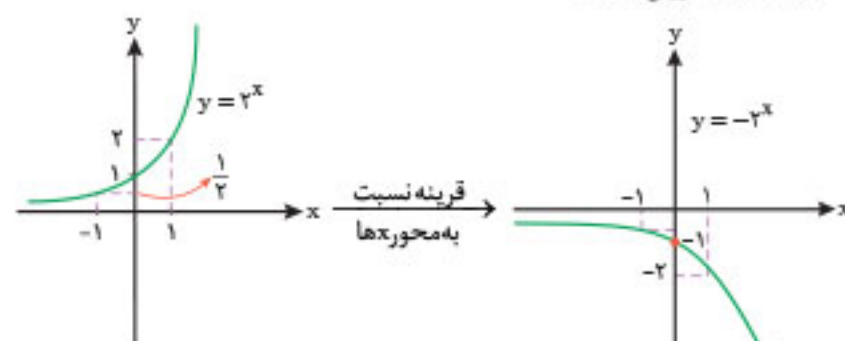
با توجه به نمودار، برای این که f همواره اکیداً صعودی باشد، باید:

$$1+m \leq 5 \Rightarrow m \leq 4$$

توجه: یعنی عرض ضابطه پایینی در $x=1$ باید پایین‌تر از عرض ضابطه بالایی در $x=1$ باشد.



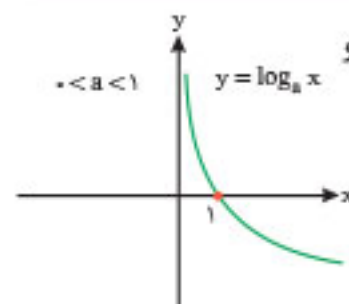
روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.



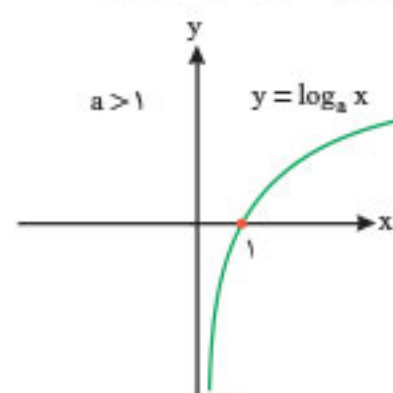
روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است.

نتیجه: توابع به فرم $y = a^x$ که در آن‌ها $a > 1$ است، توابع اکیداً صعودی هستند. اگر ضابطه آن‌ها در یک منفی ضرب شود، اکیداً نزولی می‌شوند. (همین نکته در رابطه با توابع به فرم $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ نیز صدق می‌کند؛ یعنی این توابع اکیداً نزولی هستند و اگر در یک منفی ضرب شوند، اکیداً صعودی خواهند شد.)

۵۰ الف) نمودار تابع $y = \log_a x$ را در دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ رسم می‌کنیم:

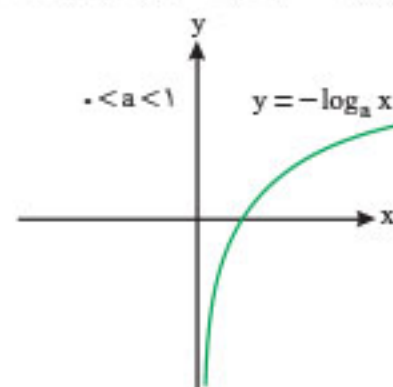


روی دامنه‌اش، یعنی بازه $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.



روی دامنه‌اش، یعنی $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

ب) نمودار تابع $y = -\log_a x$ قرینه نمودار $y = \log_a x$ نسبت به محور x هاست.



این تابع روی دامنه‌اش، یعنی $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۶۴. درست $f(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(f(x)) = f(2 - |x - 2|) = 2 - |2 - |x - 2|| = 2 - ||x - 2||$$

$$\xrightarrow{|-A|=|A|} 2 - |x - 2| = f(x)$$

۶۵. درست با توجه به تعریف دامنه fog داریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

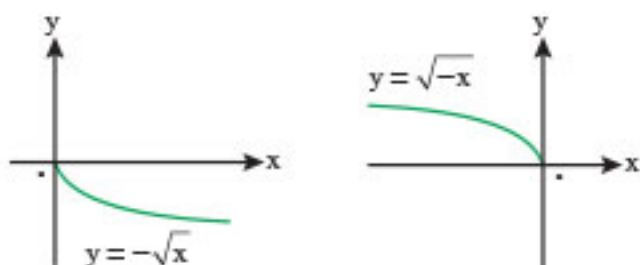
مجموعه جواب به دست آمده از قسمت ۲ را با قسمت ۱ اشتراک می‌گیریم. درست به درسنامه مراجعه کنید.

۶۷. نادرست دامنه تابع $y = f(\frac{x}{2})$ با دو برابر کردن طول نقاط دامنه تابع f به دست می‌آید.

۶۸. نادرست برد تابع با ضابطه $y = kf(x)$ ، k برابر برد تابع $y = f(x)$ است. (البته اگر $k=1$ باشد، می‌تونه بردهاشون یکی باشه!)

۶۹. درست به درسنامه مراجعه کنید.

۷۰. نادرست بارسم نمودار دو تابع می‌توانیم نادرستی عبارت را به وضوح نتیجه بگیریم.



۷۱. نادرست اگر $k > 1$ ، آنگاه نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.

۷۲. درست به درسنامه مراجعه کنید.

۷۳. نادرست ضریب $\frac{1}{3}$ ، x است و انبساط افقی داریم.

۷۴. نادرست ضریب ۲ در پشت x ، باعث انقباض افقی در راستای محور x هاست.

۷۵. نادرست اگر $y = -x^2$ را دو واحد به چپ منتقل کنیم، به تابع $y = -(x+2)^2$ تبدیل می‌شود نه $(-x+2)^2$! دقت کنید فقط x به $x+2$ تبدیل می‌شود. $(x \rightarrow x+2)$.

۷۶. درست باید طول نقطه $A(3, -2)$ را ۳ برابر کنیم؛ پس $A'(9, -2)$.

۷۷. نادرست باید نامعادله زیر را حل کنیم.

$$-1 \leq 2x+1 \leq 2 \xrightarrow{-1} -2 \leq 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

بنابراین دامنه تابع $y = -f(2x+1) - 1$ برابر $[-1, \frac{1}{2}]$ است.

۷۸. درست

$$-2 \leq x \leq 3 \xrightarrow{-x^2} -4 \leq 2x \leq 6 \xrightarrow{+1} -3 \leq 2x+1 \leq 7 \Rightarrow D_f = [-3, 7]$$

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f\left(\frac{1}{1+1}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \quad \text{۷۹. زیرا:}$$

۸۰. می‌دانیم $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ؛ بنابراین داریم:

$$(f \circ g)(5) = f(g(5))$$

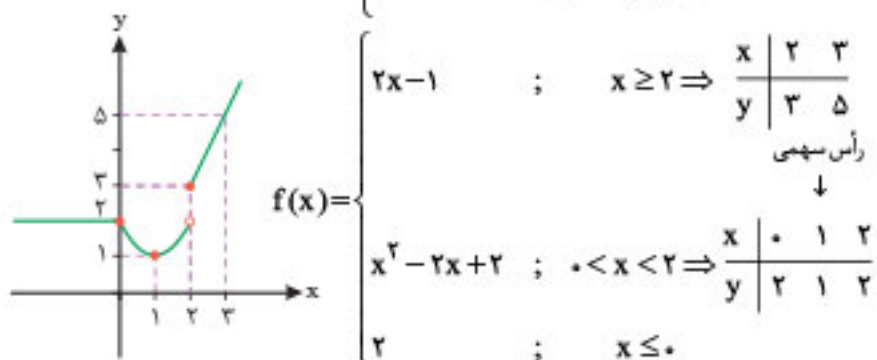
چون $g(x) = 2x-1$ ، پس $g(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$ و همچنین $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(g(5)) = f(9) = 3 \quad \text{پس } f(9) = \sqrt{9} = 3 \text{ است.}$$

۸۱. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ؛ بنابراین داریم:

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$$

۵۴. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; x \geq 2 \\ x^2-2x+2 & ; 0 < x < 2 \\ 2 & ; x \leq 0 \end{cases}$ به صورت زیر است:



این تابع در بازه $(-\infty, 1]$ نزولی است؛ پس حداکثر مقدار a برابر ۱ است.

۵۵. طبق تعریف تابع اکیدا صعودی، داریم:

$$f(\square) < f(\heartsuit) \Leftrightarrow \square < \heartsuit$$

$$f(a^2+1) < f(2a-1) \Rightarrow a^2+1 < 2a-1$$

$$\Rightarrow a^2-2a+2 < 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{(a-2)(a-1)} \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline 1 < a < 2 \end{array}$$

۵۶. با فرض $f(x) = 3^x$ ، داریم:

$$f(3x+1) = 3^{3x+1}$$

$$f(-3) = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

پس با توجه به فرض سؤال می‌توانیم بنویسیم:

$$f(3x+1) \leq f(-3) \Rightarrow 3x+1 \leq -3 \Rightarrow 3x \leq -4 \Rightarrow x \leq -\frac{4}{3}$$

۵۷. نادرست $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ؛ بنابراین:

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 6$$

۵۸. نادرست

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = \sqrt{1^2+3} = \sqrt{4} = 2 \\ (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2(2)+3=7 \\ f(1) = 2(1)+3=5 \end{array} \right\} \Rightarrow (f \circ g)(1) \neq f(1)$$

۵۹. نادرست

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(\sqrt{5^2-4}) = f(\sqrt{21}) = (\sqrt{21})^2 - 4 = 21 - 4 = 17$$

۶۰. نادرست $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ؛ پس:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x})$$

۶۱. نادرست طبق تعریف دامنه تابع gof داریم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

چون هر دو تابع f و g چند جمله‌ای هستند، پس دامنه آن‌ها برابر $\mathbb{R}$ است.

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

۶۲. نادرست این تساوی گاهی برقرار نیست و گاهی ممکن است برقرار باشد؛ برای مثال اگر $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ باشد، داریم:

$$D_{fog} = D_{gof} = \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

۶۳. درست

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x-1) = 2(4x-1) + k = 8x + k - 2$$

با مقایسه دو عبارت $8x + k - 2$ و $8x + 10$ داریم: $k - 2 = 10 \Rightarrow k = 12$