



...مقدمه ناشر...

بعضی وقت‌ها با خودم فکر می‌کنم که اگر می‌شد به چند سال قبل برگردم، چه کارهایی انجام می‌دادم و چه کارهایی انجام نمی‌دادم. معمولاً هم نتیجه این فکرها می‌شود یک سری حسرت و ناراحتی و گاهی هم لبخند و خوشحالی! 😊 چند وقت پیش‌ها یک فیلمی دیدم به اسم *About time*؛ داستان کلی این فیلم، در مورد پسری بود که می‌توانست در زندگی گذشته خودش سفر کند. این جوری که می‌رفت یک جایی که فقط و فقط خودش باشد و به یک لحظه در گذشته خودش فکر می‌کرد، دقیقاً همون لحظه‌ای که دلش می‌خواست تغییرش بده! بعد وقتی که از اون جا می‌اومد بیرون، دقیقاً به همون لحظه برمی‌گشت و اون کاری که احساس می‌کرد باید انجام می‌داده و نداده رو انجام می‌داد!! مثلاً همین الان فرض کنید اگر برمی‌گشتید به گذشته خودتون، چه جوری زندگی می‌کردید و چه چیزی را تغییر می‌دادید؟ قسمت جالب فیلم این بود که نتیجه این تغییرات بعضی موقع‌ها خوب می‌شد، بعضی موقع‌ها هم بد و بعضی موقع‌ها هم چیزی رو تغییر نمی‌داد! مثلاً این که سفر در زمان، نمی‌تواند کسی را وادار به عشق کند! آخر فیلم هم یه دیالوگ خوب داره که می‌گه:

«هر روزی رو دو بار تکرار می‌کردم. بار اول به خاطر استرسی که مشکلات زندگی باعثش می‌شه، مانع لذت بردن من از زندگی می‌شد. اها بار دوم همون روز رو بدون استرس و نگرانی می‌گذروندم و این باعث می‌شد از کوچک‌ترین چیزها هم لذت ببرم!»

حالا تصور کنید که ۱ سال از امروز گذشته! حسرت چه چیزهایی را می‌خورید؟ به خاطر چه کارهایی لبخند می‌زنید؟ همین الان یک جدولی شبیه جدول زیر درست کنید، این چیزها را بنویسید و یک جایی بگذارید که جلوی چشمتون باشد. هر روز به این جدول نگاه کنید و مرتب به‌روزش کنید. حتماً به دردتون خواهد خورد!

کارهایی که به خاطرشون خوشحال می‌شم.	چیزهایی که حسرتشو می‌خورم.
■ چه‌قدر خوب شد که ریاضی نردبام رو خوب خوندم. ■ ورزش خیلی به روحیه‌ام کمک کرد. خوشحالم که با این‌همه درس نذاشتمش کنار!	■ کاش بهتر برنامه‌ریزی می‌کردم ... ■ کاش کم‌تر می‌رفتم تو اینستا!

نوشتن کتاب‌های سری نردبام اصلاً کار آسونی نیست؛ چرا که با توجه به محدودیت‌های کتاب درسی، باید کتابی بنویسی که هم از چارچوب کتاب درسی خارج نشود، هم در مسیر کنکور باشد و مهم‌تر از همه تست‌های جون‌دار و خفن داشته باشد! مؤلفان کتاب به خوبی از پس این کار براومدند! به این دوستان تبریک می‌گم به خاطر محصولی که تولید کردند! دست واحد تولید هم درد نکند که مثل همیشه پایه‌پای تألیف، کارها را جلو بردند! یک تشکر ویژه هم از لولاو مرادی که دلسوزانه برای تولید این کتاب جنگید.

زندگی به بار بیشتر نیست! قدرشو بدون ...

...مقدمه مؤلف...

دوستان خوب رشته تجربی سلام

خب شما عزیزانی که این کتاب را انتخاب کرده‌اید، لازم است چند مطلب که در تألیف این کتاب مورد توجه مؤلفین بوده است را بدانید:

۱ به جای درس‌نامه، مرورنامه داشته‌ایم به این معنا که تمامی مطالب درسی به طور کامل گفته نشده است اما تمام مواردی که ضروری بوده است یا در قالب تست آموزشی یا در قالب نکته درسی در قسمت مرورنامه آورده شده است. ۲ در تست‌هایی که به عنوان قسمت آخر بخش آورده شده است به هیچ عنوان از تست کنکور استفاده نشده است تا هم تست بیشتری تألیف کنیم و هم آن‌که خود بتوانید تست‌های کنکور را بعداً پس از تکمیل فرآیند آموزش بررسی کنید.

۳ تست‌های هر بخش با یک چیدمان راحت به سخت آورده شده است. تا آموزش رفته‌رفته تکمیل شود. به همین جهت انتخاب برخی تست‌ها در قالب زوج، فرد و یا تست مضربی در استفاده از این کتاب به هیچ عنوان پیشنهاد نمی‌شود.

۴ تجربه تیم مؤلف در کتاب نردبام دهم، یازدهم و دوازدهم در رشته ریاضی پشتوانه بسیار قوی در تألیف تست‌های این کتاب بوده است به طوری که تست‌ها با کم‌ترین تکرار و بیشترین تنوع ارائه شده است.

۵ پاسخ تشریحی کافی که مفاهیم اصلی جواب را شامل شود و زیاده‌گویی نکرده باشد نقطه قوت کتاب محسوب می‌شود.

۶ تست‌های کنکور سراسری در انتهای کتاب به صورت تفکیکی آورده شده است که می‌توانید از آن‌ها بهره کافی را ببرید.

تألیف این کتاب تجربه سال‌ها تدریس درس ریاضی تجربی و حسابان در مدارس برتر تهران بوده است.

نتیجه تلاش تیم مؤلف کسب چند رتبه یک‌رقمی و چندین رتبه خاص «۱» در سال‌های اخیر کنکور بوده است.

به همین جهت از تمام دانش‌آموزان عزیزمان که در این سال‌ها در کنار ما در کلاس درسی همراه و همیار بوده‌اند کمال تشکر را داریم و به آن‌ها افتخار می‌کنیم. اگر مساعدت و همفکری مسئولین محترم انتشارات نبود این کتاب در این مدت حتماً به ثمر نمی‌نشست. از جناب کامیل نصری و جناب ایمان سلیمان‌زاده عزیز که خیلی دوست‌داشتنی است تشکر می‌کنیم. از سرکار خانم مرادی که خستگی را خسته کرده خیلی ممنونیم. از تیم ویراستار به خصوص جناب امیرحسین شریفیان و ... که خیلی صبورانه و دقیق بازنگری کردند، اصلاح کردند و ... تشکر می‌کنیم. در پایان باید بگوییم که این اثر ناقابل نمی‌تواند بی‌خطا باشد. کمک کنید تا بتوانیم در اولین فرصت خطاهای کتاب را اصلاح کنیم تا دانش‌آموزان با آرامش خاطر بیشتر از این کتاب استفاده کنند.

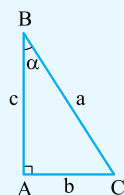
پاییز ۱۴۰۱ تیم تألیف

...>فهرست<...

فصل اول: مجموعه‌ها	۸
فصل دوم: الگو و دنباله	۱۲
فصل سوم: معادله و تابع درجه دوم	۱۹
فصل چهارم: نامعادلات گویا و تعیین علامت	۳۳
فصل پنجم: ریشه‌گیری و عبارتهای جبری	۳۹
فصل ششم: قدرمطلق و جزء صحیح	۵۰
فصل هفتم: تابع	۶۱
فصل هشتم: مثلثات	۱۰۵
فصل نهم: حد و پیوستگی	۱۳۵
فصل دهم: مشتق	۱۶۳
فصل یازدهم: کاربرد مشتق	۱۸۷
فصل دوازدهم: توابع نمایی و لگاریتم	۲۰۴
فصل سیزدهم: هندسه تحلیلی	۲۱۵
فصل چهاردهم: تفکر تجسمی و مقاطع مخروطی	۲۲۴
فصل پانزدهم: ترکیبیات	۲۴۲
فصل شانزدهم: احتمال	۲۵۱
فصل هفدهم: هندسه	۲۶۸
فصل هجدهم: آمار	۲۸۰
پاسخ‌نامه تشریحی	۲۸۷
پاسخ‌نامه کلیدی	۴۷۸

...مثلثات...

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث



در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $(\hat{A} = 90^\circ)$ نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} = \text{مقابل به وتر}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \text{مجاور به وتر}$$

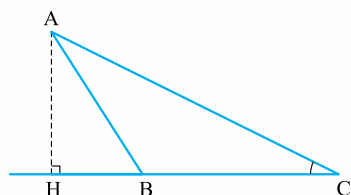
$$\tan \alpha = \frac{b}{c} = \text{مقابل به مجاور}$$

$$\cot \alpha = \frac{c}{b} = \text{مجاور به مقابل}$$

نکته نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف در جدول زیر آورده شده است:

α	30°	45°	60°	90°	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	0	∞	0	∞	0
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞	0	0	∞	0	∞

(سراسری ۹۹)



$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{5}{13} \Rightarrow \begin{cases} AH = 5a \\ AC = 13a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{فیتاغورس}} HC = 12a \xrightarrow{HC=9} 12a = 9 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\text{پس: } AH = 5a = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

تست در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع AH کدام است؟

۳/۲۵ (۱)

۳/۵ (۲)

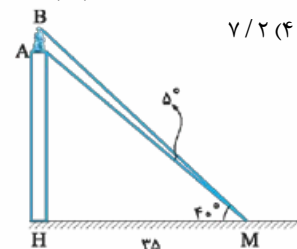
۳/۶ (۳)

۳/۷۵ (۴)

پاسخ گزینه «۴»

تست ناظری به فاصله ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است، زاویه رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح

(سراسری ۹۴)



۷/۲ (۴)

۷ (۳)

۶/۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ گزینه «۳» ابتدا یک شکل فرضی رسم می‌کنیم:

$$\tan 45^\circ = \frac{BH}{MH} = 1 \Rightarrow BH = MH = 35$$

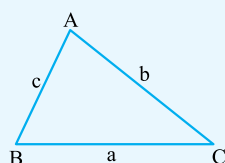
$$\tan 40^\circ = \frac{AH}{MH} \Rightarrow 0.8 = \frac{35 - AB}{35} \Rightarrow AB = 7$$

روابط طولی در مثلث

در مثلث ABC، مطابق شکل روبه‌رو، می‌توان روابط زیر را بیان نمود:

❶ $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ba \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$ ❷ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ (قضیه کسینوس‌ها)

❸ $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ (قضیه سینوس‌ها)



تست: اندازه دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه 60° درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع

(سراسری ۹۶)

کدام است؟

۴۸ (۱)

۵۴ (۲)

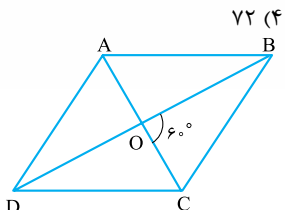
۶۴ (۳)

۷۲ (۴)

پاسخ: گزینه «۴»

مساحت هر چهارضلعی که توسط رسم قطرها داخل متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید با هم برابر است.

$$S = 4S_{OBC} = 4 \times \frac{1}{2} \times OB \times OC \times \sin 60^\circ = 2 \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 72$$

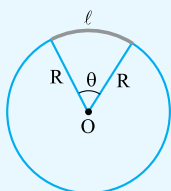
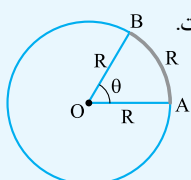


واحدهای اندازه‌گیری زاویه و طول کمان

درجه: اگر محیط دایره‌ای را به 360° کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی هر کدام از این کمان‌ها، 1° درجه است.

رادیان: اگر در دایره‌ای به شعاع R، کمانی به طول R جدا کنیم، اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن، 1 رادیان است.

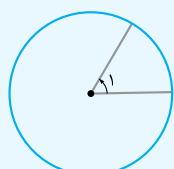
$$\theta = 1 \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} \approx 57^\circ$$



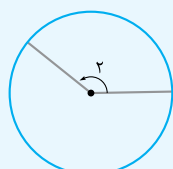
طول کمان: طول کمان مقابل به زاویه θ (برحسب رادیان) در دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $\ell = R\theta$.

مثلاً اگر $\theta = 1$ رادیان باشد، آن‌گاه $\ell = R$ است.

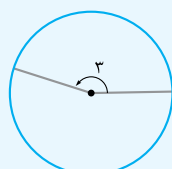
تذکره: با توجه به این که یک رادیان، تقریباً 57° است، پس می‌توان زوایای 1° ، 2° ، ... و 6° رادیان را به صورت زیر در یک دایره، نمایش داد:



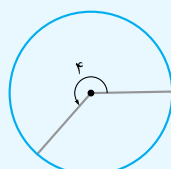
$$\theta = 1 \text{ rad}$$



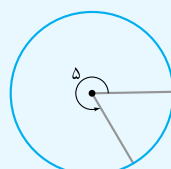
$$\theta = 2 \text{ rad}$$



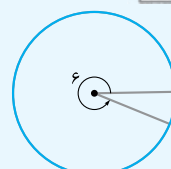
$$\theta = 3 \text{ rad}$$



$$\theta = 4 \text{ rad}$$



$$\theta = 5 \text{ rad}$$

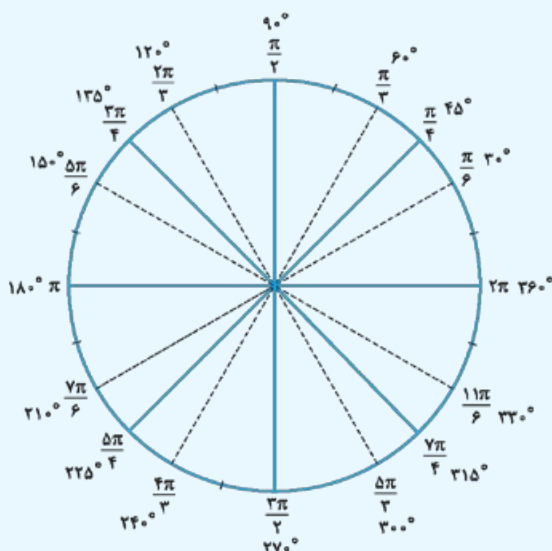


$$\theta = 6 \text{ rad}$$

◀ **تبدیل درجه به رادیان** اگر زاویه‌ای D درجه و R رادیان باشد،

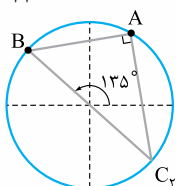
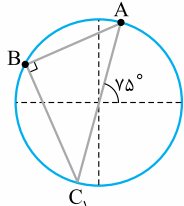
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

در شکل داده‌شده، زوایای معروف، برحسب درجه و رادیان بیان شده‌اند:



تست انتهای کمان‌های مقابل به زوایای $\frac{\Delta\pi}{12} + 2k\pi$ و $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ بر روی دایره مثلثاتی، سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. α کدام می‌تواند باشد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

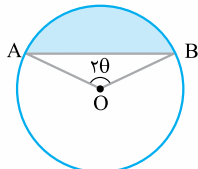
پاسخ گزینه «۲» به شرطی مثلث قائم‌الزاویه است که دو رأس آن، دو سر قطر دایره باشد. دقت کنید که $\frac{5\pi}{12}$ و $\frac{3\pi}{4}$ معادل 75° و 135° هستند. دو حالت می‌توان در نظر گرفت:



$$C_1: \alpha = 18^\circ + 75^\circ = 255^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{17\pi}{12}$$

$$C_2: \alpha = 135^\circ + 18^\circ = 315^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4}$$

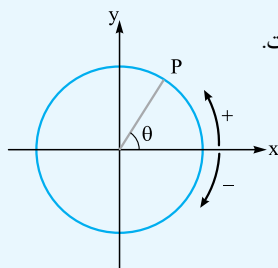
تست فرض کنید θ بر حسب رادیان و $4\sin\theta = 3\theta$ باشد. اگر در شکل زیر شعاع دایره برابر ۶ باشد، محیط ناحیه رنگی چه قدر است؟

(۱) 15θ (۲) 18θ (۳) 21θ (۴) 24θ

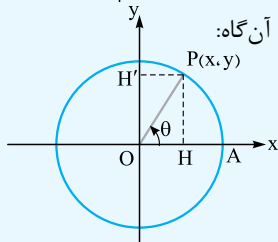
پاسخ گزینه «۳» در مثلث متساوی‌الساقینی به زاویه رأس α و ساق‌های برابر a طول قاعده مثلث برابر است با: $2a \sin \frac{\alpha}{2}$
 $AB = 2R \sin \frac{2\theta}{2} = 12 \sin \theta = 12 \times \frac{3}{4} \theta = 9\theta$ و تر
 کمان: $\widehat{AB} = R \times 2\theta = 12\theta$
 پس محیط شکل رنگی برابر $9\theta + 12\theta = 21\theta$ است.

دایره مثلثاتی

دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱، به طوری که جهت مثبت آن خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.



نسبت‌های مثلثاتی در دایره اگر نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی مطابق شکل مقابل قرار داشته باشد، آن‌گاه:

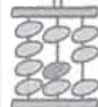


$$\left. \begin{array}{l} x = OH = \cos \theta \\ y = PH = \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow P(\cos \theta, \sin \theta)$$

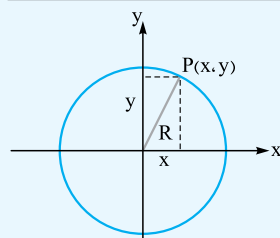
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

توجه کنید که زاویه θ در جهت مثبت مثلثاتی و از OA شروع به حرکت می‌کند. بنابراین در هر ناحیه، با توجه به علامت x و y در آن ناحیه، علامت نسبت‌های مثلثاتی مشخص می‌شود.

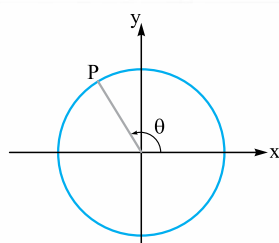
ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم



ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
$x > 0, y > 0$	$x < 0, y > 0$	$x < 0, y < 0$	$x > 0, y < 0$
$\sin \theta$ +	$\sin \theta$ +	$\sin \theta$ -	$\sin \theta$ -
$\cos \theta$ +	$\cos \theta$ -	$\cos \theta$ -	$\cos \theta$ +
$\tan \theta$ +	$\tan \theta$ -	$\tan \theta$ +	$\tan \theta$ -
$\cot \theta$ +	$\cot \theta$ -	$\cot \theta$ +	$\cot \theta$ -



نکته اگر نقطه $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی واقع باشد، آن گاه $x^2 + y^2 = 1$ است.
در حالت کلی اگر نقطه $P(x, y)$ روی دایره‌ای به شعاع R و مرکز مبدأ مختصات واقع باشد، آن گاه:
 $x^2 + y^2 = R^2$



تست نقطه $P(1-2a, a)$ مطابق شکل روی دایره مثلثاتی قرار دارد. مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

پاسخ گزینه «۲» مختصات نقطه P به صورت $(\cos \theta, \sin \theta)$ است.

$$(1-2a)^2 + a^2 = 1 \Rightarrow 5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{5} \Rightarrow P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

تست اگر $\frac{\pi}{12} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12}$ و $\sin 2\alpha = \frac{2}{1-2m}$ باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4} \leq m < \frac{1}{4}$ (۲) $m \leq -\frac{3}{4}$ (۳) فقط $m = -\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4} \leq m \leq -\frac{1}{4}$

پاسخ گزینه «۴» دقت کنید که $\frac{\pi}{6} \leq 2\alpha \leq \frac{5\pi}{6}$ است پس مقدار $\sin 2\alpha$ حداقل برابر $\frac{1}{2}$ و حداکثر برابر ۱ است.

$$\frac{1}{2} \leq \sin 2\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{1-2m} \leq 1 \xrightarrow{1-2m > 0} 2 \leq 1-2m \leq 4 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq -\frac{1}{4}$$

جواب به دست آمده در شرط $1-2m > 0$ هم صدق می‌کند.

نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$)

ابتدا به حالت‌های خاص زیر توجه کنید:

$\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sin \alpha$
$\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \tan \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$
$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



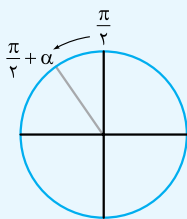
$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

نکته برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{\gamma} \pm \alpha$ دو مرحله لازم است:

۱ اگر k صحیح و زوج باشد، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود ولی اگر k صحیح و فرد باشد، نسبت مثلثاتی عوض می‌شود.

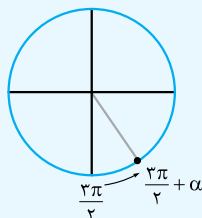
۲ با فرض کوچک بودن α (حتی اگر کوچک نباشد) و یافتن ناحیه‌ای که $\frac{k\pi}{\gamma} \pm \alpha$ در آن ناحیه قرار می‌گیرد، علامت نسبت مثلثاتی داده‌شده را به عنوان علامت جواب در نظر می‌گیریم.

به طور مثال:



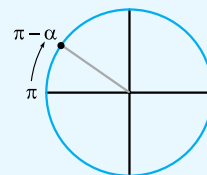
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

ناحیه دوم، سینوس مثبت



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

ناحیه چهارم، سینوس منفی



$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

ناحیه دوم، تانژانت منفی

(سراسری ۹۸)

تست حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۳»

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(سراسری ۹۱)

تست اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد، مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1/2 \quad (2)$$

$$-3 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۴»

$$P = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0/2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

نکته اگر α و β دو زاویه متمم باشند، آن‌گاه: $\sin \alpha = \cos \beta$ ، $\cos \alpha = \sin \beta$ ، $\tan \alpha = \cot \beta$ ، $\cot \alpha = \tan \beta$
و اگر α و β مکمل هم باشند، آن‌گاه: $\sin \alpha = \sin \beta$ ، $\cos \alpha = -\cos \beta$ ، $\tan \alpha = -\tan \beta$ ، $\cot \alpha = -\cot \beta$

تست اگر $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ حاصل $\alpha + \beta$ کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{11\pi}{12} \quad (4)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

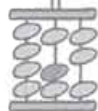
$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{7\pi}{12} \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۱» اگر $x + y = \frac{\pi}{2}$ باشد، آن‌گاه $\tan x = \cot y$ است.

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)} = \cot\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)$$

یکی از حالت‌های ممکن آن است که $(\alpha + \frac{\pi}{4}) + (\beta - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2}$ باشد، بنابراین $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$ یکی از جواب‌ها می‌تواند باشد.



تست حاصل عبارت $P = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \dots + \cos \frac{9\pi}{9}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) صفر

پاسخ گزینه «۳» اگر $\alpha + \beta = \pi$ باشد، آن گاه $\cos \alpha = -\cos \beta$ است.

زوایای $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$ به ترتیب با زوایای $\frac{8\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{3\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{9}$ مکمل اند، پس مجموع کسینوس های آنها برابر صفر است.

$$\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = 0, \quad \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = 0, \quad \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} = 0, \quad \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} = 0$$

از طرفی $\cos \frac{9\pi}{9} = -1$ پس حاصل عبارت P برابر -۱ است.

اتحادهای مثلثاتی

اتحادهای مقدماتی اتحادهای ابتدایی و اصلی در مبحث مثلثات به صورت زیر می باشند:

۱ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

۲ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

۳ $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

۴ $\tan x \cdot \cot x = 1$

۵ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

۶ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(سراسری ۹۸)

تست اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

۰ / ۴۸ (۴)

۰ / ۲۷ (۳)

-۰ / ۵۲ (۲)

-۱ / ۲۳ (۱)

پاسخ گزینه «۳» ابتدا سایر نسبت های مثلثاتی را پیدا می کنیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$P = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \pi\right) = \cos \alpha (-\sin \alpha) + \cot \alpha = -\frac{3}{5} \left(+\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = 0 / ۲۷$$

(سراسری ۹۸)

تست اگر $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)$ کدام است؟

$\cos x$ (۴)

$\cos^2 x$ (۳)

$-\cos x$ (۲)

$-\cos^2 x$ (۱)

پاسخ گزینه «۱» دقت کنید که x در ناحیه دوم است و $\cos x$ در این ناحیه منفی است.

$$P = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\sin x \times \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

نکته به کمک اتحادهای اصلی، می توان اتحادهای زیر را نتیجه گرفت:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

تست اگر $\tan x + \cot x = \frac{5}{4}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$ کدام است؟

$\frac{17}{13}$ (۴)

$\frac{14}{13}$ (۳)

$\frac{7}{12}$ (۲)

$\frac{5}{12}$ (۱)

پاسخ گزینه «۴»

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{4}{5}$$



حال، هر یک از عبارتهای صورت و مخرج را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که صرف نظر از نکته صفحه قبل، سعی می‌کنیم، فرمول‌های داده‌شده را اثبات کنیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\text{به توان } 3} \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\cos^4 x \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) = 1 \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$P = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2(\frac{4}{25})}{1 - 3(\frac{4}{25})} = \frac{17}{13}$$

نسبت‌های مثلثاتی 2α اتحادهای مثلثاتی زوایای دو برابر کمان عبارت‌اند از:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

نکته فرمول‌های زیر که به فرمول‌های طلایی معروف‌اند، در حل سؤالات کاربرد زیادی دارند:

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

(سراسری ۹۵)

تست اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ گزینه «۱» دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم و $\sin 2\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{16}$$

$$\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -\frac{15}{16}$$

(سراسری ۹۵)

تست اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 2

پاسخ گزینه «۱» از اتحادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ 1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -2$$

تست اگر زاویه α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha}$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)

- (۱) $-\frac{96}{175}$ (۲) $\frac{1056}{175}$ (۳) $\frac{96}{175}$ (۴) $-\frac{1056}{175}$

پاسخ گزینه «۲» ابتدا دقت کنید که چون α ناحیه سوم است پس $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ و $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ است.

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{7}{24}$$

$$P = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{24 \times 44}{7 \times 25} = \frac{1056}{175}$$

حال، حاصل عبارت را پیدا می‌کنیم:

(سراسری ۹۶)

تست حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ - گزینه «۳»

$$P = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 4(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$$

$$P^2 = 16(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = 16(1 - \sin 30^\circ) = 16(1 - \frac{1}{2}) = 8 \Rightarrow P = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$$

نکته به دو اتحاد فرعی مقابل توجه کنید:

(سراسری ۹۶)

تست اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ - گزینه «۲» صرف نظر از نکته بالا، سعی می‌کنیم فرمول‌های داده‌شده را اثبات کنیم:

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\cos(2 \times \frac{x}{2})}{\frac{1}{2} \sin(2 \times \frac{x}{2})} = \frac{-2 \cos x}{\sin x} = -2 \cot x = -2 \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$$

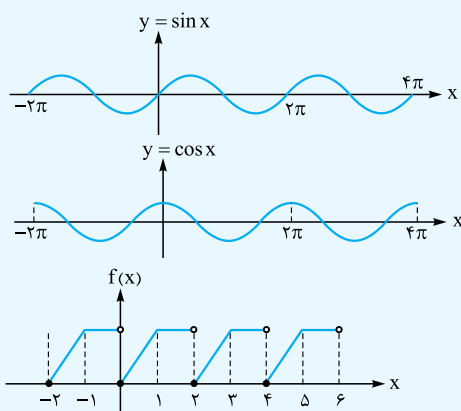
نمودار توابع مثلثاتی

دوره تناوب تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$x \pm T \in D_f, \quad f(x + T) = f(x)$$

کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را، دوره تناوب f می‌نامیم.

به نمودارهای زیر توجه کنید:



$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

$$f(x \pm 2) = f(x)$$

نکته دوره تناوب برخی توابع خاص به صورت زیر است:

تابع	دوره تناوب
$\sin(ax + b), \cos(ax + b)$	$\frac{2\pi}{ a }$
$\sin^2(ax + b), \cos^2(ax + b)$ $ \sin(ax + b) , \cos(ax + b) $ $\tan(ax + b), \cot(ax + b)$	$\frac{\pi}{ a }$

(سراسری ۹۸)

تست دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

$$\pi \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$f(x) = -2 \cot(2\pi x) \quad T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

پاسخ - گزینه «۱» با توجه به فرمول $\tan \theta - \cot \theta = -2 \cot 2\theta$ حل می‌کنیم:

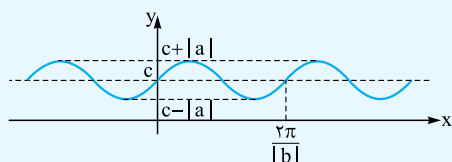
نکته اگر دوره تناوب تابع $y = f(x)$ برابر T باشد، دوره تناوب تابع $y = c + kf(ax + b)$ برابر $\frac{T}{|a|}$ است.

مثال دوره تناوب تابع $y = f(x)$ برابر ۶ است. مقدار مثبت a را به گونه‌ای بیابید که دوره تناوب تابع $y = 1 + f(\frac{3}{4}ax)$ از دوره تناوب تابع $y = 1 - f(\frac{x}{a})$ ده واحد کم‌تر باشد.

پاسخ دوره تناوب $1 + f(\frac{3}{4}ax)$ برابر $\frac{6}{\frac{3}{4}a} = \frac{4}{a}$ و دوره تناوب $1 - f(\frac{x}{a})$ برابر $\frac{6}{\frac{1}{a}} = 6a$ است.

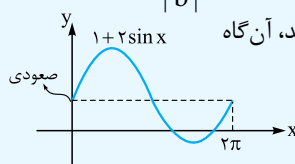
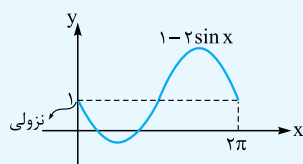
$$\frac{4}{a} = 6a - 10 \Rightarrow 3a^2 - 5a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

نمودار تابع $y = c + a \sin bx$ نمودار این تابع به صورت زیر است:

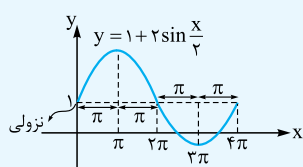


ویژگی‌های نمودار:

۱ ماکزیمم تابع برابر $c + |a|$ ، مینیمم تابع برابر $c - |a|$ و دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است.



۲ در مجاورت محور y ها (خط $x = 0$) اگر نمودار تابع، اکیداً صعودی باشد، آن‌گاه $ab > 0$ و اگر اکیداً نزولی باشد، $ab < 0$ است.



۳ خط $y = c$ نمودار تابع را در یک دوره تناوب، به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کند که طول هر قسمت $\frac{T}{4}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi, \quad \frac{T}{4} = 2\pi$$

۴ فاصله بین دو نقطه ماکزیمم متوالی یا مینیمم متوالی، یک دوره تناوب است.

مثال مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع $y = 3 - 7 \sin(2\pi x)$ را بیابید.

$$\max = c + |a| = 3 + |-7| = 10$$

$$\min = c - |a| = 3 - |-7| = -4$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

مثال تابع مثلثاتی به فرم $y = c + a \sin bx$ مثال بنویسید که مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب آن به ترتیب ۷، -۱ و 4π باشد.

$$\begin{cases} \max = c + |a| = 7 \\ \min = c - |a| = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ |a| = 4 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3 \pm 4 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

تست در تابع مثلثاتی $y = a - (2a + 2) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ ، مقدار ماکزیمم از سه برابر دوره تناوب آن چهار واحد کم‌تر است. مقدار مینیمم این تابع چه قدر است؟ ($a > 0$)

$$-6 \quad (4)$$

$$-4 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۳»

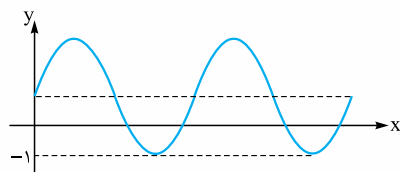
$$\begin{cases} \max = a + |2a + 2| \\ T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = 2|a| \end{cases} \Rightarrow a + |2a + 2| = 6|a| - 4 \xrightarrow{a > 0} 3a + 2 = 6a - 4 \Rightarrow a = 2$$

پس مینیمم برابر $a - |2a + 2| = 2 - 6 = -4$ است.



(سراسری ۹۷)

تست شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $(0, \frac{4}{3})$ است. $a + b$ کدام است؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

پاسخ گزینه «۳» در اطراف $x = 0$ تابع صعودی است، پس $ab > 0$ است. حال هر دو را مثبت فرض کنید:

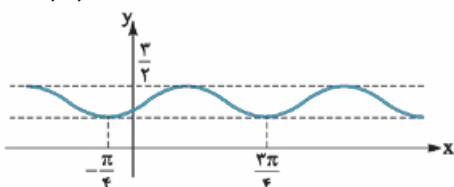
$$T = \frac{2}{3} = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow b = 3$$

نمودار تابع در دو دوره تناوب رسم شده است پس $T = \frac{2}{3}$ است.

$$\min = -1 \Rightarrow 1 - |a| = -1 \Rightarrow 1 - a = -1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 5$$

(سراسری ۹۸)

تست شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



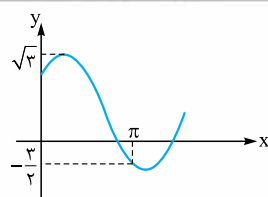
- (۱) ۱
(۲) ۳/۲
(۳) ۲
(۴) ۳

پاسخ گزینه «۳» ضابطه تابع را به صورت $y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$ می‌نویسیم. چون نمودار تابع در اطراف $x = 0$ ، صعودی است، پس $ab > 0$ است. با توجه به گزینه‌ها، هر دو را مثبت فرض می‌کنیم:

$$T = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow b = 1$$

$$\max = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a + b = 2$$

نکته اگر $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ باشد، آن‌گاه ویژگی‌های تابع $f(x) = c + a \sin(bx + \theta)$ همانند همان ویژگی‌هایی است که در مورد $y = c + a \sin bx$ بیان کرده بودیم.



(سراسری ۹۸)

تست شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) ۲

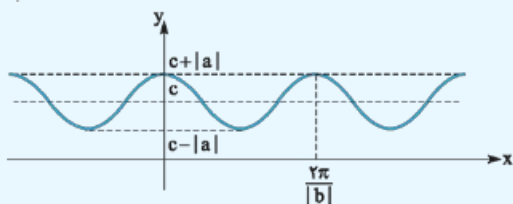
پاسخ گزینه «۳» در اطراف $x = 0$ تابع صعودی است پس $b > 0$ است.

$$1) \max = a + |b| = a + b = \sqrt{3}$$

$$2) f(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a - \frac{b\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt{3} \\ 2a - b\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow -2b - b\sqrt{3} = -2\sqrt{3} - \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

پس به یک دستگاه می‌رسیم:

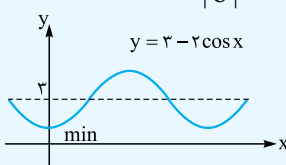
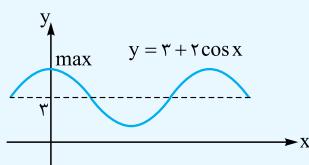


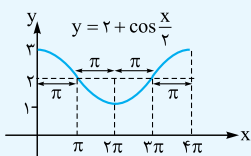
نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ نمودار این تابع به صورت مقابل است:

ویژگی‌های نمودار:

۱) ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب تابع به ترتیب برابر $c + |a|$ ، $c - |a|$ و $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

۲) بر روی محور y ها، اگر ماکزیمم داشته باشیم، علامت a مثبت و اگر مینیمم داشته باشیم، علامت a منفی است. (علامت b تأثیری در نمودار ندارد.)

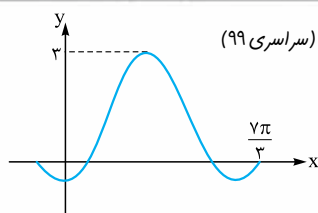




$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

۳ خط $y = c$ نمودار تابع را در یک دوره تناوب، به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کند:

۴ فاصله بین دو نقطه ماکزیمم متوالی یا مینیمم متوالی، یک دوره تناوب است.



(سراسری ۹۹)

تست

۲ (۱)

۱ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)

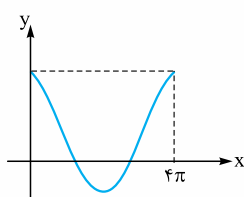
پاسخ: گزینه «۴» ضابطه تابع را به صورت $y = a + b \cos x$ می‌نویسیم. چون روی محور y ها، مینیمم وجود دارد پس $b < 0$ است.

$$\max = a + |b| = a - b = 3$$

$$0 = a + b \cos \frac{7\pi}{3} = a + \frac{b}{2}$$

از طرفی نمودار تابع از نقطه $(\frac{7\pi}{3}, 0)$ عبور کرده است، پس:

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \text{ از حل دستگاه داریم } a = 1 \text{ و } b = -2$$



تست شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{4} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول

(سراسری ۹۶)

کدام است $x = \frac{16\pi}{3}$ ؟

-1/2 (۱)

1 (۳)

1/2 (۲)
صفر (۴)

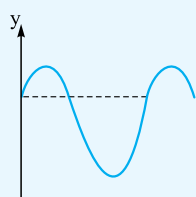
پاسخ: گزینه «۱» دوره تناوب تابع برابر 4π است.

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2}$$

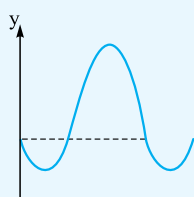
$$y = \frac{1}{4} + 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{4} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

نکته فرض کنید $b > 0$ و $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ باشد، در این صورت نمودار $y = c + a \cos(bx + \theta)$ به یکی از صورت‌های زیر است:

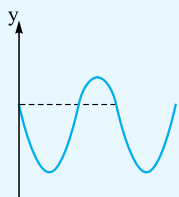


$a > 0$ و $\theta < 0$

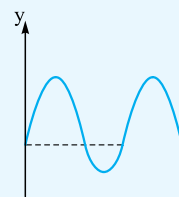


$a < 0$ و $\theta < 0$

انتقال به راست



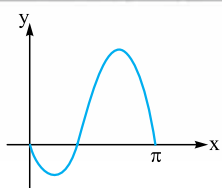
$a > 0$ و $\theta > 0$



$a < 0$ و $\theta > 0$

انتقال به چپ

به بیان دیگر: اگر در سمت راست محور y ها اول مینیمم داشته باشد، آن‌گاه $a\theta > 0$ و اگر اول ماکزیمم داشته باشد، آن‌گاه $a\theta < 0$ است. ($b > 0$)



تست قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \cos(bx - \frac{\pi}{3})$ به صورت مقابل است. حاصل $a - b$ کدام است؟

۴ (۲)

-۱ (۱)

صفر (۴)

-۴ (۳)

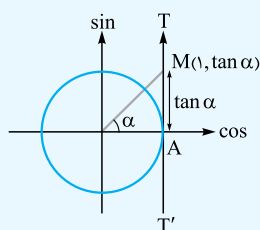
پاسخ: گزینه «۳» نمودار تابع از مبدأ عبور کرده است.

$$y(0) = 0 \Rightarrow 1 + a \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

چون $a < 0$ و در سمت راست محور y ها، ابتدا $\min$ داریم پس $b > 0$ است.

$$T = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a - b = -4$$

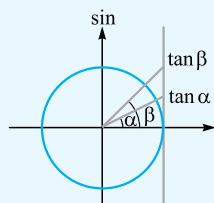
تابع تانژانت



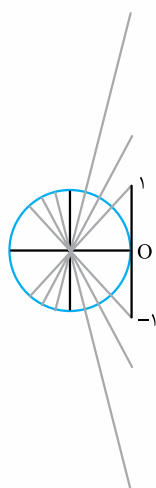
در دایره مثلثاتی شکل مقابل، خط $x=1$ را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A ، مبدأ این محور و جهت مثبت محور، از پایین به بالا است.

در این صورت، اگر انتهای کمان روبه‌رو به α ، در ناحیه اول و سوم باشد، $\tan \alpha$ مثبت و اگر در ناحیه دوم و چهارم باشد، $\tan \alpha$ منفی است.

نکته در هر یک از چهار ناحیه دایره مثلثاتی مقدار $\tan \alpha$ اکیداً صعودی است.



$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha < \tan \beta$$



تست اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{3}{2m-3}$ باشد، حدود m کدام است؟

$$m > \frac{3}{2} \quad (1)$$

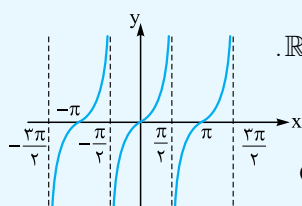
$$0 < m < \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} < m < 3, m \neq \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$0 < m < 3, m \neq \frac{3}{2} \quad (4)$$

پاسخ - گزینه «۴» با توجه به دایره مثلثاتی و محور تانژانت‌ها، معلوم می‌شود $\tan x > 1$ و $\tan x < -1$ است، پس $|\tan x| > 1$ است.

$$\left| \frac{3}{2m-3} \right| > 1 \Rightarrow |2m-3| < 3 \Rightarrow -3 < 2m-3 < 3 \Rightarrow 0 < m < 3, m \neq \frac{3}{2}$$

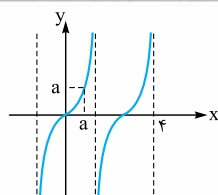


نمودار تابع $\tan x$ تابع $y = \tan x$ تابعی است با دامنه $D = \{x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ و برد $\mathbb{R}$.

این تابع متناوب و دوره تناوب آن برابر π است و نمودار آن به صورت مقابل است:

این تابع در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ اکیداً صعودی است (ولی در اجتماع دو بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ غیریکنواست).

تذکره در حالت کلی دوره تناوب تابع $y = a \tan(bx + \alpha)$ برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است.



تست قسمتی از نمودار تابع $y = -a \tan(b\pi x)$ به صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

پاسخ - گزینه «۲» با توجه به شکل، $a > 0$ است و چون تابع در اطراف مبدأ صعودی است پس $-ab > 0$ و در نتیجه $b < 0$ است.

$$y = a \tan(-b\pi x)$$

در $x = \frac{1}{4}$ تابع تانژانت برای دومین بار در سمت راست، تعریف نشده است، پس:

$$-b\pi x = \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} -\frac{1}{4}b\pi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{\lambda}$$

$$y(a) = a \Rightarrow a = -a \tan(-\frac{3\pi}{\lambda} a) \Rightarrow \tan \frac{3\pi a}{\lambda} = 1$$

$$\text{اولین جواب: } \frac{3\pi a}{\lambda} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

تست تابع $f(x) = 2 \tan(\frac{3}{4}\pi x)$ در بازه $(-a, a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر a کدام است؟

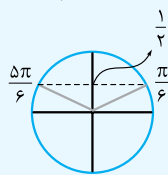
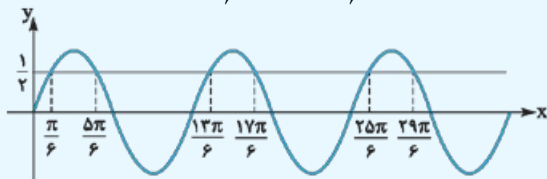
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ گزینه «۱» تابع تانژانت در بازه $(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4})$ اکیداً یکنواست. پس a حداکثر برابر نصف دوره تناوب است.
 $a = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{|\frac{3}{4}\pi|} = \frac{1}{3}$

معادلات مثلثاتی

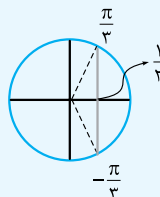
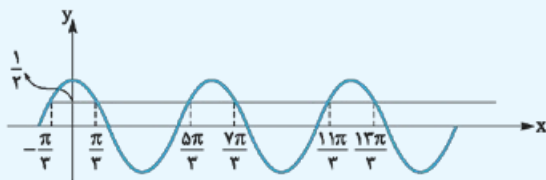
۱ در بازه $[0, 2\pi]$ ، دو زاویه یافت می‌شود که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است. پس معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ در این بازه دو جواب $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ دارد.

اما به دلیل متناوب بودن سینوس، می‌توانیم تمام جواب‌های معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را به صورت $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ و $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ نمایش دهیم.



نتیجه جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ به صورت روبه‌رو است:
 $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$

۲ جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos x = \frac{1}{2}$ در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ و تمام جواب‌های این معادله به صورت $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ است.



نتیجه جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ به صورت مقابل است:
 $x = \pm \alpha + 2k\pi$

(سراسری ۹۸)

تست مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

پاسخ گزینه «۴»

$$4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \xrightarrow{k=1,2} x = \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \xrightarrow{k=0,1} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

$$S = \frac{11\pi}{12} + \frac{23\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} + \frac{19\pi}{12} = \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

جمع جواب‌ها

(سراسری ۱۳۰۰)

تست تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ گزینه «۴» توجه کنید در حل معادلات، اگر خواستید دو طرف تساوی را به عبارتی مانند A ساده کنید باید $A = 0$ را هم در نظر بگیرید.

$$-\sin^2 x \cos 3x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow -\sin^2 x \cos 3x = \sin^2 x$$

$$\begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ -\cos 3x = 1 \Rightarrow 3x = \pi, 3\pi, 5\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

پس ۶ جواب دارد.

نکته در معادلات زیر کافی است نسبت مثلثاتی عوض شود یا این که زاویه آن قرینه شود؛ مثلاً:

$$1 \quad \sin \alpha = -\sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin(-\beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi - \beta \\ \alpha = 2k\pi + \pi + \beta \end{cases}$$

$$2 \quad \cos \alpha = -\cos \beta \Rightarrow \cos \alpha = \cos(\pi - \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \pi - \beta \\ \alpha = 2k\pi - \pi + \beta \end{cases}$$

$$3 \quad \sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \beta \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \beta \end{cases}$$

$$4 \quad \sin \alpha = -\cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} - \beta \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} + \beta \end{cases}$$

تست - جواب های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k عدد صحیح است، کدام است؟ (سراسری ۹۹)

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (3) \quad x = \frac{2k\pi}{3} \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{3} \quad (1)$$

پاسخ - گزینه «۴» از ویژگی های $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ استفاده می کنیم.

$$\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - x + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - (\frac{\pi}{6} - x) + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

طبق فرض، جواب $x = \pi + 2k\pi$ قابل قبول نیست.

تست - جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ باشد، $\cos x \neq 0$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

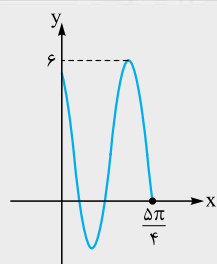
$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

پاسخ - گزینه «۲» از ویژگی $-\cos x = \cos(\pi - x)$ استفاده می کنیم:

$$\cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = \pi - x + 2k\pi \\ 3x = -(\pi - x) + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

چون $\cos x \neq 0$ است، پس $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ است.

نکته تحلیل و حل برخی از سؤالات نمودارهای مثلثاتی، نیاز به حل معادله مثلثاتی دارد.



مثال - نمودار تابع $f(x) = a - 4 \sin(bx - \frac{\pi}{3})$ در بازه $[0, \frac{\Delta\pi}{4}]$ به صورت مقابل است. مقدار b را بیابید.

پاسخ - ماکزیمم تابع برابر $a + 4$ است، پس $a = 2$ است. چون در $x = 0$ تابع نزولی است پس $-4b < 0$

و $b > 0$ است. $x = \frac{\Delta\pi}{4}$ سومین نقطه برخورد تابع با محور x ها است.

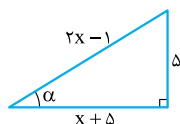
$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2 - 4 \sin(b \frac{\Delta\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \sin(\frac{\Delta b \pi}{4} - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{سومین جواب} : 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\Delta b \pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = 2$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

۷۳۴- در شکل مقابل، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟



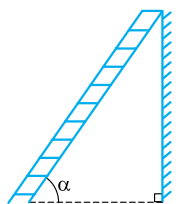
(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{5}{13}$

(۴) $\frac{12}{13}$

(۳) $\frac{13}{15}$

۷۳۵- نردبانی مطابق شکل در کنار یک دیوار قرار گرفته است. اگر طول نردبام $1/25$ برابر ارتفاع دیوار باشد، مقدار تانژانت زاویه‌ای که نردبام با زمین می‌سازد، چه قدر است؟



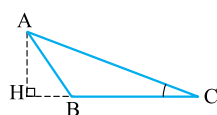
(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{4}{3}$

۷۳۶- در مثلث ABC شکل مقابل $\cos C = 0/8$ است. اگر $AH = 18$ باشد، طول پاره خط CH چه قدر است؟



(۲) ۲۸

(۱) ۲۴

(۴) ۳۶

(۳) ۳۲

۷۳۷- یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین با زاویه 30° پرتاب می‌شود. پس از طی ۸۰۰ متر در همین راستا در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار می‌گیرد؟

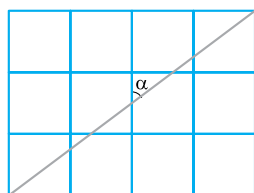
(۴) $400\sqrt{3} + 20$

(۳) ۴۲۰

(۲) $400\sqrt{3}$

(۱) ۴۰۰

۷۳۸- اگر اندازه هر ضلع مربع کوچک یک واحد باشد، مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



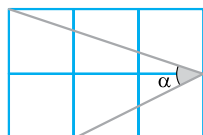
(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{4}$

۷۳۹- هر ضلع مربع کوچک ۱ واحد است. مقدار $\sin \alpha$ کدام است؟



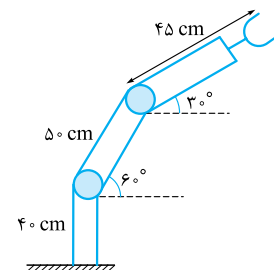
(۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۴۰- در روبات شکل مقابل فاصله نوک گیره از سطح زمین چند سانتی‌متر است؟ ($\sqrt{3} \sim 1/7$)



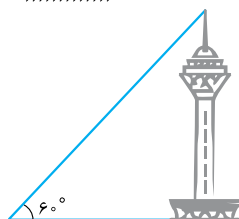
(۱) ۱۰۳

(۲) ۱۰۳/۲۵

(۳) ۱۰۵

(۴) ۱۰۵/۲۵

۷۴۱- طاه‌ها به نوک برج میلاد با زاویه 60° نگاه می‌کند. اگر ارتفاع برج میلاد را ۴۳۵ متر فرض کنیم، طاه‌ها چند متر از برج دور شود تا نوک برج را با زاویه 30° نگاه کند؟



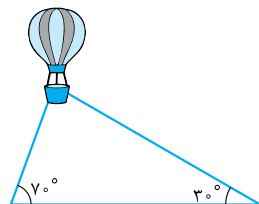
(۱) $290\sqrt{3}$

(۲) $270\sqrt{3}$

(۳) ۴۳۵

(۴) ۳۶۰

۷۴۲- یک بالن مطابق شکل به وسیله دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول یکی از طناب‌ها ۱۸ باشد، طول طناب دوم کدام است؟ ($\sin 70^\circ = 0/9$)



(۲) ۱۰

(۱) ۹

(۴) ۱۲

(۳) ۱۱

۷۴۳- جسمی با دو طناب مطابق شکل آویزان است. a کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

۷۴۴- در شکل مقابل اندازه AB کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

(۲) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

(۴) $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$

۷۴۵- در شکل مقابل $BP = 2PC$ است. حاصل $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{3}$

۷۴۶- در شکل مقابل، $b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} = 4$ و مساحت مثلث برابر ۱۶ است. اندازه ارتفاع وارد بر ضلع BC چه قدر است؟

(۱) ۴

(۳) ۱۲

(۲) ۸

(۴) ۱۶

۷۴۷- مساحت شکل مقابل کدام است؟

(۱) $\frac{9\sqrt{3} + 27}{2}$

(۳) $\frac{18\sqrt{3} + 9}{2}$

(۲) $\frac{9\sqrt{3} + 18}{2}$

(۴) $\frac{18\sqrt{3} + 27}{2}$

۷۴۸- مساحت مثلث ABC در شکل مقابل برابر ۳۶ است. x کدام است؟ ($\sin 70^\circ = 0.9$)

(۱) ۵

(۳) ۷

(۲) ۶

(۴) ۸

۷۴۹- اندازه ضلع هر مربع برابر ۱ واحد است. $\sin \alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۷۵۰- در متوازی الاضلاعی اندازه دو قطر ۱۰ و ۱۸ و زاویه بین دو قطر 150° است. مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

(۱) ۴۵

(۲) ۹۰

(۳) $45\sqrt{3}$

(۴) $90\sqrt{3}$

۷۵۱- اگر مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $6\sqrt{3}$ باشد، اندازه قطر کوچک آن کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$

(۲) $2\sqrt{3}$

(۳) ۲

(۴) ۴

۷۵۲- ناظری مطابق شکل به درختی که بر روی تپه‌ای قرار دارد نگاه می‌کند. ارتفاع درخت کدام است؟ ($\tan 70^\circ = 2/75$)

(۱) ۴۰

(۲) ۶۰

(۳) ۷۰

(۴) ۸۰

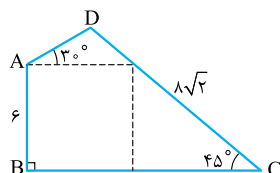
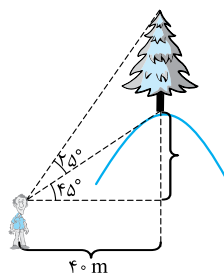
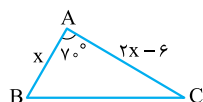
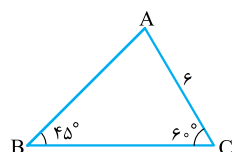
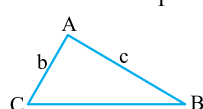
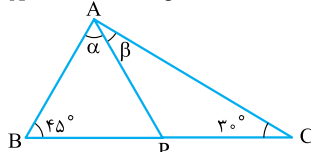
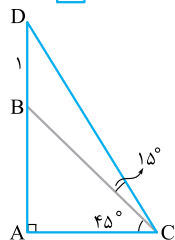
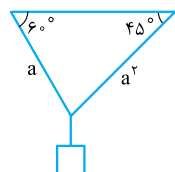
۷۵۳- در شکل مقابل، $CD = 8\sqrt{2}$ و $AB = 6$ می‌باشد. طول AD کدام است؟

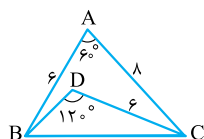
(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) $3\sqrt{2}$

(۴) $4\sqrt{2}$





۷۵۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث BDC چه قدر است؟

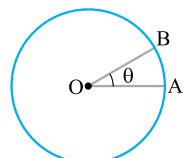
(۲) $3\sqrt{3}$

(۱) $6\sqrt{3}$

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) $4\sqrt{3}$

◀ طول کمان و روابط قطاع

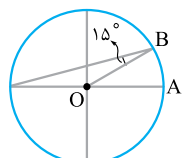
۷۵۵- در دایره شکل مقابل طول کمان AB، $\frac{1}{3}$ شعاع دایره است. زاویه θ چند درجه است؟

(۲) $\frac{3^\circ}{\pi}$

(۱) $\frac{6^\circ}{\pi}$

(۴) 6°

(۳) 3°



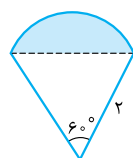
۷۵۶- شعاع دایره مقابل برابر ۱۲ است. اندازه کمان AB کدام است؟

(۲) $\frac{\pi}{3}$

(۱) $\frac{\pi}{6}$

(۴) 2π

(۳) π



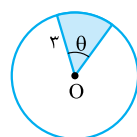
۷۵۷- در شکل مقابل، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

(۲) $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

(۱) $\frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

(۴) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

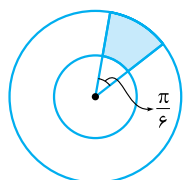
۷۵۸- در شکل مقابل، محیط و مساحت قسمت رنگی از لحاظ عددی با هم برابر است. θ برحسب رادیان کدام است؟

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۱) $\frac{\pi}{3}$

(۴) $\frac{\pi}{4}$

(۳) $\frac{\pi}{3}$



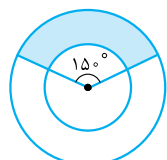
۷۵۹- در شکل مقابل، دو دایره هم مرکز و شعاع آن‌ها ۴ و ۸ است. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

(۱) 2π

(۲) 3π

(۳) 4π

(۴) 6π



۷۶۰- در شکل مقابل دو دایره هم مرکز و شعاع آن‌ها ۳ و ۸ است. محیط ناحیه رنگی کدام است؟

(۲) $5 + 25\frac{\pi}{4}$

(۱) $10 + 25\frac{\pi}{4}$

(۴) $10 + 55\frac{\pi}{6}$

(۳) $5 + 55\frac{\pi}{6}$

◀ دایره مثلثاتی

۷۶۱- انتهای کمان مربوط به زاویه 215° با انتهای کمان مربوط به کدام زاویه زیر در یک ناحیه دایره مثلثاتی قرار ندارد؟

(۴) $-\frac{11\pi}{4}$

(۳) $\frac{13\pi}{5}$

(۲) $-\frac{7\pi}{6}$

(۱) $\frac{2\pi}{3}$

۷۶۲- دو زاویه θ و 49° در یک ناحیه دایره مثلثاتی قرار دارند. θ کدام می تواند باشد؟

(۴) $\frac{8\pi}{5}$

(۳) $\frac{17\pi}{8}$

(۲) $\frac{4\pi}{3}$

(۱) $\frac{5\pi}{6}$

۷۶۳- انتهای کمان مربوط به 53° و α° در دایره مثلثاتی دو سر قطر دایره قرار گرفته اند. α کدام زاویه می تواند باشد؟

(۴) $\frac{35\pi}{18}$

(۳) $\frac{19\pi}{18}$

(۲) $\frac{17\pi}{18}$

(۱) $\frac{\pi}{18}$

۷۶۴- اگر سینوس ۱، ۲ و ۳ رادیان به ترتیب برابر a، b و c باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۴) $c < a < b$

(۳) $a < c < b$

(۲) $c < b < a$

(۱) $a < b < c$

۷۶۵- کدام عدد مثبت است؟

(۴) $\cos 6$

(۳) $\sin 5$

(۲) $\cos 4$

(۱) $\tan 3$

۷۶۶- انتهای کمان زوایای $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$ رئوس کدام چندضلعی است؟ ($k \in \mathbb{N}$)

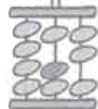
(۴) ۱۲ ضلعی منتظم

(۳) هشت ضلعی منتظم

(۲) شش ضلعی منتظم

(۱) مربع

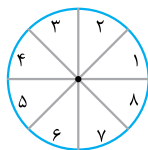




۷۶۷- انتهای کمان‌های زاویه $\theta = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{8}$ چند نقطه را روی دایره مثلثاتی نشان می‌دهد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۷۶۸- در دایره مثلثاتی نیمسازهای نواحی اول و سوم و هم‌چنین دوم و چهارم را رسم کرده‌ایم. اگر $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ و $\tan \alpha < \cot \alpha$ باشد، α در کدام یک از نواحی هشت‌گانه شکل زیر قرار می‌گیرد؟



- (۱) ۳ یا ۷ (۲) ۲ یا ۶ (۳) ۴ یا ۸ (۴) ۱ یا ۵

۷۶۹- اگر $\sin x < \cos x$ و $\tan x > \cot x$ ، زاویه x برحسب رادیان کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{9\pi}{8}$ (۲) $\frac{13\pi}{9}$ (۳) $\frac{17\pi}{10}$ (۴) $\frac{23\pi}{11}$

۷۷۰- نقطه $P(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3})$ روی دایره مثلثاتی انتهای کمان مربوط به زاویه α می‌باشد. مقدار $\frac{\sin \alpha}{\cot \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $-\frac{5}{6}$ (۴) $-\frac{6}{5}$

۷۷۱- مطابق شکل نقطه $P(-\frac{4}{5}, y)$ بر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۷۷۲- مطابق شکل نقطه $P(3a, a-1)$ روی دایره مثلثاتی قرار دارد. $\sin \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $-\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

۷۷۳- در دایره مثلثاتی شکل مقابل مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (۲) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (۳) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

۷۷۴- اگر P روی دایره مثلثاتی بوده و $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل ضرب مختصات نقطه P کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $-\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

۷۷۵- در دایره مثلثاتی شکل مقابل، فاصله دو نقطه A و B از یکدیگر چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

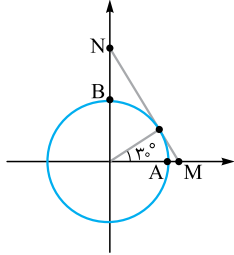
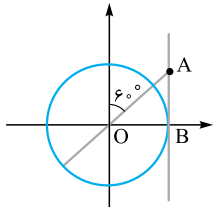
۷۷۶- در دایره مثلثاتی شکل زیر، AB موازی محور کسینوس‌ها و مساحت مثلث OAB برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است. طول پاره خط AB کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

۷۷۷- پاره خط AB در نقطه P بر دایره مثلثاتی مماس شده است. اگر $BP = 3AP$ باشد، α کدام است؟

- (۱) 60° (۲) 65° (۳) 70° (۴) 75°

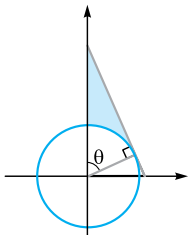




(۴) چهارم

$$-\frac{1}{2} \leq m < 2 \quad (۴)$$

$$-1 \leq m < -\frac{1}{3} \quad (۴)$$



۷۷۸- در دایره مثلثاتی شکل مقابل، طول OA چه قدر است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (۴)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

$$۱ \quad (۳)$$

۷۷۹- در دایره مثلثاتی شکل مقابل MN بر دایره مماس است. حاصل AM + BN کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \quad (۳)$$

۷۸۰- در کدام ناحیه دایره مثلثاتی با افزایش زاویه، مقدار سینوس و کسینوس آن کاهش می‌یابد؟

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

۷۸۱- اگر $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ و $\sin \alpha = \frac{2-m}{3}$ باشد، حدود m کدام است؟

$$\frac{1}{2} < m < 2 \quad (۲)$$

$$2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} < m < 2 \quad (۱)$$

$$-1 \leq m < 2 \quad (۳)$$

۷۸۲- اگر $\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{6}$ و $\cos 2\theta = \frac{2m+1}{2}$ باشد، حدود m کدام است؟

$$-1 \leq m < 0 \quad (۲)$$

$$-\frac{2}{3} < m < 0 \quad (۱)$$

$$-\frac{2}{3} < m < \frac{\sqrt{3}-1}{3} \quad (۳)$$

۷۸۳- در دایره مثلثاتی شکل مقابل مساحت قسمت رنگی کدام است؟

$$\frac{1}{2} \tan \theta - \theta \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} (\tan \theta - \theta) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \tan \theta - \sin \theta \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} (\tan \theta - \sin \theta) \quad (۳)$$

نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $k\pi \pm \alpha$ ۷۸۴- حاصل $\cos(\frac{\pi}{4} + x) + \sin(\frac{\pi}{4} + x)$ کدام است؟

$$\sin x - \cos x \quad (۲)$$

$$\sin x + \cos x \quad (۱)$$

$$\cos x - \sin x \quad (۳)$$

$$-\sin x - \cos x \quad (۴)$$

۷۸۵- اگر $3\cos(\frac{3\pi}{4} + x) = 4\sin(x - \frac{\pi}{4})$ باشد، $\cot x$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۴)$$

۷۸۶- اگر $1 = \cot(\theta + x) \tan(x - \frac{\pi}{4})$ باشد، θ کدام می‌تواند باشد؟

$$\pi \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$2\pi \quad (۴)$$

۷۸۷- اگر α و β مکمل یکدیگر باشند، حاصل $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

$$-\sin \beta \quad (۲)$$

$$\sin \beta \quad (۱)$$

$$\cos \beta \quad (۳)$$

$$-\cos \beta \quad (۴)$$

۷۸۸- در شکل مقابل حاصل $\frac{\cot A - \cot B}{\tan A - \tan B}$ کدام است؟

$$۱ \quad (۱)$$

$$-۱ \quad (۲)$$

$$\tan^2 A \quad (۳)$$

$$\tan^2 B \quad (۴)$$

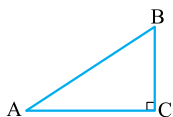
۷۸۹- اگر برای هر x روابط $\cos(\alpha + x) = \sin x$ و $\sin(\alpha - x) = -\cos x$ برقرار باشد، α کدام زاویه می‌تواند باشد؟

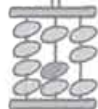
$$\pi \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{3\pi}{4} \quad (۴)$$





۷۹۰- مثلث ABC در رأس A قائمه است. حاصل $\frac{\sin B \cos C}{\sin^2 C}$ کدام است؟

(۱) $\tan^2 B$ (۲) $\tan^2 C$ (۳) $\cot^2 B$ (۴) $\tan C \cot B$

۷۹۱- اگر $\frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 4$ باشد، حاصل $\tan(x - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) -۴ (۴) $-\frac{1}{4}$

۷۹۲- با فرض $\frac{1}{3} = \sin(x + \frac{5\pi}{12}) + \cos(x - \frac{\pi}{12})$ ، حاصل $\cos(x + \frac{11\pi}{12})$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

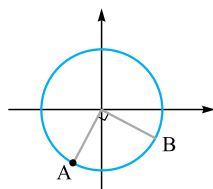
۷۹۳- اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + 2\beta)}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۹۴- اگر $\alpha = \frac{\pi}{16}$ باشد، حاصل $\frac{\sin^2 \alpha \cot 6\alpha}{\tan^2 \alpha \cos 5\alpha}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۷۹۵- اگر A انتهای کمان مربوط به زاویه 240° و B انتهای کمان زاویه θ در دایره مثلثاتی شکل مقابل باشد، $\tan \theta$ کدام است؟



(۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $-\sqrt{3}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۹۶- مقدار $\cos 570^\circ$ با کدام عدد برابر است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۷۹۷- حاصل عبارت $\cos \frac{16\pi}{3} \sin(-\frac{19\pi}{6}) + \tan \frac{17\pi}{4} \sin \frac{11\pi}{6}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۷۹۸- حاصل $\cos(k\pi - \alpha)$ با فرض $k \in \mathbb{Z}$ کدام است؟

(۱) $(-1)^k \cos \alpha$ (۲) $(-1)^{k+1} \cos \alpha$ (۳) $(-1)^k \sin \alpha$ (۴) $(-1)^{k+1} \sin \alpha$

۷۹۹- حاصل $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \dots + \cos \frac{6\pi}{7}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

۸۰۰- مقدار عددی عبارت $A = \sin \frac{10\pi}{3} \cos \frac{11\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $-\frac{7}{4}$

۸۰۱- با فرض $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 70^\circ + \cos 70^\circ} = \tan 20^\circ$ حاصل $\tan 20^\circ = 0$ / ۳۶ کدام است؟

(۱) $\frac{16}{25}$ (۲) $\frac{25}{34}$ (۳) $\frac{25}{16}$ (۴) $\frac{34}{25}$

۸۰۲- اگر $\tan 25^\circ = 0$ / ۴۶ باشد، حاصل $\frac{2 \sin 205^\circ - \cos 155^\circ}{\cos 295^\circ + \sin 115^\circ}$ کدام است؟

(۱) $\frac{4}{27}$ (۲) $\frac{4}{73}$ (۳) $-\frac{4}{27}$ (۴) $-\frac{4}{73}$

۸۰۳- هرگاه $\tan \alpha = 2$ و $\frac{\sin(270^\circ - \alpha) + k \cos(\alpha + 180^\circ)}{2 \cos(\alpha + 90^\circ) - \cos(\alpha - 180^\circ)} = 3$ مقدار k کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۴



۸۰۴- اگر $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ و انتهای کمان θ در ناحیه چهارم باشد، حاصل $\cot \theta - \tan \theta$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۸۰۵- با فرض $\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha} = 0$ حاصل $6 \tan \alpha - 12 \cot \alpha$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-\frac{3}{2}$

۸۰۶- اگر θ منفرجه و $\frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} = 2$ باشد، حاصل $\cot(\theta + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

۸۰۷- اگر $\frac{1}{4} = \sin x + \cos(x + \frac{\pi}{4})$ و انتهای کمان x در ناحیه دوم باشد، مقدار $\cos x$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{63}}{8}$ (۳) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{63}}{8}$

۸۰۸- اگر $\cot(\frac{\pi}{4} - x) = 3$ و انتهای کمان x در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (۲) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (۳) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ (۴) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

۸۰۹- اگر $1 = 3 \cos(\pi - x) - 2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$ باشد، مقدار $2 \sin(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ کدام می تواند باشد؟

(۱) صفر (۲) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (۳) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

۸۱۰- اگر $\tan \alpha = \frac{5}{11}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت $\sin(\frac{7\pi}{4} - \alpha) \cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

(۱) $\frac{65}{144}$ (۲) $\frac{60}{169}$ (۳) $-\frac{65}{144}$ (۴) $-\frac{60}{169}$

۸۱۱- با فرض $\frac{2 \tan \alpha + \tan(\frac{3\pi}{4} - \alpha)}{\cot(\frac{\pi}{4} - \alpha) - 2 \cot(\pi - \alpha)} = \frac{3}{4}$ مقدار $\sin \alpha$ کدام می تواند باشد؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۸۱۲- حاصل عبارت $\frac{1}{1 + \tan 60^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 60^\circ}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) ۲

۸۱۳- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{3k-1}$ و $\cot \alpha = 4k + 2$ باشد، مقدار k کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) $-\frac{2}{3}$

۸۱۴- اگر $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{1 + \tan^2 x} (\cos x - \frac{1}{\cos x})$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۸۱۵- با فرض $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ ، حاصل $\frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$ کدام است؟

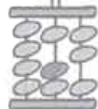
(۱) $\sin x$ (۲) $-\sin x$ (۳) $\sin^2 x$ (۴) $-\sin^2 x$

۸۱۶- اگر $2 = \frac{\sin \theta + 2 \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$ باشد، حاصل $\cot(\frac{3\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) -۴ (۴) $-\frac{1}{4}$

۸۱۷- اگر $5 = 7 \sin^2 x + 3 \cos^2 x$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۱



۸۱۸- اگر $\sin^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \sin^2(\beta + \frac{\pi}{4}) = 1$ باشد، حاصل $\alpha + \beta$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{5\pi}{12}$ (۲) $\frac{7\pi}{12}$ (۳) $\frac{3\pi}{4}$ (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۸۱۹- با فرض $\tan \alpha = 3$ ، حاصل $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/2$ (۳) 20 (۴) 40

۸۲۰- با فرض $\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{1 - \sin x}$ ، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

۸۲۱- اگر $\tan x = 2$ باشد، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{16}{25}$ (۲) $\frac{17}{25}$ (۳) $\frac{18}{25}$ (۴) $\frac{19}{25}$

۸۲۲- با فرض $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2$ ، حاصل $\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۸۲۳- با فرض $\frac{1}{\cos x} = 2 \sin x$ ، حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۸۲۴- اگر $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\sqrt{\sin^6 \theta + \cos^6 \theta}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{9}$ (۲) $\frac{7}{9}$ (۳) $\frac{\sqrt{97}}{9}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۸۲۵- با فرض $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{47}{128}$ (۲) $\frac{49}{128}$ (۳) $-\frac{43}{128}$ (۴) $-\frac{45}{128}$

۸۲۶- با فرض $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ ، حاصل $\tan^2 x + \cot^2 x$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 4 (۳) 14 (۴) 16

۸۲۷- با فرض $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{25}{8}$ ، حاصل $|\sin \alpha - \cos \alpha|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۸۲۸- تساوی $a \tan^2 x + b \tan^4 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x}$ برای $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ برقرار است. حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) -1 (۴) -2

◀ اتحادهای مثلثاتی کمان 2α

۸۲۹- اگر $\cos(\pi + \theta) + \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{1}{3}$ ، حاصل $\sin 2\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۳) $-\frac{4}{9}$ (۴) $-\frac{8}{9}$

۸۳۰- اگر $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه چهارم باشد، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $-\frac{5}{9}$ (۴) $-\frac{4}{9}$

۸۳۱- اگر $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ (۲) $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۴) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

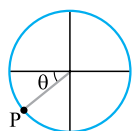
۸۳۲- اگر $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم باشد، حاصل $\cos 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $-\frac{3}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

۸۳۳- با فرض $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{9}{10}$ (۳) $-\frac{9}{10}$ (۴) $-\frac{1}{10}$





۸۳۴- اگر θ حاده و $\sin 2\theta = 0/69$ باشد، مقدار $\sin \theta + \cos \theta$ چه قدر است؟

- (۱) $1/1$ (۲) $1/2$ (۳) $1/3$ (۴) $1/4$

۸۳۵- با فرض $P = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$ ، حاصل $P - 1$ کدام است؟

- (۱) $\cos 2\alpha$ (۲) $-\cos 2\alpha$ (۳) $\sin 2\alpha$ (۴) $-\sin 2\alpha$

۸۳۶- با فرض $\frac{3 - \tan \alpha}{4 + 2 \tan \alpha} = \frac{1}{3}$ مقدار $\sin^2 \alpha - \cos 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۸۳۷- با فرض $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ مقدار $\cos 4\theta$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{31}{32}$ (۲) $-\frac{31}{32}$ (۳) $\frac{63}{64}$ (۴) $-\frac{63}{64}$

۸۳۸- اگر $\sin \theta < \sin^2 \theta$ و $\sin 2\theta < 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۸۳۹- نقطه $P(x, x + \frac{1}{5})$ مطابق شکل زیر روی دایره مثلثاتی قرار دارد. حاصل $\sin 2\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{25}$ (۲) $\frac{24}{25}$ (۳) $-\frac{12}{25}$ (۴) $-\frac{24}{25}$

۸۴۰- اگر α در ناحیه دوم مثلثاتی واقع باشد به طوری که $\sin \alpha = 0/8$ ، حاصل $\frac{1 - \cos(\pi + 2\alpha)}{1 + \cos(\frac{\pi}{3} - 2\alpha)}$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) $\frac{9}{13}$ (۴) $\frac{18}{13}$

۸۴۱- با فرض $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ حاصل $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $-\frac{4}{5}$ (۴) $-\frac{3}{5}$

۸۴۲- اگر $\frac{1}{4} = \sin^2 x - 4 \cos^2 x$ باشد، مقدار $\cos 2x$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

۸۴۳- با فرض $1 = \cos(x - \frac{\pi}{5}) + \sin(x + \frac{3\pi}{10})$ حاصل $2 \cos(x - \frac{\pi}{5}) - \cos(\frac{2\pi}{5} - 2x)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{9}$ (۲) $\frac{7}{9}$ (۳) $-\frac{3}{9}$ (۴) $\frac{2}{9}$

۸۴۴- اگر $\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x = \sqrt{3}$ باشد، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۸۴۵- اگر $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{4}$ و $a, b \in \mathbb{N}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۸۴۶- مقدار عددی $\sin \frac{3\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{\sqrt{3} - 1}$ (۴) $\frac{\sqrt{\sqrt{3} + 1}}{2}$

۸۴۷- اگر $\theta = 11/25^\circ$ باشد، حاصل $A = \sin^3 \theta \cos \theta - \cos^3 \theta \sin \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

۸۴۸- با فرض $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 3$ حاصل $\tan(\frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{3})$ کدام است؟

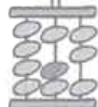
- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۸۴۹- اگر زاویه θ منفرجه و $1 + \cos \theta = \cos \frac{\theta}{3}$ باشد، مقدار $\tan 2\theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $-\sqrt{3}$

۸۵۰- با فرض $\tan 2x = \frac{1}{3}$ حاصل $\tan x - \cot x$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{2}{3}$



۸۵۱- حاصل عبارت $\sin^4 \frac{\pi}{12} + \sin^4 \frac{5\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۸۵۲- در تابع $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ ، حاصل $f(\frac{\pi}{8})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{16}$ (۴) $\frac{7}{16}$

۸۵۳- در شکل مقابل M و N وسط اضلاع مربع هستند. مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

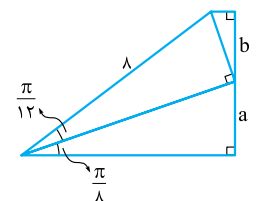
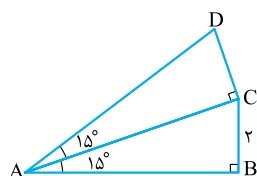
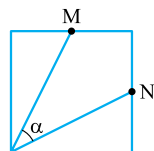
- (۱) $\frac{21}{25}$ (۲) $\frac{2\sqrt{6}}{25}$ (۳) $\frac{24}{25}$ (۴) $\frac{4\sqrt{21}}{25}$

۸۵۴- در شکل مقابل طول AD کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۸ (۴) $4\sqrt{3}$

۸۵۵- در شکل مقابل حاصل ab کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$



دوره تناوب

۸۵۶- دوره تناوب تابع $y = 1 + 2\cos(2\pi x)$ چند برابر دوره تناوب تابع $y = 2 - 3\sin \frac{\pi}{3}x$ است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۶ (۴) $\frac{1}{6}$

۸۵۷- اگر دوره تناوب تابع $y = 3\sin \frac{\pi}{a}x$ برابر ۴ باشد، دوره تناوب تابع $y = 1 + \tan(a\pi x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

۸۵۸- دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x \sin(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۸۵۹- دوره تناوب تابع $y = \tan 3x - \cot 3x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) π

۸۶۰- اگر $f(x) = \cos 2x$ باشد، دوره تناوب تابع $y = f(x + \frac{\pi}{4})f(x - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

۸۶۱- دوره تناوب $f(x) = 4\sin^2 ax$ نصف دوره تناوب تابع $g(x) = \tan \frac{3}{4}x$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۸۶۲- دوره تناوب تابع $f(x) = 5\sin^2 \frac{\pi}{6}x$ برابر دوره تناوب $g(x) = \tan \frac{2\pi}{3a}x$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۸۶۳- اگر $T = 3$ دوره تناوب تابع $y = f(6ax)$ باشد، دوره تناوب تابع $y = 6f(\frac{a}{3}x)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) ۱۸ (۴) ۵۴

تابع سینوس و کسینوس

۸۶۴- در تابع $f(x) = 5 - 3\sin \pi x$ مجموع ماکزیمم و مینیمم تابع چند برابر دوره تناوب است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰



۸۶۵- دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع مثلثاتی f ، به ترتیب $\frac{\pi}{6}$ ، ۴ و -۲ است. ضابطه f کدام می تواند باشد؟

(۱) $f(x) = 3 \sin 6x + 1$ (۲) $f(x) = 3 \cos 12x - 1$ (۳) $f(x) = 1 - 3 \cos 12x$ (۴) $f(x) = 1 - 3 \sin 6x$

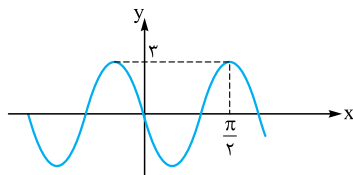
۸۶۶- دوره تناوب تابع $y = 1 + a \sin(\frac{a\pi}{3}x)$ برابر ۴ است. اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع چه قدر است؟

(۱) ۳ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۴ (۴) ۲

۸۶۷- در تابع $y = \frac{a}{4} \cos(3ax)$ ، حاصل ضرب دوره تناوب در اختلاف مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن چه قدر است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{8\pi}{3}$

۸۶۸- قسمتی از نمودار تابع f به صورت مقابل است. ضابطه f کدام می تواند باشد؟



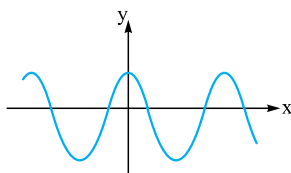
(۱) $y = 3 \sin 3x$

(۲) $y = -3 \sin 6x + 6$

(۳) $y = 3 \sin 6x$

(۴) $y = -3 \sin 3x$

۸۶۹- نمودار کدام تابع به صورت مقابل است؟



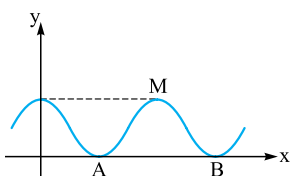
(۲) $y = -2 \cos \frac{\pi}{4}x + 1$

(۱) $y = 2 \cos \frac{\pi}{4}x - 1$

(۴) $y = -2 \cos \frac{\pi}{4}x - 1$

(۳) $y = 2 \cos \frac{\pi}{4}x + 1$

۸۷۰- قسمتی از نمودار تابع $y = 3 - 3 \sin \frac{\pi}{4}x$ شکل روبه‌رو است. مساحت مثلث با رئوس M ، A و B کدام است؟



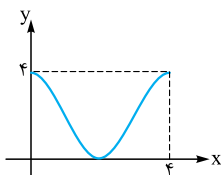
(۱) ۲۱

(۲) ۱۸

(۳) ۲۴

(۴) ۱۵

۸۷۱- نمودار تابع مثلثاتی f در بازه $[0, 4]$ به صورت مقابل است. ضابطه f کدام می تواند باشد؟



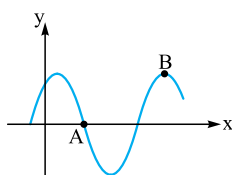
(۲) $2 + 2 \cos \pi x$

(۱) $2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}x$

(۴) $2 - 2 \cos \pi x$

(۳) $2 - 2 \cos \frac{\pi}{4}x$

۸۷۲- قسمتی از نمودار تابع $y = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{4})$ به صورت مقابل است. اختلاف طول نقاط A و B چه قدر است؟



(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۱) $\frac{\pi}{4}$

(۴) $\frac{4\pi}{3}$

(۳) $\frac{3\pi}{4}$

۸۷۳- در نمودار تابع $f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{4}x$ خطی که یکی از نقاط ماکزیمم را به یکی از نقاط مینیمم وصل می کند، دارای بیشترین شیب است. شیب این خط کدام است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

۸۷۴- تابع $f(x) = 3 - \cos(x + \frac{\pi}{6})$ در بازه $(0, k)$ صعودی است. حداکثر k کدام است؟

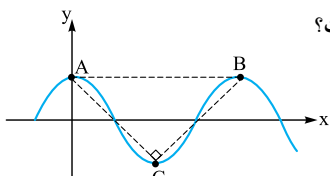
(۴) $\frac{7\pi}{24}$

(۳) $\frac{5\pi}{24}$

(۲) $\frac{\pi}{12}$

(۱) $\frac{\pi}{24}$

۸۷۵- قسمتی از نمودار $y = a \cos \frac{\pi}{4}x$ رسم شده است. اگر مثلث ABC در رأس C قائمه باشد، a کدام است؟



(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

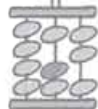
۸۷۶- نقاط A و B بر نقاط ماکزیمم و نقطه C بر نقطه مینیمم تابع $f(x) = a \cos ax$ واقع شده‌اند. حداقل مساحت مثلث ABC چه قدر است؟

(۴) 2π

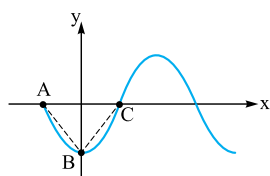
(۳) 4π

(۲) $\frac{3\pi}{2}$

(۱) $\frac{4\pi}{3}$

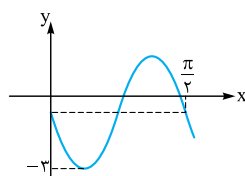


۸۷۷- شکل مقابل نمودار تابع $y = a \cos a\pi x$ است. اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد، a کدام است؟



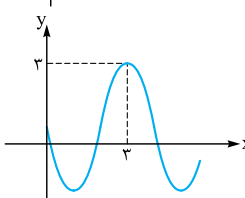
- (۱) $\sqrt{\frac{3}{4}}$
(۲) $\sqrt{\frac{3}{4}}$
(۳) $-\sqrt{\frac{3}{4}}$
(۴) $-\sqrt{\frac{3}{4}}$

۸۷۸- نمودار تابع $y = a \sin bx - 1$ به صورت مقابل است. $\frac{a}{b}$ کدام است؟



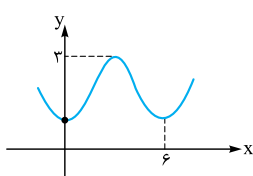
- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $-\frac{1}{2}$

۸۷۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(b\pi x) + 1$ به صورت مقابل است. ab کدام است؟



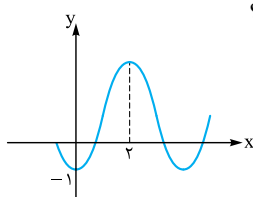
- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $-\frac{1}{3}$

۸۸۰- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a - \cos b\pi x$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{8}{5}$ کدام است؟



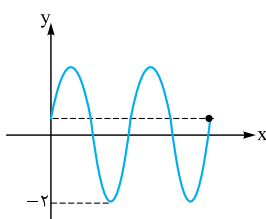
- (۱) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
(۴) $\frac{5}{2}$

۸۸۱- قسمتی از نمودار تابع $y = 2 + a \cos b\pi x$ به صورت زیر است. مقدار ماکزیمم چند برابر دوره تناوب تابع است؟



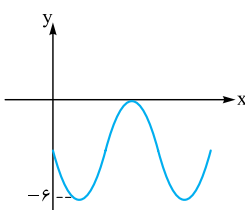
- (۱) $0/8$
(۲) ۱
(۳) $1/25$
(۴) $2/5$

۸۸۲- شکل مقابل نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $(0, \frac{4}{5})$ است. بیشترین مقدار $a + b$ کدام است؟



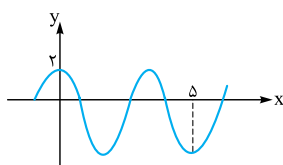
- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۲
(۳) $\frac{11}{2}$
(۴) ۸

۸۸۳- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin \frac{\pi}{3} x$ به صورت مقابل است. مقدار $f(\frac{9}{4})$ کدام است؟



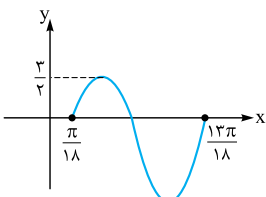
- (۱) صفر
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

۸۸۴- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \cos b\pi x - 2$ به صورت مقابل است. $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) $3/4$
(۲) $3/5$
(۳) $4/5$
(۴) $4/4$

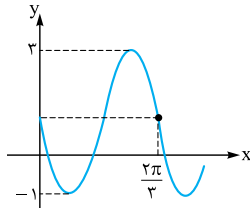
۸۸۵- قسمتی از نمودار تابع $y = a - 3 \sin bx$ به صورت مقابل است. حاصل $2ab$ کدام است؟



- (۱) ۹
(۲) ۱۸
(۳) -۹
(۴) -۱۸



۸۸۶- نمودار تابع $y = a \sin bx + c$ به صورت مقابل است. حاصل $ab - c$ کدام است؟



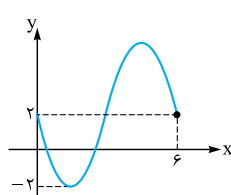
(۱) ۵

(۲) -۵

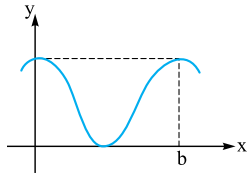
(۳) -۷

(۴) ۷

۸۸۷- نمودار تابع $f(x) = a \cos \pi(bx + \frac{\pi}{4}) + c$ در یک دوره تناوب آن به صورت مقابل است. حاصل abc کدام است؟

(۲) $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$

۸۸۸- قسمتی از نمودار $f(x) = a + b \cos \frac{2\pi a}{9} x$ به شکل روبه‌رو است. حاصل $f(a)$ کدام است؟



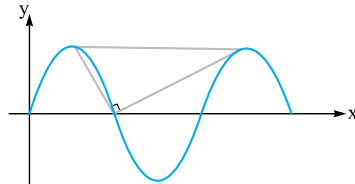
(۲) ۶

(۱) ۴

(۴) ۱۲

(۳) ۹

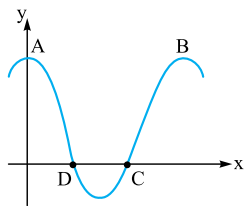
۸۸۹- در شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(2\pi x)$ رسم شده است. به ازای کدام مقدار a ، مثلث



رنگی، قائم‌الزاویه است؟

(۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۸۹۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + 2 \cos(\pi x)$ به صورت مقابل است. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



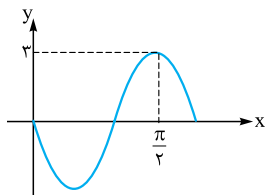
(۱) ۲

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) ۸

(۴) ۴

۸۹۱- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin bx \cos bx$ به صورت مقابل است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



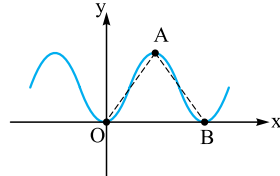
(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) -۴

(۴) -۲

۸۹۲- نمودار تابع $y = 2 \sin^2 x$ به صورت مقابل است. مساحت مثلث OAB کدام است؟

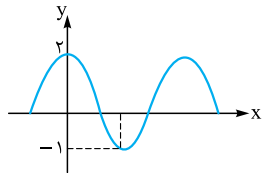
(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۱) π

(۴) ۲π

(۳) $\frac{2\pi}{3}$

۸۹۳- قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin^2 x$ به صورت مقابل است. حاصل $a - b$ کدام است؟



(۲) -۴

(۱) صفر

(۴) ۱

(۳) ۵

۸۹۴- نمودار تابع $y = |\sin x|$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ بر نمودار کدام تابع زیر منطبق است؟

$$y = \cos(\frac{3\pi}{4} + x) \quad (۴)$$

$$y = \sin(\frac{3\pi}{4} + x) \quad (۳)$$

$$y = \sin(\pi - x) \quad (۲)$$

$$y = \cos(\frac{\pi}{4} + x) \quad (۱)$$

۸۹۵- نمودار تابع $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ بر نمودار تابع $g(x) = \sin(x + \theta)$ منطبق است. θ کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{4\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (۳)$$

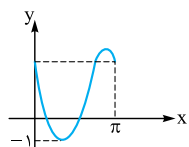
$$\frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۱)$$



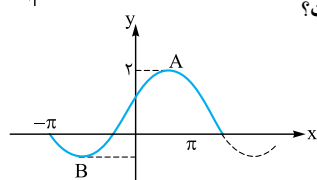
۸۹۶- نمودار تابع $f(x) = \sin(3x - \pi)$ بر نمودار $g(x) = \cos(ax + b)$ منطبق است. زوج مرتب (a, b) کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $(3, \frac{3\pi}{4})$ (۲) $(1, \frac{\pi}{4})$ (۳) $(1, -\frac{3\pi}{4})$ (۴) $(3, -\frac{3\pi}{4})$



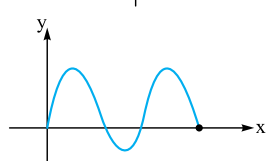
۸۹۷- قسمتی از نمودار تابع $y = a + 2\sin(bx - \frac{\pi}{3})$ به صورت مقابل است. مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳



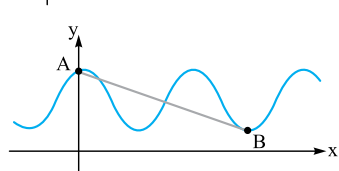
۸۹۸- نمودار تابع $f(x) = a - b\sin(x + \frac{\pi}{6})$ در بازه $[-\pi, \pi]$ به صورت زیر است. شیب پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{\pi}$ (۲) $\frac{1}{\pi}$ (۳) $\frac{2}{3\pi}$ (۴) $\frac{1}{3\pi}$



۸۹۹- نمودار تابع $f(x) = 1 + a\cos(bx - \frac{\pi}{3})$ در بازه $[0, \frac{5\pi}{3}]$ به صورت مقابل است. مقدار b کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{5}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $-\frac{7}{5}$ (۴) -۲



۹۰۰- قسمتی از نمودار تابع $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ به صورت مقابل است. شیب پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{\pi}$ (۲) $-\frac{2}{\pi}$ (۳) $-\frac{3}{\pi}$ (۴) $-\frac{4}{\pi}$

تابع تانژانت

۹۰۱- انتهای کمان α در کدام ناحیه از دایره مثلثاتی قرار داشته باشد تا با افزایش α مقدار $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ ، افزایش یابد، ولی مقدار $|\tan \alpha|$ کاهش یابد؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۹۰۲- اگر $\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{3\pi}{8}$ و $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ باشد، $\tan 2\theta = \frac{1}{3m-1}$ حدود m کدام است؟

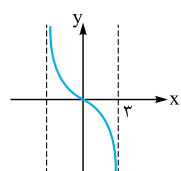
- (۱) $(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}) - \{\frac{1}{3}\}$ (۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}) - \{\frac{1}{3}\}$ (۳) $\mathbb{R} - [\frac{2}{3}, \frac{5}{3}]$ (۴) $\mathbb{R} - [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

۹۰۳- به ازای چند عدد حقیقی در بازه $(0, 2\pi)$ تابع $f(x) = \tan \frac{3x}{4}$ تعریف نشده است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

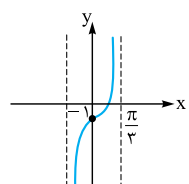
۹۰۴- تابع $f(x) = 2 - \tan(\pi - \frac{3}{4}x)$ در بازه $(k, 0)$ اکیداً یکتا است. کمترین مقدار k کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{4}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$ (۳) $-\frac{3\pi}{4}$ (۴) $-\frac{3\pi}{4}$



۹۰۵- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \cot(\frac{\pi}{4} + ax)$ به صورت مقابل است. a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6}$



۹۰۶- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + \tan(\frac{\pi}{4} + bx)$ به شکل روبه‌رو است. مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{11}{6}$ (۲) $-\frac{11}{4}$ (۳) $-\frac{7}{4}$ (۴) $-\frac{5}{6}$

۹۰۷- تابع $y = 3\tan(\frac{\pi}{3} - 2x)$ در بازه $(-a, a)$ اکیداً نزولی است. حداکثر a کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

معادلات مثلثاتی

۹۰۸- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب معادله $2\sin 2x = -1$ در بازه $(0, 2\pi)$ چه قدر است؟

- (۱) π (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$



۹۰۹- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $4\cos^2 x = 1$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

۹۱۰- یکی از جواب‌های معادله $\sqrt{3} = 0$ $k\cos^2 x + \sqrt{3} = 0$ برابر $\frac{5\pi}{12}$ است. بزرگ‌ترین جواب این معادله در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7\pi}{12}$ (۲) $\frac{13\pi}{12}$ (۳) $\frac{17\pi}{12}$ (۴) $\frac{19\pi}{12}$

۹۱۱- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{3})\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $k\pi - \frac{\pi}{12}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{12}$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

۹۱۲- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) $\frac{8\pi}{3}$ (۳) 2π (۴) $\frac{3\pi}{2}$

۹۱۳- جواب کلی معادله $\cos(x - \frac{\pi}{6})\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{12}$ (۴) $k\pi + \frac{5\pi}{12}$

۹۱۴- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^3 x + \sin x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$

۹۱۵- معادله $\cos^2 x + \cos x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۱۶- مجموع جواب‌های معادله $\sin^3 x + \cos x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۹۱۷- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + \sin(x + \pi) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 3π (۳) 4π (۴) 5π

۹۱۸- جواب کلی معادله مثلثاتی $2\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 1 = 0$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۹۱۹- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin^4 x + \sin^2 x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2k\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{2k\pi}{3}$ (۳) $\frac{4k\pi}{3}$ (۴) $k\pi - \frac{2k\pi}{3}$

۹۲۰- اختلاف جواب‌های معادله $\sin x(2\sin x - 9) = 5$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) π (۴) $\frac{4\pi}{3}$

۹۲۱- مجموع جواب‌های معادله $\sin^2 x + \cos x = \frac{1}{4}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چه قدر است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{5\pi}{2}$

۹۲۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{11\pi}{6} \end{cases}$

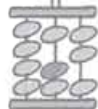
۹۲۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos^2 x - 2\sin^2 x = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

۹۲۴- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\frac{\pi}{4} + x)\cos(\pi + x) + 2\cos(x - \pi) = 1$ (k ∈ Z) کدام است؟

- (۱) $k\pi$ (۲) $2k\pi$ (۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi - \pi$





۹۲۵- جواب کلی معادله $\frac{\cos x(2\cos x + 1) - 1}{\sin x} = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۹۲۶- اگر $x = \frac{\Delta\pi}{6}$ یک ریشه معادله $\cos 2x + a \sin x = 0$ باشد، مجموع ریشه‌های متمایز آن در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{\Delta\pi}{2}$

۹۲۷- معادله $\sin x = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۲۸- جواب‌های معادله $\frac{\sin x}{\cos 2x} = \frac{\cos x}{\sin 2x}$ بر روی دایره مثلثاتی رئوس کدام چندضلعی هستند؟

- (۱) مستطیل (غیرمربع) (۲) مربع (۳) دوزنقه (۴) شش‌ضلعی منتظم

۹۲۹- اگر θ کوچک‌ترین ریشه مثبت معادله $\cos 2x = \Delta \cos x - 3$ باشد، مقدار $\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۹۳۰- معادله $\sin 3x + \cos 3x = -1$ در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۳۱- جواب کلی معادله $1 + \cot^2 x = 8 \cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۹۳۲- نقطه انتهایی کمان‌های جواب‌های معادله $\frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2 \cos x + 2$ بر روی دایره مثلثاتی رئوس کدام چندضلعی است؟

- (۱) مثلث قائم‌الزاویه (۲) مثلث متساوی‌الساقین (۳) مستطیل (۴) لوزی

۹۳۳- θ و $\frac{\pi}{6}$ ریشه‌های معادله $\sin 2x - \sin x - \cos x = k$ در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ هستند. θ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\Delta\pi}{6}$

۹۳۴- مجموع جواب‌های معادله $\tan x + \sin x = 1 + \cos x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) $\frac{\Delta\pi}{2}$ (۳) 3π (۴) $\frac{7\pi}{2}$

۹۳۵- جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 3x = \cos ax$ بر روی دایره مثلثاتی رئوس یک ۷ضلعی منتظم هستند. عدد طبیعی a کدام است؟

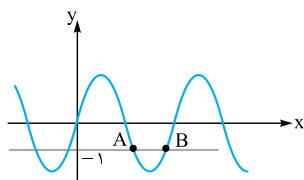
- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۰

۹۳۶- اگر α و β ریشه‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ باشند، مقدار $|\alpha - \beta|$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۹۳۷- نمودار تابع $y = 2 \sin 5x$ به صورت مقابل است. طول پاره خط AB کدام است؟

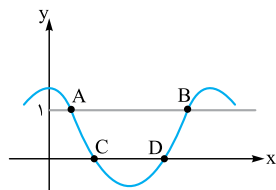
- (۱) $\frac{\pi}{15}$ (۲) $\frac{2\pi}{15}$ (۳) $\frac{\pi}{5}$ (۴) $\frac{4\pi}{15}$



۹۳۸- در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 + 2 \cos \frac{x}{4}$ رسم شده است. طول پاره خط AB .

چند برابر طول پاره خط CD است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۳



۹۳۹- تابع $f(x) = -3 \sin ax$ در $x = \frac{1}{4}$ دارای کم‌ترین مقدار است. در کدام نقطه دارای بیشترین مقدار است؟ ($a \neq 0$)

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۹۴۰- نمودار تابع $y = -3 \cos(\frac{\pi}{3} - 4\pi x)$ روی بازه $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

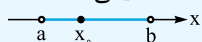


حد و پیوستگی

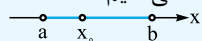
مفهوم حد و فرایندهای حد

همسایگی

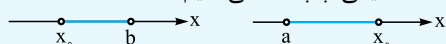
همسایگی: هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم. در واقع اگر $x_0 \in (a, b)$ ، آن‌گاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 است.



همسایگی محذوف: اگر بازه (a, b) یک همسایگی x_0 باشد، آن‌گاه مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ را یک همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.



همسایگی چپ و راست: بازه باز (x_0, b) را یک همسایگی راست x_0 و بازه باز (a, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.



(سراسری ۹۸)

تست به ازای کدام مجموعه مقادیر x بازه $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

$$1/5 < x < 2/5$$

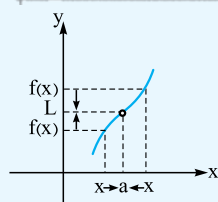
$$2 < x < 2/5$$

$$\{2\}$$

$$\emptyset$$

$$x+1 < 3 < 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 < 3 \\ 3 < 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

پاسخ گزینه «۱» باید بازه داده شده، شامل عدد ۳ باشد.



مفهوم حد فرض کنید f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. اگر با نزدیک شدن x روی محور

x ها به a ، $f(x)$ روی محور y ها به اندازه کافی به L نزدیک شود، گوئیم حد f در نقطه a برابر L است و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

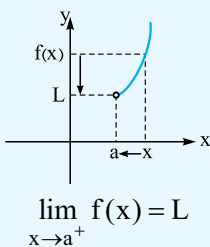
می‌نویسیم:

حد راست و چپ فرض کنید f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد. اگر با نزدیک شدن x با مقادیر بیشتر از a به $f(x)$ به اندازه

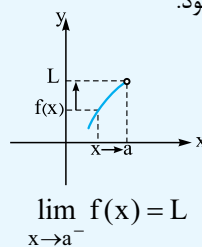
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

کافی به L نزدیک شود، گوئیم حد راست f در نقطه a برابر L است و می‌نویسیم:

به طور مشابه حد چپ نیز تعریف می‌شود.



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

نتیجه به شرطی تابع f در a حد دارد که حد چپ و راست f در a موجود و برابر باشند.

تست تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x < 1 \\ 2[-x] + 5 & x > 1 \end{cases}$ در $x=1$ حد دارد. مقدار a کدام است؟

$$\text{صفر (۴)}$$

$$-2 \text{ (۳)}$$

$$3 \text{ (۲)}$$

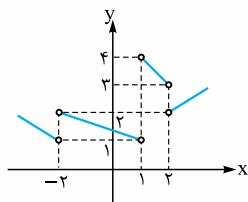
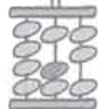
$$1 \text{ (۱)}$$

پاسخ گزینه «۳» حد چپ و راست تابع f در نقطه $x=1$ را محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 3x) = a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2[-x] + 5) = 2(-2) + 5 = 1$$

پس $a + 3 = 1$ و در نتیجه $a = -2$ است.



تست نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(-\frac{2}{x}))$ کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

$$x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow -\frac{2}{x} < -2$$

پاسخ گزینه «۴» وقتی $x \rightarrow 1^-$ حاصل $-\frac{2}{x}$ به $(-2)^-$ میل می کند، زیرا:

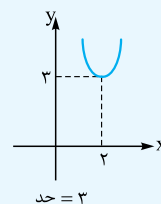
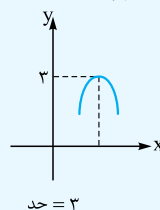
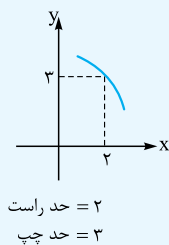
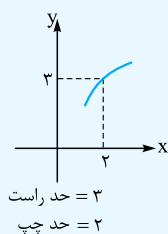
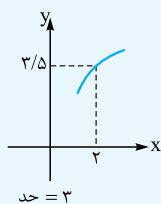
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(-\frac{2}{x})) = f(\underbrace{f(-2^-)}_{1^+}) = f(1^+) = 4$$

پس به صورت مقابل حد را محاسبه می کنیم:

◀ **حد تابع جزء صحیح** فرض کنید f یک چندجمله‌ای باشد. اگر $f(a) \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه تابع $y = [f(x)]$ در $x = a$ حد دارد. اگر $f(a) \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه تابع $y = [f(x)]$ در $x = a$ حد ندارد به جز نقاط $\max$ و $\min$ نسبی (در مورد این نقاط در مبحث کاربرد مشتق صحبت می کنیم). جدول زیر حالت‌های مختلف نکته بالا را نشان می دهد.

$f(a) \notin \mathbb{Z}$		$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [f(a)]$	حد دارد
$f(a) \in \mathbb{Z}$		$f \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} [f(x)] = f(a) - 1 \end{cases}$ اکیداً صعودی	حد ندارد
		$f \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = f(a) - 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^-} [f(x)] = f(a) \end{cases}$ اکیداً نزولی	حد ندارد
		$\max \text{ نقطه } a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = f(a) - 1$	حد دارد
		$\min \text{ نقطه } a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = f(a)$	حد دارد

به طور مثال در شکل‌های زیر $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]$ محاسبه شده است.





۷۲۴- ۱ تابع $f(x)$ را به صورت دوضابطه ای می نویسیم.

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq -1 \\ 5x+1 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع } f(x) \text{ اکیداً صعودی است.}$$

بنابراین:

$$f \circ f(x) > f(4x-3) \Rightarrow f(f(x)) > f(4x-3)$$

$$\Rightarrow f(x) > 4x-3$$

$$\xrightarrow{x \geq -1} 3x-1 > 4x-3 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -1 \leq x < 2 \quad (1)$$

$$\xrightarrow{x < -1} 5x+1 > 4x-3 \Rightarrow x > -4 \Rightarrow -4 < x < -1 \quad (2)$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow -4 < x < 2 \Rightarrow x \in (-4, 2) \quad \text{در نتیجه:}$$

۷۲۵- ۲ می دانیم تابع $y = 4^x$ اکیداً صعودی است.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} > 16^{1-x} \Rightarrow 4^{-x^2+x} > 4^{2-2x}$$

$$\Rightarrow -x^2+x > 2-2x \Rightarrow x^2-3x+2 < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

۷۲۶- ۴ تابع g نزولی اکید و $f \circ g$ صعودی است. بنابراین تابع f نزولی است. در نتیجه:

$$f(1) \geq f(2) \geq f(6) \Rightarrow 8 \geq k \geq 4$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

۷۲۷- ۴ تابع $f(x) = x + \sqrt{x-1}$ اکیداً صعودی است، بنابراین

$$y = \frac{1}{f(x)} \text{ اکیداً نزولی و در نتیجه } y = -\frac{1}{f(x)} \text{ اکیداً صعودی می باشد.}$$

دقت داشته باشید چون $f(x)$ اکیداً صعودی است، توابع $y = -f(x)$ و $y = f(-x)$ اکیداً نزولی می باشند.

۷۲۸- ۱ تابع f اکیداً صعودی و $f(4) = 0$ است. بنابراین تابع

$f(3-x)$ اکیداً نزولی و در $x = -1$ برابر صفر است.

$$\frac{x-1}{f(3-x)} \geq 0$$

x	-1	1
$x-1$	-	+
$f(3-x)$	+	-
p	-	+

$$\Rightarrow D = (-1, 1]$$

۷۲۹- ۴ دامنه تابع $y = \sqrt{f(x+2) - f(2-x)}$ جواب نامعادله $f(x+2) - f(2-x) \geq 0$ است. بنابراین:

$$f(x+2) \geq f(2-x) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی است}} x+2 \leq 2-x$$

$$\Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D = (-\infty, 0]$$

۷۳۰- ۴ تابع $y = \sqrt{5-x}$ اکیداً نزولی و $y = -\sqrt{5-x}$ اکیداً صعودی می باشد.

تابع $y = 2\sqrt{x-1}$ نیز اکیداً صعودی است.

بنابراین تابع $f(x)$ در دامنه خود اکیداً صعودی است.

$$f(x) = 2\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x} \Rightarrow D_f = [1, 5]$$

$$\Rightarrow R_f = [f(1), f(5)] \Rightarrow R_f = [-2, 4] \Rightarrow b = 4$$

$$f(b+1) = f(5) = 4 \quad \text{خواهیم داشت:}$$

۷۳۱- ۱ تبدیلات زیر را بر تابع $y = f(x)$ و نمودار آن اعمال می کنیم.

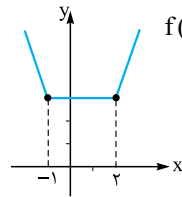
$$y = f(x) \xrightarrow[\text{۱ واحد به سمت چپ}]{x \rightarrow x+1} y = f(x+1)$$

$$\xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{1}{2}]{x \rightarrow 2x} y = f(2x+1)$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{x \rightarrow -x} y = f(1-2x)$$

نکته ۷۲۴- ۱ توابع $y = |x-\alpha| - |x-\beta|$ در بازه $[\alpha, \beta]$ اکیداً یکنوا می باشند ($\alpha < \beta$).

۷۲۷- ۲ نمودار تابع $f(x) = |x+1| + |x-2|$ به صورت مقابل است.



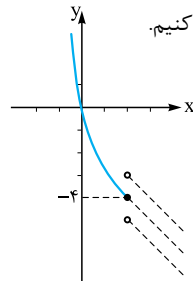
تابع در بازه $(-\infty, -1]$ اکیداً نزولی است و ضابطه آن به صورت $y = -2x+1$ می باشد.

بنابراین: $f(x) = g(x) \Rightarrow -2x+1 = -x^2+3x+7$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases} \text{ غقیق } (x \leq -1)$$

تنها یک نقطه مشترک وجود دارد.

۷۱۸- ۱ ضابطه اول نمودار $f(x)$ را رسم می کنیم.



با توجه به نمودار درمی یابیم که مقدار تابع $y = a-2x$ در $x=2$ باید کوچکتر یا مساوی -4 باشد تا تابع $f(x)$ اکیداً نزولی شود. بنابراین:

$$a-4 \leq -4 \Rightarrow a \leq 0$$

بنابراین بیشترین مقدار a برابر صفر است.

۷۱۹- ۱ تابع $f(x) = ax^2 - 6x + 3$ در بازه $(-\infty, -3]$ به شرطی صعودی است که اولاً $a < 0$ باشد و ثانیاً x رأس سهمی در بازه $(-\infty, -3]$ نباشد.

$$x_{\text{راس}} = \frac{6}{2a} = \frac{3}{a} \geq -3 \Rightarrow \frac{1}{a} \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{a} + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \leq -1 \end{cases} \text{ غقیق}$$

۷۲۰- ۱ دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2\sqrt{x-2}$ بازه $[2, +\infty)$ است.

در این بازه، سهمی $y = x^2 - 2x$ اکیداً صعودی و $y = 2\sqrt{x-2}$ نیز اکیداً صعودی می باشد در نتیجه مجموع این دو تابع یعنی $f(x)$ اکیداً صعودی است.

۷۲۱- ۳ تابع f اکیداً صعودی است. بنابراین:

$$f(3-2a) < f(6-a^2) \Rightarrow 3-2a < 6-a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-3) < 0 \Rightarrow -1 < a < 3$$

۷۲۲- ۴ تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

$$f(3-a) \geq f(3a-1) \Rightarrow 3-a \leq 3a-1 \Rightarrow a \geq 1$$

۷۲۳- ۴ تابع $f(x) = 8x^3 + 4x - 10$ اکیداً صعودی است.

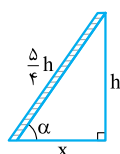
بنابراین: $f \circ f(x) < f(2x) \Rightarrow f(f(x)) < f(2x)$

$$\Rightarrow f(x) < 2x \Rightarrow 8x^3 + 4x - 10 < 2x$$

$$\Rightarrow 8x^3 + 2x - 10 < 0$$

جمع ضرایب عبارت فوق برابر صفر بوده و دارای ریشه $x=1$ است. چون تابع اکیداً صعودی است $x=1$ تنها ریشه آن بوده و در نتیجه جواب نامعادله به صورت $x < 1$ می باشد.





۷۳۵-۳ ارتفاع دیوار را h در نظر می‌گیریم.

بر اساس رابطه فیثاغورس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{5}{4}h\right)^2 - h^2 = \left(\frac{5}{4}h - h\right)\left(\frac{5}{4}h + h\right) = \left(\frac{1}{4}h\right)\left(\frac{9}{4}h\right) \\ &= \frac{9}{16}h^2 \Rightarrow x = \frac{3}{4}h \\ \tan \alpha &= \frac{h}{x} = \frac{h}{\frac{3}{4}h} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

بنابراین:

۷۳۶-۱ اگر $CH = x$ باشد، در مثلث قائم‌الزاویه ACH خواهیم داشت:

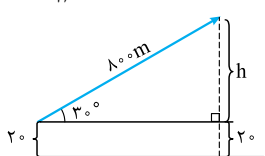
$$\frac{CH}{AC} = \cos \hat{C} \Rightarrow \frac{x}{AC} = \frac{4}{5} \Rightarrow AC = \frac{5}{4}x$$

با توجه به رابطه فیثاغورس:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AH^2 + CH^2 \Rightarrow \frac{25}{16}x^2 = 16^2 + x^2 \\ \Rightarrow \frac{9}{16}x^2 &= 16^2 \Rightarrow x^2 = 36 \times 16 \Rightarrow x = 6 \times 4 = 24 \end{aligned}$$

۷۳۷-۳ با توجه به شکل

$$\sin 3^\circ = \frac{h}{800} \Rightarrow h = 800 \sin 3^\circ$$

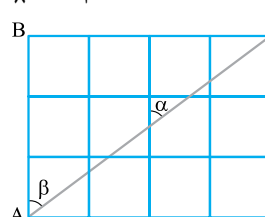


$$\frac{h}{800} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 400 \Rightarrow h + 20 = 420$$

بنابراین:

۷۳۸-۴ طبق قضیهٔ موازی

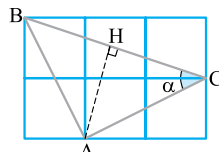
موربها زاویه α با زاویه β برابر است. بنابراین در مثلث ABC مقدار $\sin \beta$ را محاسبه می‌کنیم.



$$\left. \begin{aligned} AB &= 3 \\ BC &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AC = 5$$

اعداد فیثاغورس:

$$\sin \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$$



۷۳۹-۱ روش اول: در مثلث

$AB = AC$ بدیهی است

بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و ارتفاع AH ، میانه نیز می‌باشد.

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} AC^2 &= 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow AC = \sqrt{5} \\ BC^2 &= 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow BC = \sqrt{10} \end{aligned}$$

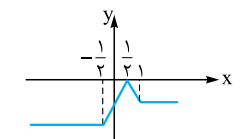
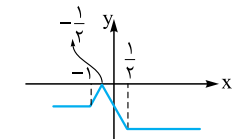
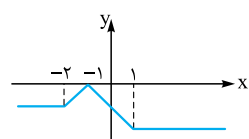
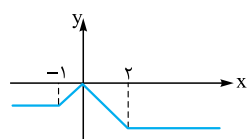
خواهیم داشت:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = (\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

بنابراین:

$$\sin \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

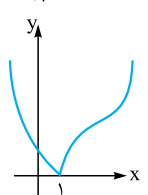
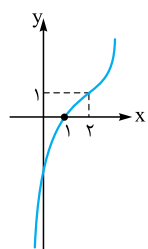


با توجه به نمودار تابع $y = f(1-2x)$ در بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ اکیداً نزولی است.

بنابراین حداکثر $b-a$ برابر است با $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

۷۳۲-۲ تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

به صورت $y = (x-2)^3 + 1$ بوده و نمودار آن مطابق شکل مقابل است.



در نتیجه نمودار $y = |(x-2)^3 + 1|$ به صورت مقابل خواهد بود که در بازه $(-\infty, 1]$ اکیداً نزولی است.

بنابراین حداکثر مقدار k برابر ۱ است.

۷۳۳-۳ با توجه به نمودار ضابطهٔ تابع $y = 2x + f(x)$ به صورت

مقابل است:

$$y = 2x + f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{3}{2} & x < -1 \\ x & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}x - \frac{3}{2} & x < -1 \\ -x & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = af(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}ax - \frac{3}{2}a & x < -1 \\ -ax & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x - af(x) = \begin{cases} (1 + \frac{5}{2}a)x + \frac{3}{2}a & x < -1 \\ (1+a)x & x \geq -1 \end{cases}$$

برای این‌که تابع فوق اکیداً یکتا باشد باید ضرایب x در هر دو ضابطه هم‌علامت و مخالف صفر باشند.

بنابراین:

$$(1 + \frac{5}{2}a)(1+a) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > -\frac{2}{5} \end{cases}$$

۳ قابل قبول است.

۷۳۴-۴ ابتدا براساس رابطه فیثاغورس x را به دست می‌آوریم.

$$(2x-1)^2 = (x+5)^2 + 5^2 \Rightarrow 3x^2 - 14x - 49 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{196}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \checkmark \\ x = -\frac{7}{3} \text{ غلط} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{x+5}{2x-1} = \frac{12}{13}$$

خواهیم داشت:



$$\text{از طرفی: } BD = 1 \Rightarrow AD - AB = 1 \Rightarrow \sqrt{3}AC - AC = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} - 1)AC = 1 \Rightarrow AC = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

نسبت مساحت دو مثلث را می نویسیم. **۷۴۵-۲**

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times \overline{BP} \times \sin 45^\circ}{\frac{1}{2} AC \times PC \times \sin 30^\circ} = \frac{2AB \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{AC \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \frac{AB}{AC}$$

$$\text{از طرفی: } \frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times AP \times \sin \alpha}{\frac{1}{2} AC \times AP \times \sin \beta} = 2\sqrt{2} \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2\sqrt{2}$$

ارتفاع AH را رسم می کنیم. خواهیم داشت: **۷۴۶-۲**

$$\begin{aligned} \cos \hat{C} &= \frac{CH}{b} \Rightarrow b \cos \hat{C} = CH \\ \cos \hat{B} &= \frac{BH}{c} \Rightarrow c \cos \hat{B} = BH \end{aligned}$$

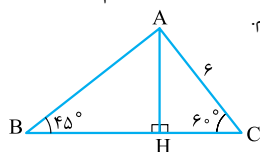
بنابراین:

$$b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} = 4 \Rightarrow CH + BH = 4 \Rightarrow BC = 4$$

در نتیجه:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times 4 = 16 \Rightarrow AH = 8$$

ارتفاع AH را رسم می کنیم. **۷۴۷-۱**



$$\begin{aligned} \Delta AHC: \begin{cases} \frac{AH}{AC} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{AH}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = 3\sqrt{3} \\ \frac{CH}{AC} = \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{CH}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow CH = 3 \end{cases} \\ \Delta AHB: \frac{AH}{BH} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow BH = AH = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = 3 + 3\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{3}(3 + 3\sqrt{3})}{2} = \frac{9\sqrt{3} + 27}{2}$$

در حالت کلی در مثلث ABC می دانیم: **۷۴۸-۴**

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (x)(2x - 6) \sin 70^\circ = 36$$

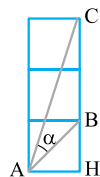
$$\Rightarrow x(x - 3) \left(\frac{9}{10}\right) = 36 \Rightarrow x^2 - 3x = 40$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \text{ غلط} \\ x = 8 \checkmark \end{cases}$$

مساحت مثلث ABC برابر است **۷۴۹-۴**

با:

$$\frac{AH \times BC}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$



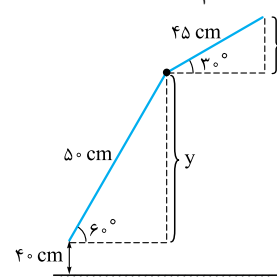
روش دوم: $AB = AC = \sqrt{5}$ و $BC = \sqrt{10}$ می باشد. بدیهی است:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

بنابراین هر یک از زوایای B و C برابر 45° می باشند.

$$\sin \alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۴۰-۳ با توجه به شکل بدیهی است فاصله نوک گیره از سطح زمین برابر $x + y + 40$ سانتی متر است.



$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{45} &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 22.5 \\ \frac{y}{45} &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 22.5\sqrt{3} \sim 42/5 \end{aligned} \right\} \text{خواهیم داشت:}$$

$$\Rightarrow x + y + 40 = 105$$

۷۴۱-۱ با توجه به شکل مشخص است $\hat{A}_1 + \hat{D} = \hat{C}$
 $\Rightarrow \hat{A}_1 + 30^\circ = 60^\circ$
 $\Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ$

بنابراین مثلث ACD متساوی الساقین بوده و $AC = CD$ است.

در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{43.5}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{87}{\sqrt{3}} = \frac{87 \times \sqrt{3}}{3} = 29\sqrt{3} \Rightarrow CD = 29\sqrt{3}$$

۷۴۲-۲ چون همه گزینه ها از ۱۸ کم تر است؛ بنابراین ۱۸ طول ضلع

روبرو به زاویه بزرگ تر است. طبق قضیه سینوس ها داریم:

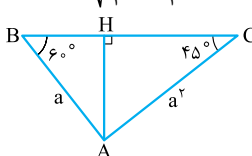
$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin \hat{C}} &= \frac{AC}{\sin \hat{B}} \\ \Rightarrow \frac{AB}{\sin 30^\circ} &= \frac{18}{\sin 70^\circ} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{\frac{1}{2}} = \frac{18}{\frac{9}{10}} \Rightarrow AB = 10$$

۷۴۳-۴ در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \Delta ABH: AH &= a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ \Delta ACH: AH &= a^2 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



۷۴۴-۲ مثلث ABC متساوی الساقین بوده و $AB = AC$ می باشد.

$$\Delta ACD: \frac{AD}{AC} = \tan 60^\circ \Rightarrow AD = \sqrt{3}AC$$





۷۵۴-۲ ابتدا با استفاده از قضیه کسینوس ها در مثلث ABC، BC^2 را به دست می آوریم.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A}$$

$$= 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52$$

قضیه کسینوس ها را در مثلث BDC می نویسیم.

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \times CD \cos \hat{D}$$

$$\Rightarrow 52 = BD^2 + 36 - 2BD \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow BD^2 + 6BD - 16 = 0 \Rightarrow (BD + 8)(BD - 2) = 0$$

$$\Rightarrow BD = 2$$

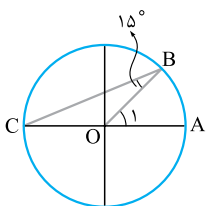
بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \times CD \times \sin \hat{D} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

۷۵۵-۱ طول کمان AB، $\frac{1}{3}$ شعاع دایره است بنابراین زاویه θ برابر $\frac{1}{3}$ رادیان است.

$$\theta = \frac{1}{3} \times \frac{180}{\pi} = \frac{60}{\pi} \text{ درجه است.}$$

۷۵۶-۴ در مثلث OBC اضلاع OB و OC برابر شعاع می باشند. بنابراین زاویه C برابر 15° و در نتیجه $\hat{O}_1 = \hat{B} + \hat{C} = 30^\circ$.



$$\Rightarrow \hat{O}_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$AB \text{ طول} = R \cdot \theta = 12 \times \frac{\pi}{6} = 2\pi$$

۷۵۷-۲ مساحت قطاع و مثلث را به دست می آوریم.

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{60}{360} \times \pi R^2 = \frac{1}{6} \times \pi \times 12^2 = 24\pi$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \sin 60^\circ = 36\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}} = \frac{24\pi}{3} - 36\sqrt{3}$$

۷۵۸-۲ مساحت و محیط قطاع را S و P می نامیم.

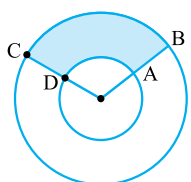
$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\theta}{2\pi} \times \pi R^2 = \frac{\theta R^2}{2} = \frac{9}{2} \theta \\ P &= 2R + R\theta = 6 + 2\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{9}{2} \theta = 6 + 2\theta \Rightarrow \theta = 4$$

۷۵۹-۳ مساحت قطاع بزرگ را S_1 و مساحت قطاع کوچک را S_2 می نامیم.

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\theta R^2}{2} = \frac{\pi \times 12^2}{2} = 72\pi \\ S_2 &= \frac{\theta r^2}{2} = \frac{\pi \times 4^2}{2} = 8\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = S_1 - S_2 = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$$

۷۶۰-۴ محیط قسمت رنگی برابر است با $AB + CD + \widehat{AD} + \widehat{BC}$ که $AB = CD = 8 - 3 = 5$.

$$\begin{aligned} \widehat{AD} &= r \cdot \theta = 3 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{2} \\ \widehat{BC} &= R \cdot \theta = 8 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{3} \\ \Rightarrow \text{محیط} &= 5 + 5 + \frac{5\pi}{2} + \frac{20\pi}{3} = 10 + \frac{55\pi}{6} \end{aligned}$$



از طرفی می دانیم: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \alpha$ طول AB و AC را به دست می آوریم.

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

$$AC^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

در نتیجه:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۷۵۰-۱ مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر ضرب در سینوس زاویه بین دو قطر.

در این مسئله زاویه بین دو قطر 15° یا همان 30° است.

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 18 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times 18 \times \frac{1}{2} = 45$$

۷۵۱-۲

نکته مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ می باشد.

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 6\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

با توجه به شکل مثلث ABC متساوی الساقین است. اندازه هر زاویه داخل شش ضلعی منتظم 120° است. بنابراین در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = \hat{C} = 30^\circ$

ارتفاع BH میانه نیز می باشد.

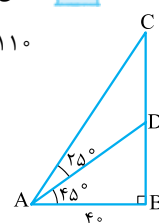
$$AH = AB \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$$

نکته در شش ضلعی منتظم به ضلع a، اندازه قطر کوچک $\sqrt{3}a$ و اندازه قطر بزرگ $2a$ است.

۷۵۲-۳ مطابق شکل طول CD برابر ارتفاع درخت است.

$$\Delta ABC : BC = AB \times \tan 70^\circ = 40 \times 2 / 75 = 110$$

$$\Delta ABD : BD = AB \times \tan 45^\circ = 40$$



$$CD = BC - BD = 110 - 40 = 70$$

بنابراین:

۷۵۳-۲ مستطیل AMNB را

رسم می کنیم. بدیهی است:

$$MN = AB = 6$$

در مثلث MNC داریم:

$$\frac{MN}{MC} = \sin 45^\circ \Rightarrow \frac{6}{MC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MC = 6\sqrt{2} \Rightarrow MD = 2\sqrt{2}$$

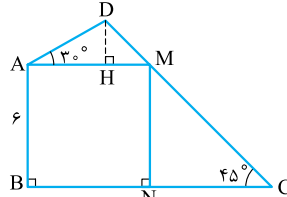
ارتفاع DH را رسم می کنیم. بدیهی است $\hat{M} = \hat{C} = 45^\circ$.

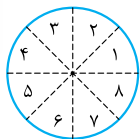
در مثلث DMH داریم:

$$\frac{DH}{MD} = \sin 45^\circ \Rightarrow \frac{DH}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DH = 2$$

در نتیجه در مثلث ADH:

$$\frac{DH}{AD} = \sin 30^\circ \Rightarrow \frac{2}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 4$$





۷۶۹-۲ در نواحی ۱، ۶، ۷ و ۸ رابطه $\sin x < \cos x$ و در نواحی ۲، ۴، ۵ و ۸ رابطه $\tan x > \cot x$ برقرار است.

بنابراین در دو ناحیه ۶ و ۸، هر دو رابطه برقرار است.

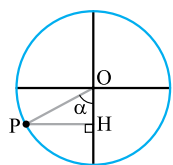
زوایای $\frac{9\pi}{8}$ ، $\frac{13\pi}{9}$ ، $\frac{17\pi}{10}$ و $\frac{23\pi}{11}$ به ترتیب در نواحی ۵، ۶، ۷ و ۸ قرار دارند.

۷۷۰-۱ اگر نقطه $P(x, y)$ بر دایره مثلثاتی انتهای کمان مربوط به زاویه θ باشد، آن گاه:
 $\sin \theta = y$ $\cos \theta = x$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ $\cot \theta = \frac{x}{y}$

بنابراین:

$$P\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cot \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{6}$$

۷۷۱-۱ با توجه به شکل و $P(-\frac{4}{5}, y)$ خواهیم داشت:



$$OP^2 = PH^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow OH = \frac{3}{5}$$

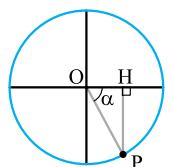
در نتیجه:

$$\tan \alpha = \frac{PH}{OH} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

۷۷۲-۲ با توجه به مثلث OPH در دایره مثلثاتی و $P(3a, a-1)$ خواهیم داشت:

$$OP^2 = PH^2 + OH^2 \Rightarrow 1 = (a-1)^2 + (3a)^2$$

$$\Rightarrow 10a^2 - 2a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ غلط} \\ a = \frac{1}{5} \checkmark \end{cases}$$

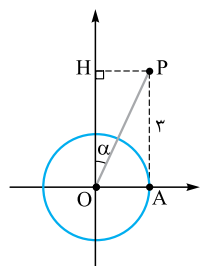


$$\Rightarrow P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} PH = \frac{4}{5} \\ OH = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5}$$

۷۷۳-۳ با توجه به شکل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} PH = OA = 1 \\ OH = AP = 3 \end{cases}$$



$$OP^2 = OH^2 + PH^2 \Rightarrow OP^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$\Rightarrow OP = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

بنابراین:

در نتیجه:

۷۶۱-۴ زاویه 215° به صورت $180^\circ - 35^\circ$ بوده و انتهای کمان در ناحیه دوم مثلثاتی است.

انتهای کمان زوایای گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ در ناحیه دوم و زاویه ۴ در ناحیه اول مثلثاتی قرار دارند.

۷۶۲-۲ زاویه 39° به صورت $13^\circ - 36^\circ$ بوده و انتهای کمان در ناحیه سوم مثلثاتی است. انتهای کمان زوایای $\frac{17\pi}{8}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{8\pi}{5}$ به ترتیب در ناحیه‌های دوم، سوم، اول و چهارم مثلثاتی قرار دارد.

۷۶۳-۱ انتهای کمان زاویه 53° بر انتهای کمان زاویه $19^\circ = 36^\circ + 2 \times 53^\circ - 53^\circ$ منطبق است. حال 19° را به رادیان تبدیل می‌کنیم.

بنابراین اگر $\alpha = \frac{\pi}{18}$ باشد، انتهای کمان α و θ دو سر یک قطر خواهند بود.

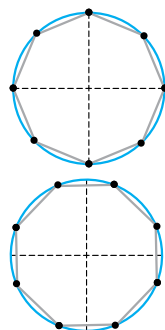
۷۶۴-۴ هر رادیان تقریباً 57° است. انتهای کمان زوایای ۱، ۲ و ۳ رادیان مطابق شکل است. واضح است $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$.

بنابراین:

۷۶۵-۴ با توجه به این که هر رادیان تقریباً 57° است، انتهای کمان زوایای ۳، ۴، ۵ و ۶ رادیان مطابق شکل است.

واضح است انتهای کمان ۶ رادیان در ناحیه چهارم بوده $\cos 6$ مثبت است.

۷۶۶-۳ انتهای کمان زوایای $\frac{k\pi}{4}$ مطابق شکل رؤس یک ۸ ضلعی منتظم می‌باشند.



انتهای کمان زوایای $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$ همانند $\frac{k\pi}{4}$ بوده و فقط $\frac{\pi}{3}$ بر روی دایره مثلثاتی چرخش دارند.

۷۶۷-۳ مطابق جدول عمل می‌کنیم.

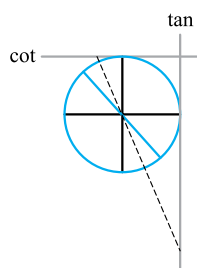
k	۰	۱	۲	...	۱۰	۱۱
θ	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8}$	...	$\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{8}$

با توجه به جدول ۱۲ نقطه متمایز بر روی دایره به وجود می‌آید. بدیهی است اگر $k = 12$ باشد، $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{8}$ بوده و بر کمان $\frac{\pi}{8}$ منطبق می‌شود.

■ می‌دانستیم $\frac{k\pi}{6}$ ها ۱۲ نقطه متمایز بر دایره به وجود می‌آورند بنابراین $\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{8}$ ها نیز ۱۲ نقطه ایجاد می‌کنند.

۷۶۸-۱ با توجه به $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ مشخص می‌شود که $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ غیرهم‌علامت بوده و α در یکی از نواحی ۳، ۴، ۷ و ۸ است.

تائزانت α بیشتر از کتانزانت α است اما در نواحی ۳ و ۷ داریم: $\tan \alpha < \cot \alpha$





بنابراین: $\triangle OBP : \tan \alpha = \frac{BP}{OP} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

۷۷۸-۴ واضح است در مثلث قائم الزاویه $\triangle OAB$ زاویه $\hat{O}$ برابر 30° است.
 $\tan \hat{O} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{AB}{1}$
 $\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow OA^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

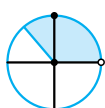
$\Rightarrow OA = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

۷۷۹-۲ در دایره مثلثاتی $OB = OP = OA = 1$ است.

$\triangle OPN : \frac{OP}{ON} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \frac{1}{ON} = \frac{1}{2} \Rightarrow ON = 2$
 $\triangle OPM : \frac{OP}{OM} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\Rightarrow \frac{1}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$BN = ON - OB = 2 - 1 = 1$

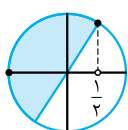
$AM = OM - OA = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \Rightarrow AM + BN = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



۷۸۰-۲ با توجه به دایره مثلثاتی اگر $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ باشد، آن گاه $0 < \sin \alpha \leq 1$ است.

بنابراین: $0 < \frac{2-m}{3} \leq 1 \Rightarrow 0 < 2-m \leq 3$

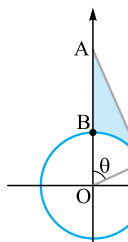
$\Rightarrow -2 < -m \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m < 2$



۷۸۲-۲ اگر $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ باشد، آن گاه $\frac{\pi}{3} < 2\theta < \frac{4\pi}{3}$ بوده و با توجه به دایره مثلثاتی $-\frac{1}{2} \leq \cos 2\theta < 1$ است.

$-1 \leq \frac{3m+1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 3m+1 < 1$

$\Rightarrow -3 \leq 3m < 0 \Rightarrow -1 \leq m < 0$



۷۸۳-۱ مساحت قسمت رنگی را S می‌نامیم. $S = S_{AOP} - S_{OBP}$ مثلث $\triangle AOP$

خواهیم داشت: $\triangle AOP : \tan \theta = \frac{AP}{OP} = \frac{AP}{1} = AP$

$S_{OAP} = \frac{AP \times OP}{2} = \frac{1}{2} \tan \theta$
 $S_{OBP} = \frac{\theta}{2} R^2 = \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \tan \theta - \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} (\tan \theta - \theta)$

۷۷۴-۲ با توجه به مثلث $\triangle OAH$ در دایره مثلثاتی خواهیم داشت:

$\tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AH}{OH} = \frac{1}{2} \Rightarrow OH = 2AH$

از طرفی $OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 1 = 4AH^2 + AH^2$

$\Rightarrow AH^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{5}}{5}$

اگر مختصات A را $A(x, y)$ در نظر بگیریم، مختصات P به صورت $P(-x, -y)$ است.

$x = OH = 2 \frac{\sqrt{5}}{5}$
 $y = -AH = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
 $\Rightarrow P(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$
 $(-\frac{2\sqrt{5}}{5})(\frac{\sqrt{5}}{5}) = -\frac{2}{5}$

بنابراین:

۷۷۵-۴ اگر مختصات B را $B(x, y)$

در نظر بگیریم مختصات A به صورت $A(-y, -x)$ خواهد بود.

می‌دانیم:

$x = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

بنابراین:

$A(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
 $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$\Rightarrow AB = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

۷۷۶-۴ اگر مختصات B به صورت $B(x, y)$ باشد، خواهیم داشت:

$AB = 2x \quad OH = y$

$S_{OAB} = \frac{OH \times AB}{2} = \frac{2xy}{2} = xy = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{4x}$

از طرفی $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{16x^2} = 1 \Rightarrow x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$
 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \sqrt{3} \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 1 \end{cases}$

۷۷۷-۱ در مثلث قائم الزاویه $\triangle OAB$.

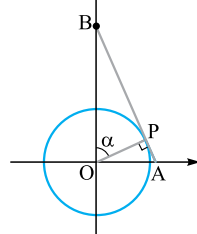
OP ارتفاع وارد بر وتر است.

$OP^2 = AP \times BP$

$= AP \times 2AP = 2AP^2$

$\Rightarrow OP = \sqrt{2}AP \Rightarrow OP = \frac{\sqrt{3}}{2}BP$

$\Rightarrow \frac{BP}{OP} = \sqrt{2}$





۷۹۵-۴ با توجه به شکل واضح است: $\theta = 24^\circ + 9^\circ = 33^\circ$

بنابراین: $\tan \theta = \tan 33^\circ = \tan(36^\circ - 3^\circ) = -\tan 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

۷۹۶-۴ عبارت $\cos 57^\circ$ را ساده می‌کنیم.

$$\cos 57^\circ = \cos(36^\circ + 21^\circ) = \cos 21^\circ = \cos(18^\circ + 3^\circ)$$

$$= -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۷۹۷-۴ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم.

$$\cos \frac{16\pi}{3} \sin \left(-\frac{19\pi}{6}\right) + \tan \frac{17\pi}{4} \sin \frac{11\pi}{6}$$

$$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\left(-\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= (-\cos \frac{\pi}{3})(\sin \frac{\pi}{6}) + \tan \frac{\pi}{4}(-\sin \frac{\pi}{6})$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (1)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

۷۹۸-۱ اگر k زوج باشد، $\cos(k\pi - \alpha) = \cos \alpha$ و

اگر k فرد باشد، $\cos(k\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ ؛ بنابراین $\cos(k\pi - \alpha) = (-1)^k \cos \alpha$.

۷۹۹-۱ می‌دانیم کسینوس دو زاویه مکمل قرینه یکدیگرند، بنابراین مجموع کسینوس آن‌ها برابر صفر است.

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = 0$$

۸۰۰-۴ عبارت A را ساده می‌کنیم.

$$A = \sin \frac{10\pi}{3} \cos \frac{11\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{4}$$

$$= \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) \left(\cos \frac{\pi}{6}\right) - \tan \frac{\pi}{4} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -\frac{3}{4} - 1 = -\frac{7}{4}$$

۸۰۱-۲ کسر را ساده کرده و صورت و مخرج کسر را بر $\cos 2^\circ$

تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\cos 2^\circ}{\sin 7^\circ + \cos 7^\circ} = \frac{\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ + \sin 2^\circ} = \frac{\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan 2^\circ} = \frac{1}{1 + 0.36} = \frac{1}{1.36} = \frac{100}{136} = \frac{25}{34}$$

۸۰۲-۲ کسر را ساده کرده و صورت و مخرج کسر را بر $\cos 25^\circ$

تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{2 \sin 20^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 29^\circ + \sin 11^\circ} = \frac{-2 \sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}$$

$$= \frac{-2 \tan 25^\circ + 1}{\tan 25^\circ + 1} = \frac{-0.47 + 1}{0.47 + 1} = \frac{0.53}{1.47} = \frac{53}{147} = \frac{4}{13}$$

۸۰۳-۲ کسر را ساده کرده و صورت و مخرج کسر را بر $\cos \alpha$

تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\sin(27^\circ - \alpha) + k \cos(\alpha + 18^\circ)}{2 \cos(\alpha + 9^\circ) - \cos(\alpha - 18^\circ)} = \frac{-\cos \alpha - k \cos \alpha}{-2 \sin \alpha + \cos \alpha} = 3$$

$$\div \cos \alpha \rightarrow \frac{-1 - k}{-2 \tan \alpha + 1} = \frac{-k - 1}{-4 + 1} = \frac{-k - 1}{-3} = 3$$

$$\Rightarrow k + 1 = 9 \Rightarrow k = 8$$

۷۸۴-۳ ساده می‌کنیم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\sin x + \cos x$$

۷۸۵-۴ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم.

$$3 \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = 4 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 3 \sin x = -4 \cos x \Rightarrow \cot x = -\frac{3}{4}$$

۷۸۶-۱ تساوی داده شده را ساده می‌کنیم.

$$\cot(\theta + x) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cot(\theta + x)(-\cot x) = 1$$

$$\Rightarrow \cot(\theta + x) = -\frac{1}{\cot x} \Rightarrow \cot(\theta + x) = -\tan x$$

اگر $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد، برابری بالا برقرار است.

۷۸۷-۲ می‌دانیم $\alpha + \beta = \pi$ است، بنابراین $\alpha = \pi - \beta$.

$$\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = -\sin \alpha = -\sin(\pi - \beta) = -\sin \beta$$

۷۸۸-۲ می‌دانیم $\hat{A} + \hat{B} = \frac{\pi}{4}$ است، بنابراین:

$$\tan A = \cot B, \cot A = \tan B$$

$$\frac{\cot A - \cot B}{\tan A - \tan B} = \frac{\tan B - \cot B}{\cot B - \tan B} = -1$$

و در نتیجه:

۷۸۹-۳

۷۹۰-۱ می‌دانیم $\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{4}$ است. بنابراین $\cos C = \sin B$ و

$$\sin C = \cos B$$

در نتیجه:

$$\frac{\sin B \cos C}{\sin^2 C} = \frac{\sin B \sin B}{\cos^2 B} = \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = \tan^2 B$$

۷۹۱-۴ اگر $x - \frac{\pi}{4} = \alpha$ باشد، آن‌گاه $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha$ است.

$$\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos \alpha}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha = 4$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

۷۹۲-۴ اگر $x - \frac{\pi}{12} = \alpha$ باشد، آن‌گاه $x + \frac{\pi}{12} = \alpha + \frac{\pi}{6}$ است.

$$\sin\left(x + \frac{\Delta\pi}{12}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{6}$$

بنابراین:

$$\cos\left(x + \frac{11\pi}{12}\right) = \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{1}{6}$$

۷۹۳-۱ می‌دانیم $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ است، بنابراین $3\alpha + 3\beta = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

$$3\alpha + 3\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (2\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha + \beta)$$

$$\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + 2\beta)} = 1$$

در نتیجه:

۷۹۴-۱ می‌دانیم $\alpha = \frac{\pi}{16}$ است، بنابراین $8\alpha = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

$$7\alpha + 8\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 7\alpha = \cos 8\alpha$$

$$7\alpha + 6\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan 7\alpha = \cot 6\alpha$$

$$\frac{\sin 7\alpha \cot 6\alpha}{\tan 7\alpha \cot 5\alpha} = 1$$

در نتیجه:





$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{می دانیم: } \boxed{۴} - ۸۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{5}{12} \times \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{13}$$

خواهیم داشت:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{11\pi}{3} + \alpha\right) = (-\cos \alpha)(\sin \alpha)$$

$$= \left(-\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{60}{169}$$

■ برای محاسبه $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ می توانستیم از فیثاغورسی بودن اعداد ۵، ۱۲ و ۱۳ استفاده کنیم.

$$\boxed{۲} - ۸۱۱ \quad \text{تساوی داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$\frac{2 \tan \alpha + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2 \cot(\pi - \alpha)} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{2 \tan \alpha + \cot \alpha}{\tan \alpha + 2 \cot \alpha} = \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow 4 \tan \alpha + 2 \cot \alpha = 2 \tan \alpha + 6 \cot \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 4 \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cot \alpha} = 4 \cot \alpha \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \text{روش اول: می دانیم } \boxed{۱} - ۸۱۲$$

است.

$$\frac{1}{1 + \tan 60^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 60^\circ} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}}{2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}} = 1$$

روش دوم:

$$\frac{1}{1 + \tan \alpha} + \frac{1}{1 + \cot \alpha} = \frac{1}{1 + \tan \alpha} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan \alpha}}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = 1$$

$$\boxed{۳} - ۸۱۳ \quad \text{می دانیم } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \text{ است، بنابراین:}$$

$$\left(\frac{1}{3k-1}\right)(4k+2) = 1 \Rightarrow 4k+2 = 3k-1 \Rightarrow k = -3$$

$$\boxed{۱} - ۸۱۴ \quad \text{عبارت داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$\cot^2 x \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) \sqrt{1 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}\right) \times \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} (-\sin^2 x) \times \frac{1}{|\cos x|} = \frac{-\cos x}{|\cos x|} = \frac{-\cos x}{-\cos x} = 1$$

$$(-1 < \cos x < 0 \text{ است، بنابراین } \pi < \theta < \frac{3\pi}{2})$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{می دانیم: } \boxed{۱} - ۸۰۴$$

بنابراین:

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{1^2} = 1 \Rightarrow \tan^2 \theta = 0$$

$$\xrightarrow{\tan \theta < 0} \tan \theta = -3 \Rightarrow \cot \theta = -\frac{1}{3}$$

در نتیجه:

$$\cot \theta - \tan \theta = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{۳} - ۸۰۵ \quad \text{تساوی داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{2}{\cos \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{3}{\sin \alpha} = -\frac{2}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$6 \tan \alpha - 12 \cot \alpha = -9 + 8 = -1$$

بنابراین:

$$\boxed{۱} - ۸۰۶ \quad \text{کسر داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = 2 \Rightarrow 1 + \sin \theta = 2 - 2 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{3}$$

خواهیم داشت:

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} = 9 \Rightarrow \cot^2 \theta = 8$$

$$\xrightarrow{\cot \theta < 0} \cot \theta = -2\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$\cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{۳} - ۸۰۷ \quad \text{تساوی داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$3 \sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow 3 \sin x - \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{4}$$

خواهیم داشت:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \xrightarrow{\cos x < 0} \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\boxed{۲} - ۸۰۸ \quad \text{تساوی داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3 \Rightarrow \tan x = 3 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{3}$$

می دانیم:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{10}$$

$$\xrightarrow{\sin x > 0} \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\boxed{۳} - ۸۰۹ \quad \text{تساوی داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$2 \cos(\pi - x) - 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow -2 \cos x - 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{4}$$

می دانیم:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

بنابراین:

$$2 \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2 \sin x + \sin x$$

$$= -\sin x = \mp \frac{2\sqrt{6}}{5}$$



$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{۸۲۱-۲ می دانیم:}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + 2^2 = 5 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

خواهیم داشت:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$$

۸۲۲-۴ ابتدا تساوی داده شده را ساده می کنیم.

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta} = 2 \Rightarrow \sin \theta - \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 3 \cos \theta \Rightarrow \tan \theta = 3$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{10} \quad \text{بنابراین:}$$

در نتیجه:

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 - 2 \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{۸۲۳-۲ می دانیم } \sin x \cos x = \frac{1}{4} \text{ خواهد داشت:}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$\text{۸۲۴-۲ دو طرف تساوی را به توان ۲ می رسانیم.}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

خواهیم داشت:

$$\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - 2 \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{1 - 2\left(\frac{4}{9}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{32}{81}} = \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$$

$$\text{۸۲۵-۱ ابتدا } \sin \theta \cos \theta \text{ را محاسبه می کنیم.}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{15}{32}$$

خواهیم داشت:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{15}{32}\right) = \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{15}{32}\right) = \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\text{۸۲۶-۳ می دانیم:}$$

بنابراین:

$$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2 - 2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 = 14$$

$$\text{۸۲۷-۳ ابتدا } \sin \alpha \cos \alpha \text{ را محاسبه می کنیم.}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{25}{8} \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{25}{8}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{8}{25}$$

$$\text{اگر } |\sin \alpha - \cos \alpha| = A \text{ باشد، خواهیم داشت:}$$

$$A^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow A = \frac{3}{5}$$

$$\text{۸۱۵-۴ می دانیم } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و چون } \frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi \text{ بنابراین } -1 < \sin x < 0 \text{ است.}$$

$$\frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \cos^2 x}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}} = \frac{1 - \cos^2 x}{|\sin x|}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{-\sin x} = -\sin^2 x$$

$$\text{۸۱۶-۳ تساوی داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$\frac{\sin \theta + 2 \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2 \Rightarrow \sin \theta + 2 \cos \theta = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 4 \cos \theta \Rightarrow \tan \theta = 4$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{4} + \theta\right) = -\tan \theta = -4 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\text{۸۱۷-۴ تساوی داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$7 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 5 \Rightarrow 7(1 - \cos^2 x) + 3 \cos^2 x = 5$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 x = 2 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

خواهیم داشت:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \tan^2 x = 1$$

$$\text{۸۱۸-۲ } \alpha - \frac{\pi}{3} \text{ را } A \text{ و } \beta + \frac{\pi}{4} \text{ را } B \text{ می نامیم.}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 1 \Rightarrow \sin^2 A = 1 - \sin^2 B$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \cos^2 B$$

$$\text{بدیهی است که اگر } A + B = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ باشد، رابطه فوق صحیح است.}$$

بنابراین:

$$A + B = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha - \frac{\pi}{3} + \beta + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = k\pi + \frac{7\pi}{12} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{اگر } k = 0 \text{ باشد، } \alpha + \beta = \frac{7\pi}{12} \text{ خواهد شد.}$$

$$\text{۸۱۹-۴ کسر داده شده را ساده می کنیم.}$$

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{3 + 1}{1 + 9} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\text{۸۲۰-۳ دو طرف تساوی را به توان ۲ می رسانیم.}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{1 - \sin x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \sin^2 x} = \frac{4}{(1 - \sin x)^2} \Rightarrow \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{4}{1 - \sin x}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin x = 4(1 + \sin x) \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

$$\text{با توجه به این که } 1 - \sin x \text{ نامنفی و } \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{1 - \sin x} \text{ است، نتیجه می گیریم } \cos x > 0 \text{ باشد.}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

بنابراین:

■ برای محاسبه $\tan x$ می توانستیم از اعداد فیثاغورسی ۳، ۴ و ۵ استفاده کنیم.



۸۲۸-۴ عبارت سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم.

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x} = \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= -\tan^2 x (1 + \tan^2 x) = -\tan^2 x - \tan^4 x$$

$$= a \tan^2 x + b \tan^4 x \Rightarrow a = b = -1 \Rightarrow a + b = -2$$

۸۲۹-۴ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\cos(\pi + \theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow 1 + \sin 2\theta = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = -\frac{8}{9}$$

۸۳۰-۳ رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ برقرار است. بنابراین:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{10}{9} = -\frac{1}{9}$$

۸۳۱-۳ ابتدا $\sin \alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\sin \alpha^2 = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \xrightarrow{\sin \alpha < 0} \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

بنابراین:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{10}}{9}$$

۸۳۲-۱ روش اول: مقدار $\cos^2 \alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{4}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

روش دوم: اتحادهای زیر برقرارند:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

در نتیجه:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

۸۳۳-۴ دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2\theta = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = -\frac{1}{10}$$

۸۳۴-۳ اگر $A = \sin \theta + \cos \theta$ باشد، خواهیم داشت:

$$A^2 = 1 + \sin 2\theta = 1 + 0/69 = 1/69 \xrightarrow{A > 0} A = 1/3$$

۸۳۵-۳ ابتدا عبارت P را ساده می‌کنیم.

$$P = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$= (1 - \sin \alpha) - (1 + \cos \alpha) = -\sin \alpha - \cos \alpha$$

بنابراین:

$$P^2 - 1 = (-\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1 = 1 + \sin 2\alpha - 1 = \sin 2\alpha$$

۸۳۶-۱ ابتدا مقدار $\tan \alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{3 - \tan \alpha}{4 + 2 \tan \alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow 9 - 3 \tan \alpha = 4 + 2 \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = 1$$

روش اول: مقدار $\cos^2 \alpha$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 2 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) - (2 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$= 2 - 3 \cos^2 \alpha = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

روش دوم:

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = \frac{1}{2}$$

۸۳۷-۲ ابتدا $\cos 2\theta$ را به دست می‌آوریم.

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{14}{16}$$

$$\cos 4\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1 = 2\left(\frac{14}{16}\right)^2 - 1 = -\frac{31}{32}$$

بنابراین:

۸۳۸-۲ از نامساوی $\sin^2 \theta < \sin \theta$ نتیجه می‌شود $\sin \theta > 0$ است.

$$\cos \theta < 0 \xrightarrow{\sin \theta > 0} 2 \sin \theta \cos \theta < 0 \Rightarrow \sin 2\theta < 0$$

$\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$ است بنابراین انتهای کمان θ در ناحیه دوم است.

۸۳۹-۲ ابتدا مختصات P را به دست می‌آوریم.

$$x^2 + \left(x + \frac{1}{\delta}\right)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 + \frac{2}{\delta}x - \frac{24}{25} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{x}{\delta} - \frac{12}{25} = 0 \Rightarrow x = \frac{-\frac{1}{\delta} \pm \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{48}{25}}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\frac{1}{\delta} \pm \frac{\sqrt{25 + 48\delta^2}}{5\delta}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \text{ غلط} \\ x = -\frac{4}{5} \checkmark \end{cases} \quad (P \text{ در ناحیه سوم است})$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \xrightarrow{\theta \text{ زاویه حاده است}} \sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

بنابراین:

۸۴۰-۲ $\sin \alpha = 0/8$ و انتهای کمان α در ناحیه دوم است.

بنابراین $\cos \alpha = -0/6$ می‌باشد.

$$\frac{1 - \cos(\pi + 2\alpha)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{2 \times 0/36}{1 + 2(-0/6)(0/8)} = \frac{0/72}{0/04} = 18$$

۸۴۱-۱ اگر $\alpha - \frac{\pi}{6} = \beta$ باشد، $2\alpha - \frac{\pi}{3} = 2\beta$ است.

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta = 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

۸۴۲-۳ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$4 \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:





۸۴۹-۳ تساوی داده شده را ساده می کنیم.

$$1 + \cos \theta = \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه حاده است.}} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

روش اول:

بنابراین:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

انتهای کمان 2θ در ناحیه سوم است.

$$1 + \tan^2 2\theta = \frac{1}{\cos^2 2\theta} = 4 \Rightarrow \tan^2 2\theta = 3$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \sqrt{3} \quad (\text{ناحیه سوم})$$

روش دوم: زاویه حاده و $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$ است. در نتیجه $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ است.

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \tan 2\theta = \sqrt{3}$$

$$\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$$

۸۵۰-۲ می دانیم:

بنابراین:

$$\tan x - \cot x = -\frac{2}{\tan 2x} = -\frac{2}{\frac{1}{3}} = -6$$

$$\sin \frac{\Delta\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{می دانیم } \frac{\pi}{12} + \frac{\Delta\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \text{ است. بنابراین:}$$

خواهیم داشت:

$$\sin^6 \frac{\pi}{12} + \sin^6 \frac{\Delta\pi}{12} = \sin^6 \frac{\pi}{12} + \cos^6 \frac{\pi}{12}$$

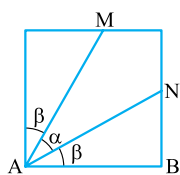
$$1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

۸۵۲-۲ می دانیم:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

بنابراین:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$



۸۵۳-۳ با توجه به شکل واضح است

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$2\alpha = \pi - 4\beta$$

اگر ضلع مربع را X بنامیم، خواهیم داشت:

$$AN^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}x^2 \Rightarrow AN = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \beta = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}x} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos \beta = \frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = \frac{4}{5}$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{2\beta < \frac{\pi}{2}} \cos 2\beta = \sqrt{1 - \sin^2 2\beta} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

۸۴۳-۱ اگر $x - \frac{\pi}{\Delta} = \alpha$ باشد، آن گاه $x + \frac{\pi}{\Delta} = \alpha + \frac{2\pi}{\Delta}$ است.

$$2 \cos\left(x - \frac{\pi}{\Delta}\right) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{\Delta}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{\Delta}\right) = 1 \Rightarrow 2 \cos \alpha + \cos \alpha = 1$$

$$\Rightarrow 3 \cos \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

در نتیجه:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\Delta} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{\Delta}\right) = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$$

۸۴۴-۴ دو طرف تساوی را به توان ۲ می رسانیم.

$$(\sqrt{2} \sin x - 2 \cos x)^2 = 3$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 4\sqrt{2} \sin x \cos x = 3$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 4\sqrt{2} \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 4\sqrt{2} \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 2\sqrt{2} \sin 2x \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۸۴۵-۲ می دانیم $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$ است.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

بنابراین:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = 6, b = 2$$

$$\Rightarrow a - b = 4$$

۸۴۶-۱ می دانیم $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ، بنابراین:

$$\sin^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

۸۴۷-۴ عبارت A را ساده می کنیم.

$$A = \sin^2 \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$= \sin \theta \cos \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta (-\cos 2\theta)$$

$$= -\frac{1}{4} \sin 4\theta = -\frac{1}{4} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

۸۴۸-۲ تساوی داده شده را ساده می کنیم.

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 3 \Rightarrow \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = 3 \Rightarrow \cot \frac{\theta}{2} = 3$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \frac{\theta}{2} = -3$$

بنابراین:



حال $\sin 2\alpha$ را به دست می آوریم.

$$\sin 2\alpha = \sin(\pi - 4\beta) = \sin 4\beta = 2 \sin 2\beta \cos 2\beta$$

$$= 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \sin 15^\circ \Rightarrow AC = \frac{BC}{\sin 15^\circ} = \frac{2}{\sin 15^\circ}$$

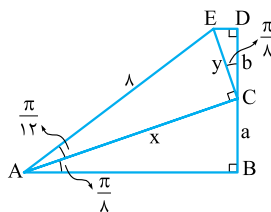
در مثلث قائم الزاویه ACD داریم:

$$\frac{AC}{AD} = \cos 15^\circ \Rightarrow AD = \frac{AC}{\cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$= \frac{2}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8$$

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \triangle ABC : a = x \sin \frac{\pi}{\lambda} \\ \triangle CDE : b = y \cos \frac{\pi}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow ab = xy \sin \frac{\pi}{\lambda} \cos \frac{\pi}{\lambda}$$



$$\Rightarrow ab = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{\lambda} xy$$

$$\Rightarrow ab = \frac{\sqrt{2}}{4} xy$$

خواهیم داشت:

$$\triangle ACE : \begin{cases} x = \lambda \cos \frac{\pi}{12} \\ y = \lambda \sin \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy = 64 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 32 \sin \frac{\pi}{6} = 16$$

بنابراین:

$$ab = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 16 = 4\sqrt{2}$$

دوره تناوب تابع $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ به صورت

$$y = 1 + 2 \cos 2\pi x \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$y = 2 - 3 \sin \frac{\pi}{3} x \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{6}$$

ابتدا $|a|$ را به دست می آوریم.

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{a} x \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

خواهیم داشت:

$$y = 1 + \tan a\pi x \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{|a\pi|} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{2}$$

ابتدا $f(x)$ را ساده می کنیم.

$$f(x) = \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

ابتدا تابع را ساده می کنیم.

$$y = \tan 3x - \cot 3x = -2 \cot 6x$$

دوره تناوب تابع $y = \tan ax$ و $y = \cot ax$ به صورت $T = \frac{\pi}{|a|}$ می باشد.

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{6}$$

ابتدا y را ساده می کنیم.

$$y = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \pi\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= (-\cos 2x)(\sin 2x) = -\frac{1}{2} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

ابتدا $f(x)$ را ساده می کنیم.

$$f(x) = 4 \sin^2 ax = 4 \left(\frac{1 - \cos 2ax}{2}\right) = 2 - 2 \cos 2ax$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$$

دوره تناوب $g(x)$ را به دست می آوریم.

$$g(x) = \tan \frac{3}{4} x \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{4\pi}{3}$$

بنابراین:

$$T_1 = \frac{1}{2} T_2 \Rightarrow \frac{\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} y = \sin^2 ax \\ y = \cos^2 ax \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

می توانیم از نکته زیر استفاده کنیم:

$$\frac{\pi}{|a|} \quad \text{دوره تناوب } y = \sin^2 ax \text{ و } y = \cos^2 ax \text{ برابر با } \frac{\pi}{|a|} \text{ می باشد.}$$

$$f(x) = 5 \sin^2 \frac{\pi}{6} x \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = 6$$

$$g(x) = \tan \frac{3\pi}{4a} x \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{4a}} = \frac{4}{3} |a|$$

بنابراین:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{4}{3} |a| = 6 \Rightarrow |a| = \frac{9}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{9}{2}$$

دوره تناوب $y = f(ax)$ برابر 3 است. در تابع $f\left(\frac{a}{3}x\right)$

ضریب x نسبت به تابع اول، $\frac{1}{18}$ برابر شده است. در نتیجه دوره تناوب آن 18 برابر دوره تناوب $y = f(ax)$ یعنی 54 می باشد. (ضریب 6 در $y = 6f\left(\frac{a}{3}x\right)$ تأثیری در دوره تناوب ندارد.)

$$\begin{cases} y = a \cos bx + c \\ y = a \sin bx + c \end{cases} \text{ در تابع } \begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \end{cases} \text{ مقابل برقرار است:}$$

بنابراین:

$$f(x) = 5 - 3 \sin \pi x \Rightarrow \begin{cases} \max = 5 + 3 = 8 \\ \min = 5 - 3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max + \min = 10$$

$$T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

در نتیجه:

$$\frac{10}{2} = 5$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$

زیر برقرار است:

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} \quad c = \frac{\max + \min}{2} \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

بنابراین:

$$|a| = \frac{4 - (-2)}{2} = 3$$

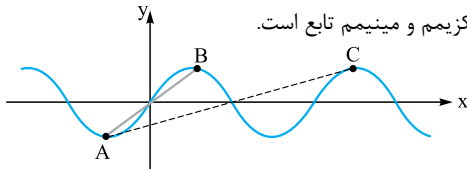
$$c = \frac{4 + 2}{2} = 3 \quad T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow |b| = 12$$

در نتیجه 3 درست است.





۸۷۳-۳ برای این که شیب خط مذکور بیشترین مقدار باشد، نقاط مورد نظر باید دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی باشند. فاصلهٔ بین طول‌های این دو نقطه برابر نصف دورهٔ تناوب و فاصلهٔ بین عرض‌های آن‌ها برابر اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع است.



$$y = 3 \sin \frac{\pi}{4} x$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \Rightarrow \frac{1}{2}T = 4$$

$$\max - \min = 2 \times 3 = 6$$

$$m_{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

بنابراین:

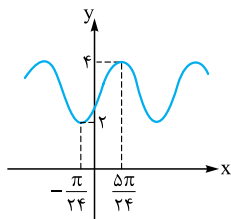
۸۷۴-۳ روش اول: اگر $4x + \frac{\pi}{6} = \alpha$ باشد، آن‌گاه:

$$0 < x < k \Rightarrow \frac{\pi}{6} < 4x + \frac{\pi}{6} < 4k + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < 4k + \frac{\pi}{6}$$

می‌دانیم تابع $y = \cos \alpha$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{6}, \pi)$ نزولی و در نتیجه تابع $f(x) = 3 - \cos \alpha$ در این بازه صعودی است. بنابراین حداکثر مقدار α برابر π می‌باشد.

$$4k + \frac{\pi}{6} = \pi \Rightarrow k = \frac{5\pi}{24}$$

روش دوم، رسم شکل:



نمودار تابع $y = 3 - \cos(4x + \frac{\pi}{6})$ به صورت مقابل است. بدیهی است تابع در فاصلهٔ $(0, \frac{5\pi}{24})$ صعودی است.

۸۷۵-۱ فاصلهٔ طول‌های دو نقطهٔ A و B برابر دورهٔ تناوب تابع است.

$$y = a \cos \frac{\pi}{4} x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \Rightarrow AB = 4$$

طول نقطهٔ B برابر ۴ است $\Rightarrow$

تابع در $x = 0$ دارای ماکزیمم است. در نتیجه a مثبت است. ماکزیمم تابع برابر a و مینیمم برابر -a است. بنابراین:

$$A(0, a) \quad B(4, a) \quad C(2, -a)$$

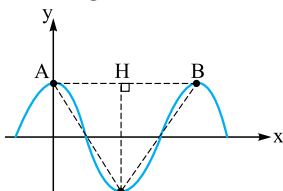
(نقطهٔ C مینیمم بوده و طول آن وسط طول دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی است.)

$$m_{AC} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow (-a)(a) = -1 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$\xrightarrow{a > 0} a = 1$$

۸۷۶-۴ حداقل مساحت مثلث زمانی است که نقاط A و B، دو نقطهٔ

ماکزیمم متوالی باشند. طول ضلع AB برابر دورهٔ تناوب و ارتفاع CH برابر اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع است.



$$AB = T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$CH = \max - \min = 2|a|$$

$$\Rightarrow S = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{\frac{2\pi}{|a|} \times 2|a|}{2} = 2\pi$$

۸۶۶-۱ ابتدا |a| را به دست می‌آوریم.

$$y = 1 + a \sin(\frac{a\pi}{3} x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{a\pi}{3}} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}$$

خواهیم داشت:

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \max - \min = 3$$

۸۶۷-۲ دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{a}{3} \cos 3ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|3a|}$ است.

می‌دانیم:

$$\frac{\max - \min}{2} = \frac{|a|}{2} \Rightarrow \max - \min = |a|$$

بنابراین:

$$T \times (\max - \min) = \frac{2\pi}{|3a|} \times |a| = \frac{2\pi}{3}$$

۸۶۸-۴ با توجه به نمودار، تابع در مبدأ مختصات نزولی بوده و از

نقاط $(0, 0)$ و $(\frac{\pi}{4}, 3)$ عبور می‌کند.

در ۱ تابع از $(\frac{\pi}{4}, 3)$ عبور نمی‌کند.

در ۲ تابع از $(0, 0)$ عبور نمی‌کند.

در ۳ تابع در مبدأ مختصات صعودی است.

۸۶۹-۱ در گزینه‌های ۲ و ۳ ماکزیمم تابع ۳ و مینیمم تابع -۱

است که با توجه به شکل نادرست است.

در ۴ ضرب $\cos \frac{\pi}{4} x$ منفی بوده و تابع در $x = 0$ دارای مینیمم است که با توجه به شکل نادرست است.

در ۱ ماکزیمم و مینیمم به ترتیب ۱ و -۳ بوده و در $x = 0$ دارای ماکزیمم است.

۸۷۰-۳ طول پاره‌خط AB برابر با دورهٔ تناوب تابع است.

$$y = 3 - 3 \sin \frac{\pi}{4} x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \Rightarrow AB = 8$$

ارتفاع MH در مثلث AMB برابر ماکزیمم تابع است.

$$\max = 3 + |-3| = 6 \Rightarrow MH = 6$$

بنابراین:

$$S_{AMB} = \frac{AB \times MH}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

۸۷۱-۱ دورهٔ تناوب تابع با توجه به شکل برابر ۴ است. بنابراین در

تابع $y = a \cos bx + c$ خواهیم داشت:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{2}$$

ماکزیمم تابع ۴ و مینیمم تابع صفر است.

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

تابع در $x = 0$ دارای ماکزیمم بوده و در نتیجه a مثبت و برابر ۲ است.

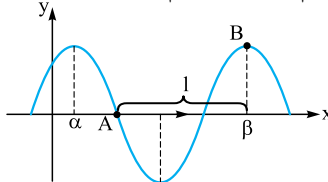
$$\Rightarrow y = 2 \cos \frac{\pi x}{2} + 2$$

۱ درست است:

۸۷۲-۳ فاصلهٔ بین α و β در شکل برابر دورهٔ تناوب است. واضح

است که فاصلهٔ بین A و β یعنی ℓ برابر $\frac{3}{4}$ دورهٔ تناوب می‌باشد.

$$y = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \ell = \frac{3\pi}{4}$$





۸۷۷- ف) AC برابر با نصف دوره تناوب است.

$$y = a \cos a\pi x$$

$$T = \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{2}{|a|} \Rightarrow AC = \frac{1}{|a|} \xrightarrow{a < 0} AC = -\frac{1}{a}$$

(تابع در $x = 0$ مینیمم دارد بنابراین a منفی است.)

در نتیجه مختصات نقاط A و C به دست می‌آید.

$$A(\frac{1}{2a}, 0), C(-\frac{1}{2a}, 0)$$

مختصات نقطه B به صورت $(0, a)$ می‌باشد. بدیهی است مثلث ABC متساوی‌الساقین است. برای این که متساوی‌الاضلاع باشد کافی است $AB = AC$

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4a^2} + a^2} = -\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{4a^2} + a^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow a^4 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

۸۷۸- ف) با توجه به نمودار دوره تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{4}$ و مینیمم تابع -3 است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4$$

$$\min = -1 - |a| = -3 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

تابع در $x = 0$ نزولی و در نتیجه $ab < 0$ است، بنابراین:

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$$

۸۷۹- ۲) با توجه به نمودار، فاصله بین $x = 0$ تا $x = 3$ ، دوره $\frac{3}{4}$ تناوب است:

$$y = a \sin b\pi x + 1$$

$$\frac{3}{4}T = 3 \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

ماکزیمم تابع برابر ۳ می‌باشد.

$$\max = |a| + 1 = 3 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow |ab| = 1$$

تابع در $x = 0$ نزولی بوده و در نتیجه $ab < 0$ است. بنابراین: $ab = -1$

۸۸۰- ۱) با توجه به نمودار دوره تناوب تابع ۶ و ماکزیمم آن ۳ است.

$$y = a - \cos b\pi x$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$\max = a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

(b می‌تواند $\frac{1}{3}$ یا $-\frac{1}{3}$ باشد و تفاوتی ایجاد نمی‌شود.)

$$\Rightarrow y = 2 - \cos \frac{\pi}{3}x \xrightarrow{x=\frac{17}{2}} y = 2 - \cos \frac{17\pi}{6}$$

$$= 2 - \cos \frac{5\pi}{6} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸۸۱- ۳) فاصله بین طول‌های دو نقطه ماکزیمم و مینیمم متوالی نصف دوره تناوب است.

$$y = 2 + a \cos b\pi x$$

$$\frac{T}{2} = 2 \Rightarrow T = 4$$

$$\min = -1 \Rightarrow 2 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 3$$

$$\max = 2 + |a| = 2 + 3 = 5$$

$$\frac{\max}{T} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

بنابراین:

در نتیجه:

۸۸۲- ف) نمودار در دو دوره تناوب رسم شده است، بنابراین:

$$2T = \frac{4}{\Delta} \Rightarrow T = \frac{2}{\Delta}$$

$$y = 1 + a \sin b\pi x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{\Delta} \Rightarrow |b| = \Delta$$

$$\min = -2 \Rightarrow 1 - |a| = -2 \Rightarrow |a| = 3$$

تابع در $x = 0$ صعودی بوده و $ab > 0$ می‌باشد.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3, b = \Delta \\ a = -3, b = -\Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 8 \checkmark \\ a + b = -8 \end{cases}$$

۸۸۳- ۱) مینیمم تابع -6 و ماکزیمم آن صفر است.

$$f(x) = a + b \sin \frac{\pi}{3}x$$

$$a = \frac{\max + \min}{2} = \frac{0 - 6}{2} = -3$$

$$|b| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3$$

تابع در $x = 0$ نزولی بوده و $b < 0$ است. بنابراین $b = -3$ می‌باشد.

در نتیجه:

$$f(x) = -3 - 3 \sin \frac{\pi}{3}x \Rightarrow f(\frac{9}{4}) = -3 - 3 \sin \frac{3\pi}{4} = -3 + 3 = 0$$

■ دوره تناوب تابع ۶ می‌باشد. با توجه به نمودار طول نقطه ماکزیمم $(\frac{3}{4}T)$ برابر $\frac{9}{4}$ و در نتیجه $f(\frac{9}{4}) = 0$ است.

۸۸۴- ۱) از $x = 0$ تا $x = 5$ ، دوره تناوب است.

$$\frac{3}{4}T = 5 \Rightarrow T = \frac{20}{3}$$

$$f(x) = a \cos b\pi x - 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{20}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{10}$$

$$\max = 2 \Rightarrow -2 + |a| = 2 \Rightarrow |a| = 4$$

تابع در $x = 0$ دارای ماکزیمم بوده و $a > 0$ است. بنابراین $a = 4$ و

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 + \frac{3}{10} = \frac{43}{10} \\ a + b = 4 - \frac{3}{10} = \frac{37}{10} \end{cases}$$

۸۸۵- ۱) با توجه به نمودار دوره تناوب برابر $\frac{2\pi}{3}$ و ماکزیمم تابع $\frac{3}{4}$ است.

$$y = a - 3 \sin bx$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \xrightarrow{b < 0} b = -3$$

(تابع در $x = 0$ صعودی و $-3b$ مثبت است.)

$$\max = a + |-3| = \frac{3}{4} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$2ab = 2(-\frac{3}{4})(-3) = 9$$

در نتیجه:

۸۸۶- ۳) با توجه به نمودار دوره تناوب $\frac{2\pi}{3}$ ، ماکزیمم ۳ و مینیمم

$$y = a \sin bx + c$$

۱- است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$



تابع در $x = 0^\circ$ نزولی بوده و $ab < 0$ است بنابراین:

$$|ab| = 6 \Rightarrow ab = -6$$

$$ab - c = -6 - 1 = -7$$

در نتیجه:

دوره تناوب تابع f ، مینیمم آن -2 و $f(0) = 2$ می باشد. ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم.

$$f(x) = a \cos \pi(bx + \frac{2}{3}) + c = a \cos(\pi bx + \frac{2\pi}{3}) + c$$

$$= a \sin \pi bx + c$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$\min = c - |a| = -2 \Rightarrow 2 - |a| = -2 \Rightarrow |a| = 4$$

تابع در $x = 0^\circ$ نزولی بوده و $ab < 0$ است.

$$|ab| = \frac{4}{3} \Rightarrow ab = -\frac{4}{3} \Rightarrow abc = -\frac{4}{3}$$

دوره تناوب تابع برابر b و مینیمم آن برابر صفر است.

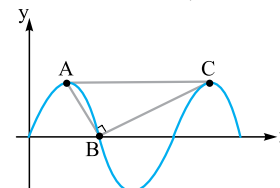
$$f(x) = a + b \cos \frac{2\pi}{9} ax$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{9}|a|} = 9 \Rightarrow |a| = 9$$

$$\min = a - |b| = 0 \Rightarrow a = |b| \xrightarrow{b > 0} a = b$$

بنابراین:

$$f(x) = 3 + 3 \cos \frac{2\pi}{3} x \Rightarrow f(a) = f(3) = 3 + 3 \cos 2\pi = 6$$



اگر دوره تناوب T باشد، طول نقاط A ، B و C به ترتیب $\frac{T}{4}$ ، $\frac{T}{2}$ و $\frac{3T}{4}$ است. تابع در $x = 0^\circ$ صعودی و $a > 0$ است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3, \max = |a| = a$$

$$\Rightarrow A(\frac{1}{4}, a) \quad B(\frac{1}{2}, 0) \quad C(\frac{3}{4}, a)$$

بنابراین:

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \times \frac{a}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = -1$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{3}{16} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

دوره تناوب تابع $y = 1 + 2 \cos \pi x$ برابر $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ است.

بنابراین طول نقاط A و B به ترتیب صفر و 2 می باشد. $(AB = 2)$ ماکزیمم تابع برابر $3 = 1 + 2$ بوده و در نتیجه عرض نقاط A و B برابر 3 است (ارتفاع دوزنقه $h = 3$ است). عرض نقاط C و D صفر است.

$$1 + 2 \cos \pi x = 0 \Rightarrow \cos \pi x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{2\pi}{3} \\ \pi x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

طول نقاط C و D به ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{3}$ بوده و $CD = \frac{2}{3}$ است.

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \times h = \frac{2 + \frac{2}{3}}{2} \times 3 = 4$$

$$f(x) = a \sin bx \cos bx = \frac{a}{2} \sin 2bx$$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2}$$

$$\max = |\frac{a}{2}| = 3 \Rightarrow |a| = 6$$

تابع در $x = 0^\circ$ نزولی و $ab < 0$ است.

$$|\frac{a}{b}| = \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4 \Rightarrow -\frac{a}{b} = 4 \Rightarrow \frac{a}{b} = -4$$

ضابطه تابع به صورت $y = 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ است.
دوره تناوب تابع $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ بوده و در نتیجه $OB = \pi$ است.
ماکزیمم تابع برابر $2 = 1 + 1$ بوده و در نتیجه $y_A = 2$ می باشد.

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \times OB \times y_A = \frac{1}{2} \times \pi \times 2 = \pi$$

ضابطه تابع را ساده می کنیم.

$$y = a + b \sin^2 x = a + b(\frac{1 - \cos 2x}{2}) = -\frac{b}{2} \cos 2x + a + \frac{b}{2}$$

ماکزیمم تابع 2 و مینیمم آن -1 است. تابع در $x = 0^\circ$ دارای ماکزیمم بوده و $-\frac{b}{2} > 0$ و در نتیجه $b < 0$ است.

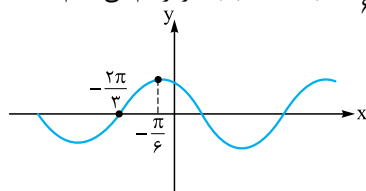
$$\max = |\frac{b}{2}| + a + \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow -\frac{b}{2} + a + \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\min = -|\frac{b}{2}| + a + \frac{b}{2} = -1 \Rightarrow a + b = -1$$

$$\Rightarrow 2 + b = -1 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a - b = 5$$

در بازه $[\pi, 2\pi]$ منفی بوده و در نتیجه

$$y = \cos(\frac{\pi}{2} + x) \text{ است. در بین گزینه ها تابع } y = |\sin x| = -\sin x \text{ با } y = -\sin x \text{ برابر است.}$$

نمودار تابع $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$ را رسم می کنیم.


مشخص است اگر نمودار $y = \sin x$ را $\frac{2\pi}{3}$ به سمت چپ منتقل کنیم، بر نمودار فوق منطبق خواهد شد. بنابراین $y = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ بر نمودار

$f(x)$ منطبق است. بنابراین تابع $g(x) = \sin(x + \theta)$ زمانی بر $f(x)$ منطبق است که $\theta = \frac{2\pi}{3}$ یا $\theta = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ باشد.

بدیهی است دوره تناوب توابع $f(x)$ و $g(x)$ برابر است، بنابراین اگر a مثبت باشد، $a = 3$ است.

می دانیم $\sin(3x - \pi) = -\sin 3x = \cos(3x + \frac{\pi}{3})$ است. بنابراین

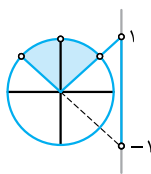
برای این که $g(x) = \cos(3x + b)$ بر $f(x) = \sin(3x - \pi)$ منطبق باشد، کافی است $b = \frac{\pi}{3}$ یا $b = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ باشد. در نتیجه b می تواند $-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ باشد.





طول نقطه B برابر $\frac{2\pi}{3}T = \frac{2\pi}{3}$ است.

$$\left. \begin{matrix} A(0, 1) \\ B(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right\} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{2\pi}{3} - 0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{\pi}$$



۹۰۱-۴ اگر $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ باشد، آن گاه $\frac{\pi}{3} < 2\theta < \frac{2\pi}{3}$ بوده و با توجه به دایره مثلثاتی $\tan 2\theta > 1$ یا $\tan 2\theta < -1$ است.

بنابراین:

$$|\tan 2\theta| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|\tan 2\theta|} < 1 \xrightarrow{m \neq \frac{1}{3}} |3m - 1| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 3m - 1 < 1 \Rightarrow 0 < 3m < 2 \Rightarrow 0 < m < \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{m \neq \frac{1}{3}} m \in (0, \frac{2}{3}) - \{\frac{1}{3}\}$$

۹۰۳-۲ تابع $y = \tan(g(x))$ در نقاطی که $g(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (که $k \in \mathbb{Z}$) تعریف نشده است.

$$f(x) = \tan \frac{3x}{4} \Rightarrow \frac{3x}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

اگر $k = 0$ باشد، $x = \frac{2\pi}{3}$ است. به ازای بقیه مقادیر صحیح k ، x بازه $(0, 2\pi)$ قرار نمی گیرد. بنابراین تنها به ازای $x = \frac{2\pi}{3}$ تابع $f(x)$ در بازه $(0, 2\pi)$ تعریف نشده است.

۹۰۴-۴ ضابطه $f(x)$ را ساده می کنیم.

$$f(x) = 2 - \tan(\pi - \frac{2}{3}x) = 2 + \tan \frac{2}{3}x$$

تابع $y = \tan x$ در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ اکیداً یکنواست بنابراین تابع

$y = \tan \frac{2}{3}x$ در بازه $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ اکیداً یکنواست، در نتیجه کمترین مقدار k برابر $-\frac{3\pi}{4}$ است.

۹۰۵-۳ ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می کنیم.

$$f(x) = \cot(\frac{3\pi}{4} + \pi x) = -\tan(\pi x)$$

نمودار تابع در $x = 0$ اکیداً نزولی بوده و $a < 0$ و در نتیجه $a > 0$ است. با توجه به نمودار دوره تناوب تابع π می باشد.

$$T = \frac{\pi}{|a\pi|} = \frac{1}{a} \Rightarrow |a| = \frac{1}{\pi} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{1}{\pi}$$

۹۰۶-۲ با توجه به نمودار، $f(0) = -1$ است.

$$f(x) = a + \tan(\frac{\pi}{4} + bx)$$

$$\Rightarrow f(0) = a + \tan \frac{\pi}{4} = -1 \Rightarrow a = -2$$

تابع در $x = 0$ صعودی بوده و $b > 0$ می باشد. همچنین $f(x)$ در $x = \frac{\pi}{4}$ تعریف نشده است:

$$\frac{\pi}{4} + b(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{2}{\pi} \Rightarrow a - b = -2 - \frac{2}{\pi} = -\frac{11}{4}$$

۹۰۷-۱ حداکثر a نصف دوره تناوب است.

$$y = 3 \tan(\frac{\pi}{3} - 2x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{4}$$

۸۹۷-۳ در تابع $y = a + 2 \sin(bx - \frac{\pi}{3})$ ، $-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$ بوده و

ویژگی های آن با $y = a + 2 \sin bx$ یکسان است. دوره تناوب تابع π و مینیم آن -1 است. تابع در $x = 0$ نزولی بوده و $b < 0$ می باشد.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \xrightarrow{b < 0} b = -2$$

$$\min = a - 2 = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a - b = 3$$

۸۹۸-۴ در تابع $f(x) = a - b \sin(x + \frac{\pi}{6})$ ، $|\frac{\pi}{6}| < \frac{\pi}{2}$ بوده و

ویژگی های آن با $y = a - b \sin x$ یکسان است. $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ و $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ است. ماکزیم تابع 2 است. تابع در $x = 0$ صعودی بوده و $-b > 0$ و در نتیجه $b < 0$ است.

$$f(\pi) = a - b \sin \frac{7\pi}{6} = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = -2a$$

$$\max = a + |b| = 2 \xrightarrow{b < 0} a - b = 2$$

$$\xrightarrow{b = -2a} 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \sin(x + \frac{\pi}{6})$$

واضح است طول نقطه ماکزیم A ، $x = \frac{\pi}{3}$ (سینوس برابر ۱ باشد) و طول

نقطه مینیم B ، $x = -\frac{2\pi}{3}$ (سینوس برابر -1 باشد) است. مینیم تابع نیز $\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$ می باشد.

$$A(\frac{\pi}{3}, 2), B(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{2}{3}) \Rightarrow m_{AB} = \frac{2 + \frac{2}{3}}{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\pi} = \frac{8}{3\pi}$$

۸۹۹-۴ تابع از مبدأ مختصات عبور می کند.

$$f(x) = 1 + a \cos(bx - \frac{\pi}{3})$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow 1 + a \cos(-\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -2$$

در تابع $y = a \cos(bx + \theta) + c$ اگر در سمت راست محور y ها اول ماکزیم داشته باشیم با فرض این که b مثبت باشد $a\theta < 0$ و با فرض این که b منفی باشد $a\theta > 0$ است.

در این تابع در سمت راست محور y ها اول ماکزیم داریم و $a\theta > 0$ است. بنابراین $b < 0$ می باشد.

تابع $f(x)$ در نقاطی صفر می شود که $\cos(bx - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

اولین نقطه در نمودار $x = 0$ بود که $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ بود. در سایر

ریشه های نمودار x مثبت و b منفی است. بنابراین $bx - \frac{\pi}{3}$ به ترتیب

$$x = \frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{11\pi}{3}$$

$$\text{است، } bx - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{3} \text{ می باشد:}$$

$$\frac{5\pi}{3}b - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{3} \Rightarrow b = -2$$

۹۰۰-۱

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} (1 - \cos^2 2x)$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2x$$

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \max = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2, \min = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$



۹۱۳- ۱ اگر $x - \frac{\pi}{4} = \alpha$ باشد، آن گاه $x + \frac{\pi}{4} = \alpha + \frac{\pi}{2}$ است.

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= -\frac{1}{4} \Rightarrow -\cos\alpha\sin\alpha = -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\alpha &= \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\alpha = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cup} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۹۱۴- ۱ می دانیم $\sin(-x) = -\sin x$ است.

$$\begin{aligned} \sin 3x + \sin x &= 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin x \\ \Rightarrow \sin 3x &= \sin(-x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cup} x = \frac{k\pi}{2}$$

۹۱۵- ۲ می دانیم $\cos(x + \pi) = -\cos x$ است.

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos x &= 0 \Rightarrow \cos 2x = -\cos x \\ \Rightarrow \cos 2x &= \cos(x + \pi) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm (x + \pi) \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین معادله در بازه $(0, 2\pi)$ سه جواب دارد.

۹۱۶- ۲ می دانیم $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ است.

$$\begin{aligned} \sin 3x + \cos x &= 0 \Rightarrow \sin 3x = -\cos x \\ \Rightarrow \sin 3x &= \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x - \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \pi - (x - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 2\pi$$

۹۱۷- ۴ معادله را ساده می کنیم.

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \pi\right) = 0 \Rightarrow \sin 2x - \sin x = 0$$

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases}$$

روش اول:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, 2\pi \\ x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 + 2\pi + \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$$

۹۰۸- ۳ جواب های کلی معادله را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} 2\sin 2x &= -1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ x = \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{23\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} = \frac{16\pi}{12} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

۹۰۹- ۳ روش اول:

$$2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 2\pi$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x &= 1 \Rightarrow 2(1 + \cos 2x) = 1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow 2x &= 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

۹۱۰- ۴ $x = \frac{5\pi}{12}$ جواب معادله است.

$$\begin{aligned} k\cos 2x + \sqrt{3} &= 0 \xrightarrow{x = \frac{5\pi}{12}} k\cos \frac{5\pi}{6} + \sqrt{3} = 0 \\ \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2}k &= -\sqrt{3} \Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2\cos 2x + \sqrt{3} &= 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow 2x &= 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$$

بزرگ ترین جواب در بازه $(0, 2\pi)$ برابر $\frac{19\pi}{12}$ است.

۹۱۱- ۱ معادله را ساده می کنیم.

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) &= 1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \end{aligned}$$

۹۱۲- ۲ اگر $x - \frac{\pi}{3} = \alpha$ باشد، آن گاه $x + \frac{\pi}{3} = \alpha + \frac{2\pi}{3}$ است.

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\alpha = 1 \\ \Rightarrow 2\cos\alpha &= 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \Rightarrow x = 0, 2\pi \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$0 + 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

بنابراین:





روش دوم:

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \pi, 2\pi \\ x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

معادله را ساده می‌کنیم. **۹۱۸-۱**

$$2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow -\cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x$$

روش اول:

$$\cos 2x = \cos(2x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm (2x + \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

روش دوم: جواب کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + \alpha$ می‌باشد.

$$\cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow \tan 2x = -1 \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۹۱۹-۱ با شرط $\cos x \neq -1$ صورت کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\sin 4x + \sin 3x = 0 \Rightarrow \sin 4x = -\sin 3x$$

$$\Rightarrow \sin 4x = \sin(-3x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi - 3x \\ 4x = 2k\pi + \pi + 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{7} \checkmark \\ x = 2k\pi + \pi \text{ غ ق } (\cos x \neq -1) \end{cases}$$

معادله را ساده می‌کنیم. **۹۲۰-۲**

$$\sin x (2 \sin x - 9) = 5 \Rightarrow 2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 5 \text{ غ ق } \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$$\frac{11\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

بنابراین:

معادله را ساده می‌کنیم. **۹۲۱-۲**

$$\sin^2 x + \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \cos x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \text{ غ ق } \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$$

بنابراین:

معادله را ساده می‌کنیم. **۹۲۲-۱**

$$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0 \Rightarrow 2 \times (1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \text{ غ ق } \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

معادله را ساده می‌کنیم. **۹۲۳-۳**

$$\cos 2x - 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x - (1 - \cos 2x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

معادله را ساده می‌کنیم. **۹۲۴-۴**

$$\sin(\frac{\pi}{3} + x) \cos(\pi + x) + 2 \cos(x - \pi) = 1$$

$$\Rightarrow \cos x (-\cos x) - 2 \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow (\cos x + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 2k\pi - \pi$$

با فرض $\sin x \neq 0$ صورت کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم. **۹۲۵-۴**

$$\cos x (2 \cos x + 1) - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \text{ غ ق } (\sin x \neq 0) \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

ریشه معادله است. **۹۲۶-۴** $x = \frac{5\pi}{6}$

$$\cos 2x + a \sin x = 0 \xrightarrow{x = \frac{5\pi}{6}} \cos \frac{5\pi}{3} + a \sin \frac{5\pi}{6} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -1$$

حال، معادله را حل می‌کنیم.

$$\cos 2x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \sin x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

بنابراین:

با فرض $\sin x - \cos x \neq 0$ معادله را ساده می‌کنیم. **۹۲۷-۴**

$$\sin x = \frac{1}{\sin x - \cos x} \Rightarrow \sin^2 x - \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = -\sin x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

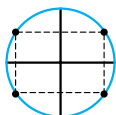
با فرض $\sin 2x \neq 0$ و $\cos 2x \neq 0$ معادله را ساده می‌کنیم. **۹۲۸-۱**

$$\frac{\sin x}{\cos 2x} = \frac{\cos x}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos 2x} = \frac{\cos x}{2 \sin x \cos x}$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow 1 - \cos 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

رئوس یک مستطیل (غیر مربع) می‌باشند.





حال، معادله را حل می‌کنیم.

$$\sin 2x - \sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x - \cos x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x (\cos x - \frac{1}{2}) - (\cos x - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x - \frac{1}{2})(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۹۳۴-۲ با شرط $\cos x \neq 0$ دو طرف معادله را در $\cos x$ ضرب می‌کنیم.

$$\tan x + \sin x = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin x \cos x = \cos x + \cos^2 x$$

$$\sin x - \cos x + \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ x = \pi \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{5\pi}{4}$$

۹۳۵-۱ برای این که جوابهای معادله مثلثاتی $\cos 3x = \cos ax$ بر روی دایره مثلثاتی رئوس یک ۷ضلعی منتظم باشد، باید مجموعه جواب به صورت $\frac{2k\pi}{7}$ باشد.

$$\cos ax = \cos 3x \Rightarrow ax = 2k\pi \pm 3x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{a-3} \\ x = \frac{2k\pi}{a+3} \end{cases}$$

اگر $a-3=7$ باشد، آن گاه $a=10$ و مجموعه جواب به صورت

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{7} \\ x = \frac{2k\pi}{13} \end{cases} \text{ است که بیانگر رئوس یک ۷ضلعی منتظم و یک ۱۳ضلعی منتظم است. بنابراین قابل قبول نیست.}$$

اگر $a+3=7$ باشد، آن گاه $a=4$ و مجموعه جواب به صورت

$$\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{7} \end{cases} \text{ است که اجتماع این جوابها برابر } \frac{2k\pi}{7} \text{ می‌باشد. در نتیجه}$$

$a=4$ جواب مسئله است.

۹۳۶-۲ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{8} \\ \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{8}$$

۹۲۹-۲ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\cos 2x = 5 \cos x - 3 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ غلط} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = \cos(0) = 1$$

بنابراین:

۹۳۰-۲ روش اول، دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم. (ممکن است جواب اضافه وارد مسئله شود.)

$$\sin 3x + \cos 3x = -1 \Rightarrow 1 + \sin 6x = 1 \Rightarrow \sin 6x = 0$$

$$\Rightarrow 6x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$$

جوابهای ۰ و $\frac{\pi}{6}$ در معادله اولیه صدق نمی‌کنند و قابل قبول نیستند. بنابراین در بازه $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ سه جواب وجود دارد.

روش دوم، معادلات خاص:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin 3x + \cos 3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = (2k+1)\pi \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۹۳۱-۱ با شرط $x \neq k\pi$ معادله را ساده می‌کنیم.

$$1 + \cot^2 x = 8 \cos^2 x \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = 8 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 8 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$$

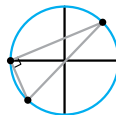
۹۳۲-۱ با شرط $1 - \cos x \neq 0$ معادله را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2(\cos x + 1) \Rightarrow \sin 2x = 2(1 - \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \pi \\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

با توجه به شرط $\cos x \neq 1$ جواب $x = 0$ غیر قابل قبول است.



جوابها رئوس مثلث قائم الزاویه هستند.

۹۳۳-۲ $x = \frac{\pi}{6}$ ریشه معادله است.

$$\sin 2x - \sin x - \cos x = k$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6} = k$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$