

...مقدمه ناشر...

نمی‌دونم شما هم این جوری هستید یا نه، ولی خب یکی از مشکلاتی که من همیشه دارم، تمرکز کردنه! این جوری که هم‌زمان چندتا چیز مختلف میاد تو ذهنم و باعث می‌شه رو هیچ کدوم نتونم تمرکز کنم! یا مثلاً روی یه چیز تمرکز می‌کنم، اما وسطش حواسم به کوچک‌ترین چیزها پرت می‌شه! ولی خب وقتی از یه کاری لذت ببرم، اصلاً متوجه گذر زمان نمی‌شم و غرق می‌شم توش!

به گفته دیوید راک (David Rock)، یکی از بنیان‌گذاران مؤسسه NeuroLeadership و نویسنده کتاب «مغز شما در هنگام کار» (Your Brain at Work)، ما فقط ۶ ساعت در هفته واقعاً بر کار خود تمرکز می‌کنیم. به علاوه، بررسی‌های راک نشان داده است که بیشترین کارایی و قدرت فکری ۹۰٪ از مردم، مربوط به زمانی است که خارج از اداره‌اند و بالاترین میزان تمرکز افراد نیز در هنگام صبح یا اواخر شب است. این دقیقاً برخلاف چیزی است که برنامه‌های کاری به ما دیکته می‌کنند!

متمرکز کردن فکر، فعالیتی غیرمعمول نیست و تقریباً هر روز برای همه اتفاق می‌افتد ولی این تمرکز، توانایی ناخودآگاه و کنترل‌نشده‌ای است. برای مثال، آیا توجه کرده‌اید کودکان در هنگام بازی صدای شما را نمی‌شنوند؟ آن‌ها آن قدر در بازی غرق می‌شوند که به هیچ چیز دیگری توجه نمی‌کنند. یا وقتی کتاب بسیار جالبی می‌خوانید، صدای اطرافیان را نمی‌شنوید. زمانی که نامه‌ای مهم می‌نویسید، فیلم یا مسابقه‌ای ورزشی تماشا می‌کنید، شطرنج بازی می‌کنید و به طور کلی وقتی مشغول انجام کاری می‌شوید که عاشق آن هستید و برایتان جالب یا لذت‌بخش است، به محیط اطراف خود بی‌توجه می‌شوید و گذشت زمان را حس نمی‌کنید.

این مثال‌ها نشان می‌دهند که «متمرکز کردن توجه» امکان‌پذیر است ولی این کار با تمرکز واقعی تفاوت دارد، زیرا فرایندی آگاهانه و عمدی است و شما هر زمان که اراده کنید، می‌توانید برای مدت‌زمان مشخصی (و نه فقط چند ثانیه) ذهن خود را بر هر موضوعی که می‌خواهید، متمرکز کنید. با استفاده از این توانایی، می‌توانید علاوه بر چیزهای لذت‌بخش و کارهای مورد علاقه‌تان، ذهن خود را بر وظایف، شغل، درس و حتی کارهای خسته‌کننده و ناخوشایندی که مجبور به انجام آن‌ها هستید، متمرکز کنید.

خب یه سری راه هست که می‌شه تمرکز رو افزایش داد که اگر تو گوگل سرچ کنید، کامل براتون توضیح داده! اما این‌جا من نمی‌خوام در مورد این راه‌ها صحبت کنم و اصل حرفم اینه، چیزی که باعث می‌شه آدم توی کارش متمرکز بشه و متوجه گذر زمان نشه، لذت‌بردن از اون کاره! و خب وقتی هم آدم توی کاری عمیق بشه، حتماً پیشرفت می‌کنه! مستقل از این که چه کاری باشه! پس تو هر کاری هدف‌تون اول لذت‌بردن باشه، بعد چیزای دیگه! چون اگر غیر این باشه بهتون خوش نمی‌گذره، فکرتون درست کار نمی‌کنه، خلاقیت نخواهید داشت و در نهایت به اون چیزی که دلتون می‌خواد، نمی‌رسید!

پس پیشنهاد من به شما اینه تو مسیری برید که ازش لذت می‌برید! حالا تو حوزه درس، ورزش، هنر یا هر چی! از اون جایی که این کتاب رو تهیه کردی و خب این کتاب برای آدم‌های خاص و اهل عمیق شدن رو مسائل هست، کلی ایده باحال هست که موقع حل‌کردنش متوجه گذر زمان نمی‌شی و لذت می‌بری!

نوشتن چنین کتابی اصلاً راحت نیست و زمان خیلی زیادی براش گذاشته شده! این کتاب یه جورایی ترکیب تجربه و جوانیه! ممنونم از عطای عزیز، که با تجربه و استعدادش این کتاب رو نوشت و ممنون از مسعود به خاطر انگیزه و خلاقیت زیادش! تشکر از لولاو مرادی به خاطر تمام کارهای خوبش در جلو بردن پروژه و تمام بچه‌های باحال خیلی سبز!

از زندگیت لذت ببر!

...مقدمه مؤلف...

اگر کتاب‌های قبلی من را خوانده باشید، لابد می‌دانید که چندان عادت ندارم در مقدمه کتاب‌های ریاضیم درباره خود ریاضی بنویسم و دوست دارم از چیزهایی دیگر حرف بزنم اما این بار می‌خواهم اول کمی درباره این کتاب با شما حرف بزنم بعد بروم سراغ موارد دیگر. من تا به امروز بیش از ده عنوان کتاب آموزشی درباره ریاضی نوشته‌ام اما از دید خودم این یکی از بهترین‌های آن‌هاست. برای این کتاب زحمت زیادی کشیده شده است، بدون اغراق درباره تک‌تک تست‌های این کتاب با مسعود بحث کرده‌ایم و سعی کرده‌ایم مجموعه‌ای از تست‌ها برای شما فراهم کنیم که از نظر گستردگی و پوشش ایده‌های مختلف مربوط به مباحث گسسته، کتاب کاملی باشد. هم‌چنین با توجه به این که رویکرد تازه سازمان سنجش در مورد تست‌های گسسته و آمار و احتمال کنکورهای این چند سال این بوده که درجه سختی سؤال‌ها بیشتر شود ما هم سعی کردیم توجه ویژه‌ای به این رویکرد داشته باشیم و با طرح تست‌های خلاقانه و مناسب، شما را برای آزمون سراسری آماده کنیم. در درس‌نامه مفصل این کتاب نیز به شرح و بسط و طبقه‌بندی ایده‌های درسی پرداخته‌ایم به طوری که می‌توانیم ادعا کنیم با خواندن دقیق درس‌نامه این کتاب درک بهتری از مباحث خواهید داشت و راحت‌تر می‌توانید از پس تست‌ها بربیایید! در بخش پایانی کتاب یعنی «تثبیت ایده‌ها» نیز شما می‌توانید در زمانی کوتاه و با زدن تعداد قابل قبولی تست، همه ایده‌های اصلی را مرور کنید.

اما در ادامه مقدمه می‌خواهم برای شما چند پیشنهاد داشته باشم. کتاب‌ها، فیلم‌ها، نمایش‌ها و به طور کلی آثاری وجود دارند که می‌توانند تأثیر عمیقی بر انسان داشته باشند و آدم را به فکر کردن وادار کنند و چه‌بسا نگاهمان به زندگی را عوض کنند. به همین خاطر می‌خواهم سه تا از این آثاری که در زندگی من اثرگذار بوده‌اند را به شما نیز پیشنهاد بدهم:

ملاقات با بانوی سالخورده

نمایش‌نامه‌ای از فریدریش دورنمات، نمایش‌نامه‌نویس و رمان‌نویس شناخته‌شده سوئیسی است در سه پرده درباره زن سالخورده بسیار ثروتمندی که پس از سال‌ها تصمیم گرفته به زادگاهش بازگردد. او در جوانی به خاطر آن که مردی که عاشقش بوده او را رها کرده، مجبور به ترک شهری که در آن به دنیا آمده می‌شود و حالا پس از گذشت سال‌ها با یک شرط مهم به آن‌جا بازگشته. او حاضر است پول بسیار قابل توجهی که به هر یک از شهروندان آن شهر که بیشتر آن‌ها در وضعیت اقتصادی خیلی نامناسبی هستند بدهد به شرط آن که آن‌ها مردی که در جوانی عاشقش بوده و در حق او بدی کرده ولی در حال حاضر شهردار آن شهر و شخصیت محبوب و محترمی است را به قتل برسانند.

زندگی دیگران

فیلمی به نویسندگی و کارگردانی فلوریان هنکل فون دونرسمارک که در هفتاد و نهمین دوره مراسم اسکار برنده جایزه اسکار بهترین فیلم غیرانگلیسی‌زبان شده است. توضیح بیشتری نمی‌دهم تا خودتان فیلم را ببینید.

زیستن، نه بر پایه دروغ

یادداشتی از الکساندر سولزنیستین، نویسنده سرشناس روس و برنده جایزه نوبل ادبیات که چندین سال از عمر خود را در زندان‌های مخوف شوروی گذراند و بعدتر به خاطر افشای جنایات استالین در کتاب‌هایش و انتقاد از فساد گسترده و ناکارآمدی مقامات شوروی تبعید شد. خلاصه حرف سولزنیستین این بود که ساده‌ترین کار برای ما و نابودکننده‌ترین کار برای دروغ، شرکت نکردن در دروغ است. پیشنهاد می‌کنم متن کامل این جستار را پیدا کنید و بخوانید.

آثار ادبی، هنری و نمایشی از این دست بسیار زیادند و پرداختن بیشتر به آن‌ها از حوصله این مقدمه خارج است. پیشنهاد کلی من به شما این است که سعی کنید آدمی چندبعدی باشید، کتاب زیاد بخوانید، فیلم زیاد ببینید، به تماشای تئاتر بروید، پادکست زیاد گوش کنید و دنیایتان را ژرف‌تر و عمیق‌تر کنید. اما در پایان این مقدمه جا دارد تشکر کنم از مسعود که برای این کتاب زحمت خیلی زیادی کشید و از ایمان عزیز که همیشه با صبر و حوصله حرف‌های ما را شنید و به هر چه بهتر شدن کتاب کمک کرد. حرف دیگری نیست و برایتان آرزوی موفقیت و روزهای خوب دارم.

...مقدمه مؤلف...

سلام! امیدوارم حالتون خوب باشه.

چند روز پیش (۲۵ خرداد ۱۴۰۲) داشتم با یکی از دانش‌آموزا صحبت می‌کردم، بحث چهارچوب ذهنی و ... شد. برا همین می‌خوام مقدمه رو با دوتا سؤال شروع کنم:

حتماً بازی نقطه خط رو یادتون هست که باید بین هر دوتا نقطه یه پاره‌خط رسم می‌کردیم تا مربع بشه و ... حالا ۴ نقطه به شکل مقابل رو در نظر بگیرید.



این ۴ نقطه روی رئوس یه مربع هستند. حالا یه سؤال! به نظرتون می‌شه از یکی از این ۴ نقطه شروع کرد و بدون این‌که دستمون رو از روی کاغذ بلند کنیم، سه‌تا خط بکشیم که از هر ۴ نقطه عبور کنه و آخر کار به نقطه شروع برگردیم؟ جواب این سؤالو می‌تونید • • • ببینید.

قیمت طلا امروز (۲۹ خرداد ۱۴۰۲) گرمی ۲ میلیون و چهارصده. سؤال دومم اینه که اگه بهتون ۱۰ گرم طلا بدم، چه کاری انجام می‌دین که موفق بشین یا به هدفتون برسید؟ (البته این هدفه متفاوت، مثلاً برا یکی کنکوره، برا یکی پولدار شونده، برا یکی خرید ماشینه و ...) خوب به این سؤال فکر کنید!

این سؤالو از آدما پرسیدم و جواب بعضی‌هاشون اینطوری بود: نقد می‌کنم می‌زارم تو بانک، باهاش دلار می‌خرم، می‌برم تو بورس (یا ارز دیجیتال) و باهاش trade می‌کنم، باهاش دوره ثبت‌نام می‌کنم و کتاب می‌خرم و ... اما یه سؤال! چرا اصلاً ذهن خودمونو محدود کنیم به این ۱۰ گرم؟ کی گفته اصلاً باید از این ۱۰ گرم استفاده کنیم تا به هدفمون برسیم؟ راه‌های خیلی زیادی وجود داره که حتی بدون استفاده کردن از این ۱۰ گرم هم می‌تونیم به هدفمون برسیم. خلاصه کلام این‌که چرا چهارچوب الکی برا ذهنمون درست کنیم؟

چهارچوب‌های ذهنی رو اگه بشکونیم، باعث خلق اتفاقات جدید می‌شیم! مثل نیما یوشیج که چهارچوب شکست و نوع جدیدی از شعر رو عرضه کرد؛ مثل انیشتین که چهارچوب فیزیک کلاسیک رو شکوند و فیزیک نوین رو عرضه کرد و ... توی این کتاب هم ما سعی کردیم چهارچوب سؤالات رو بشکونیم (از اون طرف هم البته حواسمون بوده که سؤال خارج کنکور ندیم) و مدل جدیدی از فکرکردن و حل مسئله رو بهتون ارائه بدیم!

به جرأت می‌تونم بگم این کتاب تا سال ۱۴۰۱، ایده‌های کنکور و ایده‌هایی که هنوز توی کنکور مطرح نشده رو پوشش می‌ده! البته به همین دلیل هم هست که سطح کتاب بالا رفته و احتمالاً خیلی از سؤالاتش رو بلد نباشید، اما بیشتر از این‌که اهمیت بدین مثلاً درس ۲ نظریه اعداد رو چند درصد زدین، سعی کنید ایده‌ها رو یاد بگیرید و سؤالاتی که بلد نیستید رو حتماً از روی پاسخ‌نامه بخونید! البته سؤالاتی که بلد هستید رو هم از روی پاسخ‌نامه بخونید چون ممکنه نکته یا روشی گفته باشیم که سؤال با اون خیلی راحت‌تر حل می‌شه.

آخر کتاب هم یه قسمت تحت عنوان تثبیت ایده‌ها برای هر فصل داریم که سؤالات تألیفی و کنکورهای اخیر رو توی سه سطح ساده، متوسط و سخت طبقه‌بندی کردیم و البته سؤالاتی که سطح به هم ریخته هستند و خودتون باید تشخیص بدین که هر سؤال مربوط به کدوم بخشه!

آخر کار هم تشکر می‌کنم اول از همه از عطا صادقی عزیز و خیلی خوشحالم که افتخار داشتم این کتابو با هم بنویسیم؛ تشکر می‌کنم از ایمان سلیمان‌زاده، لولوا مرادی، بچه‌های خوب گروه آموزشی لاپلاس، سیدعلی محمد میردامادی، جواد ترک‌ترابی، علیرضا قنادیان، دکتر غلامرضا طالبی و ... که حضورشون برای تألیف کتاب الزامی بود.

اگر پیشنهاد، انتقاد یا ... در مورد این کتاب داشتید به آیدی @masood2000 یا masoudshafiei2000@gmail.com پیام بدین.

دوستون دارم! موفق باشید.

...فهرست...

۷	فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد
۸	درس اول: استدلال ریاضی
۱۵	درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح
۴۲	درس سوم: همنهشتی در اعداد صحیح و کاربردها
۷۲	فصل دوم: گراف و مدل سازی
۷۳	درس اول: معرفی گراف
۱۰۷	درس دوم: مدل سازی با گراف
۱۲۶	فصل سوم: ترکیبیات
۱۲۷	درس اول: شمارش بدون شمردن
۱۴۲	درس دوم: مباحثی در ترکیبیات
۱۶۲	درس سوم: روش هایی برای شمارش
۱۷۶	فصل چهارم: آشنایی با مبانی ریاضیات
۱۷۷	درس اول: آشنایی با منطق ریاضی
۱۹۱	درس دوم: مجموعه ها
۲۱۰	فصل پنجم: احتمال
۲۱۱	درس اول: مبانی احتمال
۲۲۵	درس دوم: احتمال غیرهم شانس
۲۲۹	درس سوم: احتمال شرطی
۲۴۴	درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته
۲۵۰	فصل ششم: آمار توصیفی و استنباطی
۲۵۱	درس اول: توصیف و نمایش داده ها
۲۵۹	درس دوم: شاخص های گرایش به مرکز
۲۷۰	درس سوم: شاخص های پراکندگی
۲۸۱	درس چهارم: روش های جمع آوری اطلاعات
۲۸۹	درس پنجم: برآورد
۲۹۸	سؤالات تثبیت ایده ها ^۱



۱- پاسخنامه تشریحی تثبیت ایده ها و پاسخنامه کلیدی را از طریق اسکن QR code مقابل می توانید مشاهده نمایید.

درس دو

بخش پذیری در اعداد صحیح

با مفهوم بخش پذیری در اعداد صحیح همگی کم و بیش آشنا هستیم. برای مثال ۴ بر ۲ بخش پذیر است، چون کسر $\frac{4}{2} = 2$ عددی صحیح است ولی ۴ بر ۳ بخش پذیر نیست چون $\frac{4}{3}$ عددی صحیح نیست. بنابراین یک جورهایی می توان گفت اگر $\frac{a}{b} = q$ عددی صحیح شود (a و b اعداد صحیح و $b \neq 0$ است)، a بر b بخش پذیر است. گفتیم یک جورهایی، چون دانشمندان! در تعریف بخش پذیری به دلایلی که کمی جلوتر به شما خواهیم گفت، تصمیم گرفته اند این کسر را طرفین وسطین شده بیاورند!

حواستون باشه! عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش پذیر می گویند، اگر عدد صحیحی مثل q پیدا شود به طوری که: $a = bq$

تست چند عدد دورقمی وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشد؟

۲۱ (۴)

۲۴ (۳)

۲۳ (۲)

۲۲ (۱)

پاسخ گزینه «۱» دیدیم که اگر a بر b بخش پذیر باشد، $a = bq$ است. بنابراین اگر x بر ۴ بخش پذیر باشد، می توان نوشت: $x = 4q$

$$10 \leq x \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 4q \leq 99 \Rightarrow 2/5 \leq q \leq 24/75$$

می خواهیم عدد دورقمی باشد، بنابراین:

$$24 - 3 + 1 = 22$$

پس q از ۳ تا ۲۴ می تواند باشد:

نکته

۱ حتماً یادتان هست که تعداد عددهای طبیعی بزرگتر مساوی a و کوچکتر مساوی b برابر است با:

۲ تعداد مضارب طبیعی عدد a که کوچکتر مساوی n باشد، برابر است با:

این نکته دوم یعنی این که اگر برای مثال بخواهیم پیدا کنیم چند عدد طبیعی کوچکتر مساوی ۲۰۰ وجود دارد که بر ۵ بخش پذیر باشد، به جای محاسبه ای که در سؤال قبل انجام دادیم، می توانیم خیلی راحت بنویسیم:

تست چند عدد از مجموعه $\{232, 233, \dots, 234, 235\}$ بر ۶ بخش پذیر است؟

۴۰ (۴)

۳۹ (۳)

۳۸ (۲)

۳۷ (۱)

پاسخ گزینه «۲» اول مضارب ۶ که کوچکتر مساوی عدد ۴۳۲ است را پیدا می کنیم:

$$\left[\frac{432}{6} \right] = 72$$

اساساً مضارب ۶ را در فاصله $\{232, 233, \dots, 234, 235\}$ می خواهیم ولی مضارب ۶ را در فاصله $\{1, 2, \dots, 432\}$ پیدا کرده ایم. پس یک سری مضارب ۶ را زیاد حساب کرده ایم که باید آن ها را پیدا کرده و کم کنیم:

$$\left[\frac{233}{6} \right] = 38 \Rightarrow 72 - 38 = 34$$

عادکردن

برعکس رابطه بخش پذیری ما یک رابطه ای داریم به نام عادکردن:

حواستون باشه! ۱ اگر $a = bq$ آن گاه b عاد می کند a را (یا این که b می شمارد a را).

$$a = b.q \Leftrightarrow b | a$$

۲ از رابطه $a = bq$ دو نتیجه می توان گرفت:

$$a = bq \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ بر } b \text{ بخش پذیر است.} \\ a \text{ عاد می کند } b \text{ را} \end{cases}$$

دقت کنید هرگاه ضرب چند عدد برابر عددی دیگر شود، هر کدام از آن چند عدد، عدد دیگر را عاد می‌کند. برای مثال:

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 \mid 30 & 6 \mid 30 \\ 3 \mid 30 & 10 \mid 30 \\ 5 \mid 30 & 15 \mid 30 \end{cases}$$

تست - اگر $a^6 - b = 1$ باشد، کدام گزینه همواره درست نیست؟

(۱) $a^2 - 1 \mid b$ (۲) $a^2 + 1 \mid b$ (۳) $a^2 - a + 1 \mid b$ (۴) $a^2 + a + 1 \mid b$

پاسخ - گزینه «۲» روش اول:

$$a^6 - b = 1 \Rightarrow a^6 - 1 = b \Rightarrow (a^2 - 1)(a^2 + 1) = b \Rightarrow (a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1) = b$$

وقتی ضرب دو یا چند عدد برابر عددی مثل b شود، همه آن عددها b را عاد می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست است ولی گزینه (۲) لزوماً درست نیست.

روش دوم: سعی می‌کنیم مقادیری برای a و b پیدا کنیم تا شرط سؤال برقرار شود.

اگر $a = 2$ و $b = 63$ باشد، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $a^2 - 1 \mid b \Rightarrow 3 \mid 63 \checkmark$

۲ $a^2 + 1 \mid b \Rightarrow 5 \nmid 63 \times$

۳ $a^2 - a + 1 \mid b \Rightarrow 3 \mid 63 \checkmark$

۴ $a^2 + a + 1 \mid b \Rightarrow 7 \mid 63 \checkmark$

چند تا نکته مهم دربارهٔ عادکردن

۱ برای تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطهٔ عادکردن کافی است آن را 90° درجه خلاف عقربه‌های ساعت بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود. اگر حاصل کسر عدد صحیحی شد، رابطه درست است وگرنه رابطه نادرست است. برای مثال:

رابطه نادرست است. $5 \mid 15 \xrightarrow{90^\circ} \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \times$

رابطه درست است. $8 \mid 16 \xrightarrow{90^\circ} \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

۲ اگر a عددی صحیح باشد و $a \mid x$ آن‌گاه x مقسوم‌علیه a است.

برای مثال اگر $6 \mid x$ آن‌گاه x می‌تواند هر یک از مقسوم‌علیه‌های ۶ یعنی عددهای $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ باشد.

۳ اگر a عددی صحیح باشد و $a \mid x$ آن‌گاه x مضرب a است.

برای مثال اگر $8 \mid x$ آن‌گاه x می‌تواند هر یک از عددهای مقابل باشد:

$$0, \pm 8, \pm 16, \pm 24, \dots$$

تست - چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ و مضرب ۲۴ باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

$x \mid 1200$ (I)

پاسخ - گزینه «۲» دنبال x هایی هستیم که مقسوم‌علیه ۱۲۰۰ باشند، این یعنی:

$24 \mid x$ (II)

هم‌چنین می‌خواهیم x مضرب ۲۴ باشد، یعنی:

ابتدا رابطه (II) را به تساوی تبدیل می‌کنیم بعد در رابطه (I) قرار می‌دهیم: $24 \mid x \Rightarrow x = 24q \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (I)}} 24q \mid 1200$

حالا اگر بخواهیم این رابطه برقرار باشد، باید کسر $\frac{1200}{24q}$ عددی صحیح شود. این کسر را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1200}{24q} = \frac{50}{q}$$

بنابراین q باید مقسوم‌علیه ۵۰ باشد. مقادیر طبیعی قابل قبول این‌ها هستند:

$$q = 1, 2, 5, 10, 25, 50$$

تست - اگر $1001 \mid n!$ و $1024 \mid m!$ کم‌ترین مقدار $m + n$ کدام است؟

(۱) ۲۳ (۲) ۲۵ (۳) ۲۹ (۴) ۲۰۲۵

$1001 = 7 \times 11 \times 13$

$1024 = 2^{10}$

پاسخ - گزینه «۲» عددها را تجزیه می‌کنیم:

چون $1001 \mid n!$ پس کسر $\frac{n!}{7 \times 11 \times 13}$ باید عددی صحیح باشد. کوچک‌ترین عدد فاکتوریلی که هر سه عامل ۱۳، ۱۱، ۷ را دارد همان $13!$ است. پس $n = 13$.



همچنین می‌خواهیم کسر $\frac{m!}{p_1}$ عددی صحیح شود، پس m باید 10 تا عامل 2 داشته باشد. شروع می‌کنیم می‌رویم جلو تا پیدا کنیم اولین عدد فاکتوریلی که 10 عامل 2 دارد چه عددی است:

عدد	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$	$2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$	$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$	$2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$	$2^5 \times 3^4 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13$	$2^6 \times 3^5 \times 5^4 \times 7 \times 11 \times 13$
تعداد عوامل 2	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(2)

$$\min(m+n) = 12+13 = 25$$

همان‌طور که می‌بینید کوچک‌ترین مقدار m برابر 12 است؛ بنابراین:

چند ویژگی ابتدایی از بخش‌پذیری

$$a \mid \pm a$$

$$\pm 1 \mid a$$

$$a \mid 0$$

$$0 \nmid a, a \neq 0$$

$$0 \mid 0$$

۱ هر عددی بر خودش و قرینه‌اش بخش‌پذیر است:

۲ هر عددی بر 1 و -1 بخش‌پذیر است:

۳ صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است:

(پون آگه تبدیلش کنی به کسر می‌شه $\frac{0}{a} = 0$ که عددی صفریه!)

۴ هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش‌پذیر نیست:

(این هم واضحه ریگه. آگه تبدیل به کسرش کنی قبلی بد می‌شه! $\frac{a}{0}$)

۵ صفر بر خودش بخش‌پذیر است!

این را ممکن است به کسرش فکر کنید و بگویید نمی‌شود که!

اما اول درس یادتان هست گفتیم که دانشمندان به دلایلی تصمیم گرفته‌اند فرمول رابطهٔ عاقد کردن را طرفین وسطین شده بدهند. دلیلش

$$a \mid b \Leftrightarrow b = aq$$

همین‌هاست. چون دیدیم که:

$$0 \mid 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \times q$$

تست - کدام یک از رابطه‌های زیر فقط به ازای یک مقدار صحیح a برقرار است؟

$$0 \mid a^2 - a - 2 \quad (4)$$

$$0 \mid a^2 + a - 2 \quad (3)$$

$$0 \mid 2a^2 + a - 1 \quad (2)$$

$$0 \mid 2a^2 - a + 1 \quad (1)$$

پاسخ - گزینهٔ «۳» دیدیم که تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است خود صفر است پس باید دنبال معادله‌ای بگردیم که یک جواب صحیح داشته باشد.

۱ همواره مثبت است. جواب ندارد. $\Rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow 2a^2 - a + 1 \Rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

۲ یک جواب دارد. $\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$ غلط

۳ دو جواب دارد. $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

۴ دو جواب دارد. $\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$

نکته

این دو نکته خارج از کتاب است اما حتماً باید بلد باشید. (پون توکلور می‌دار!)

۱ تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد: برای پیدا کردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n اول آن را به عوامل اولش تجزیه می‌کنیم:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

سپس از رابطهٔ مقابل تعداد مقسوم‌علیه‌ها را پیدا می‌کنیم: $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ = تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد n

۲ توان عدد اول p در تجزیهٔ $n!$: برای پیدا کردن تعداد عوامل عدد اول p در تجزیهٔ $n!$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \cdots$$



تست - عدد ۱۸۰۰ چند مقسوم علیه طبیعی و چند مقسوم علیه مربع کامل دارد؟

۱) ۱۸ - ۸

۲) ۱۸ - ۴

۳) ۳۶ - ۸

۴) ۳۶ - ۴

پاسخ - گزینه «۳»

اول عدد را تجزیه می کنیم تا ببینیم چه خبر است:

$$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$36 = (2+1)(2+1)(2+1) = (3+1)(2+1)(2+1)$$

طبق آن چه گفتیم تعداد مقسوم علیه های طبیعی آن برابر است با:

حالا بررسی می کنیم چند تا از این مقسوم علیه ها مربع کامل است.

فرض کنید x مقسوم علیه ۱۸۰۰ باشد، این یعنی این که کسر $\frac{1800}{x}$ عددی صحیح است. (مفهوم مقسوم علیه همیشه دریگه!) حالا اگر x بخواید مربع کامل هم باشد، باید توان تمام عوامل آن زوج باشد.

از طرفی واضح است که x فقط می تواند عوامل ۲، ۳ و ۵ داشته باشد. (وگرنه کسر ساده نمی شه.)

$$\frac{1800}{x} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 5^2}{2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma}$$

پس ما دوتا شرط داریم. اول این که توان عوامل صورت بزرگتر مساوی توان عوامل مخرج باشد و دوم این که α ، β و γ هر سه زوج باشند.

پس هر کدام از α ، β و γ دو حالت می توانند داشته باشند، یا صفر باشند یا ۲. بنابراین:

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \\ 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ 2 \quad 2 \quad 2$$

(برای مثال اگر $\alpha = 2$ ، $\beta = 0$ و $\gamma = 2$ باشد، مقسوم علیه ما می شه $2^2 \times 3^0 \times 5^2 = 100$ که همین جور که می بینید، مربع کامله)

تست - بزرگ ترین مقدار n از رابطه $100! \mid 8^n$ کدام است؟

۱) ۱۳

۲) ۱۶

۳) ۳۲

۴) ۳۳

پاسخ - گزینه «۳»

اول از رابطه ای که گفتیم توان عدد ۲ را در تجزیه $100!$ پیدا می کنیم:

$$\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right]$$

یک چیزی هم خوب است یادتان بدهیم. یک کار راحت تر این است که عدد را همین طور به ۲ تقسیم کنیم و بعد خارج قسمت ها را با هم جمع کنیم:

$$100 \begin{array}{l} \downarrow 2 \\ 50 \end{array} \begin{array}{l} \downarrow 2 \\ 25 \end{array} \begin{array}{l} \downarrow 2 \\ 12 \end{array} \begin{array}{l} \downarrow 2 \\ 6 \end{array} \begin{array}{l} \downarrow 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} \downarrow 2 \\ 1 \end{array} \Rightarrow 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

(هواستون باشه این فرموله مال اعداد اوله. یه وقت تو مفرج ۸ قرار ندین!)

$$\frac{100!}{8^n} = \frac{2^{97} \times \dots}{2^{3n}}$$

خب الان فهمیدیم در تجزیه $100!$ توان عدد دو، ۹۷ است. حالا اگر قرار باشد $8^n \mid 100!$ داریم:

این کسر باید عددی صحیح باشد بنابراین توان ۲ در صورت باید بزرگتر مساوی توان ۲ در مخرج باشد، بنابراین: $3n \leq 97 \Rightarrow n_{\max} = 32$

ویژگی های تکمیلی رابطه عا دکردن

یک رابطه عا دکردنی مثل $a \mid b$ را در نظر بگیرید. در این بخش می خواهیم بررسی کنیم از این $a \mid b$ چه نتایجی می شود گرفت و چه کارهایی با آن می شود کرد.

$$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} ma \mid mb \\ a^n \mid b^n \end{cases}$$

۱

طرفین یک رابطه عا دکردن را می شود در هر عددی مثل m ضرب کرد یا به توان رساند.

(واضحه دریگه وقتی $a \mid b$ یعنی کسر $\frac{b}{a}$ عدد صحیح و وقتی یه کسر عدد صحیح باشه وقتی صورت و مفرش رو در یه عدد ضرب کنیم باز هم عدد صحیح و وقتی هم به توان n برسو نیمش باز هم عدد صحیح.)

$$2 \mid 4 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 3} 6 \mid 12 \quad \checkmark$$

$$2 \mid 4 \xrightarrow{\text{به توان } 3} 8 \mid 64 \quad \checkmark$$

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$$

۲

این خیلی رابطه مهمی است و به زودی می بینید چه قدر کاربرد دارد. دلیلش هم خیلی واضح است. وقتی $a \mid b$ یعنی این که ما دایم $\frac{b}{a}$ عددی صحیح است و وقتی یک کسر عددی صحیح باشد، صورت کسر را در هر عدد صحیحی ضرب کنیم، باز هم حاصل عددی صحیح است.

$$2 \mid 4 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} 2 \mid 12$$

پس یادتان باشد سمت راست رابطه عا دکردن را می شود در هر عدد صحیحی ضرب کرد.

$$c \mid b \Rightarrow c \text{ مقسوم علیه } a \text{ باشد (یعنی } a \mid c) \text{ و } a \mid b$$

۳

این هم درکش ساده است. $a \mid b$ یعنی b بر a بخش پذیر است. c مقسوم علیه a است، یعنی a بر c بخش پذیر است. بنابراین مشخص است b بر c هم بخش پذیر است. این یعنی این که اگر یک رابطه عادی را دیدید می توانید سمت چپش را به هر کدام از مقسوم علیه هایش تقسیم کنید.

$$۱۸ \mid ۳۶ \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۳}} ۶ \mid ۱۲$$

$$ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$$

$$a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|, b \neq 0$$

$$۲ \mid -۴ \Rightarrow |۲| \leq |-۴| \quad \text{باید قدرمطلق صورت از قدرمطلق مخرج بزرگتر یا مساوی آن باشد.}$$

۴ این رابطه را این جوری هم می توان گفت:

۵

تست - اگر $۲a \mid ۳b$ کدام نتیجه گیری ممکن است درست نباشد؟

$$a \mid (۴)$$

$$a \mid ۶b \quad (۳)$$

$$۲a \mid ۳b^۲ \quad (۲)$$

$$a \mid ۳b \quad (۱)$$

$$۲a \mid ۳b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a \mid ۳b \quad \checkmark$$

پاسخ - گزینه «۴» در ۱ سمت چپ را تقسیم بر ۲ کرده ایم:

$$۲a \mid ۳b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times b} ۲a \mid ۳b^۲ \quad \checkmark$$

در ۲ سمت راست را در b ضرب کرده ایم:

در ۳ سمت راست را در ۲ ضرب و قسمت چپ را بر ۲ تقسیم کرده ایم:

$$۲a \mid ۳b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۲}} a \mid ۳b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times ۲} a \mid ۶b \quad \checkmark$$

اما ۴ ممکن است درست نباشد برای مثال به ازای $a = ۳$ و $b = ۲$ رابطه صورت سؤال برقرار است اما: $۳ \nmid ۲$

تست - اگر $۲b \mid a^۲$ آن گاه رابطه $a \mid ۲$ و رابطه $a \mid b$

(۱) درست است - درست است

(۴) درست است - ممکن است درست نباشد

(۳) ممکن است درست نباشد - ممکن است درست نباشد

پاسخ - گزینه «۲» این که از $۲b \mid a^۲$ نمی توانیم همواره نتیجه بگیریم که $a \mid ۲$ واضح است، چون برای مثال کافی است $a = ۳$ و $b = ۱۸$ باشد.

اما تشخیص درستی یا نادرستی رابطه دوم احتیاج به دقت بیشتری دارد. به کسر $\frac{۲b}{a^۲}$ توجه کنید، این دوتا a در مخرج باید ساده شود. اگر a فرد باشد، واضح است که $a^۲$ با ۲ ساده نمی شود و در نتیجه b باید بر $a^۲$ بخش پذیر باشد پس b بر a هم بخش پذیر است.

$$\frac{۲b}{a^۲} = \frac{۲b}{۴k^۲} = \frac{b}{۲k^۲} = \frac{b}{(۲k) \times k}$$

اما فرض کنید a زوج باشد، در این صورت $a = ۲k$ در این صورت:

می دانیم این کسر عددی صحیح است؛ بنابراین b باید یک جوری باشد که $۲k^۲$ در مخرج ساده شود. یعنی b هم باید بر ۲ بخش پذیر باشد و هم بر k و بنابراین باز هم بر a بخش پذیر است.

تست - اگر $a^۷ \mid b^۵$ کدام گزینه همواره درست است؟

$$a^{۱۰} \mid b^۷ \quad (۴)$$

$$a^۴ \mid b^۳ \quad (۳)$$

$$a^۳ \mid b^۲ \quad (۲)$$

$$a^۲ \mid b \quad (۱)$$

پاسخ - گزینه «۳» یک راه برای پاسخ دادن این مدل سؤال ها پیدا کردن مثال نقض برای رد کردن گزینه هاست. برای این کار باید تلاش کنیم a و b را جوری در نظر بگیریم که دو طرف رابطه صورت سؤال برابر شود. یعنی الان می خواهیم $a^۷ = b^۵$ شود. اگر $a = b = ۱$ باشد، دو طرف برابر می شوند ولی این مثال نقض به دردمان نمی خورد چون به ازای آن هر ۴ گزینه درست می شود. پس باید یک مثال دیگر پیدا کنیم. کوچک ترین مقادیر a و b که دو طرف را برابر می کند $a = ۲^۵$ و $b = ۲^۷$ است. (دقت کنید توان این رو داریم به اون، توان اون رو داریم به این!) در این صورت $(۲^۷)^۵ = (۲^۵)^۷$ و رابطه $a^۷ \mid b^۵$ به صورت $۲^{۳۵} \mid ۲^{۳۵}$ درمی آید که درست است. حالا اگر با همین عددها گزینه ها را بررسی کنیم داریم:

$$۱ \quad a^۲ \mid b \Rightarrow (۲^۵)^۲ \mid ۲^۷ \Rightarrow ۲^{۱۰} \mid ۲^۷ \quad \times$$

$$۲ \quad a^۳ \mid b^۲ \Rightarrow (۲^۵)^۳ \mid (۲^۷)^۲ \Rightarrow ۲^{۱۵} \mid ۲^{۱۴} \quad \times$$

$$۳ \quad a^۴ \mid b^۳ \Rightarrow (۲^۵)^۴ \mid (۲^۷)^۳ \Rightarrow ۲^{۲۰} \mid ۲^{۲۱} \quad \checkmark$$

$$۴ \quad a^{۱۰} \mid b^۷ \Rightarrow (۲^۵)^{۱۰} \mid (۲^۷)^۷ \Rightarrow ۲^{۵۰} \mid ۲^{۴۹} \quad \times$$

حواستان باشد که اثبات تشریحی این نوع سؤال ها ساده نیست.

برای مثال اگر بخواهیم از درستی $a^۷ \mid b^۵$ به درستی $a^۴ \mid b^۳$ برسیم باید این کار را بکنیم:

$$a^۷ \mid b^۵ \xrightarrow{\text{به توان ۴}} a^{۲۸} \mid b^{۲۰} \xrightarrow{\text{سمت راست } \times b} a^{۲۸} \mid b^{۲۱} \xrightarrow{\text{ریشه هفتم می گیریم}} a^۴ \mid b^۳$$

نکته اگر بخواهیم رابطه $a^p \mid b^q \Rightarrow a^m \mid b^n$ درست باشد، باید $np \leq mq$ باشد.

برای درک بهتر:

$$a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q \Rightarrow \text{نزدیک} \times \text{نزدیک} \leq \text{دور} \times \text{دور}$$

یک ویژگی مهم دیگر از بخش پذیری

$$a \mid b \Rightarrow \begin{cases} a \mid b+c \\ a \mid b-c \\ a \mid bc \\ a \mid mb \pm nc \end{cases}$$

این ویژگی خیلی کاربرد دارد و برای مثال در بخش بعد که معادله‌های عادکردنی است، کاربردهایش را می‌بینید.

یعنی اگر عددی مثل a هر دو عدد b و c را عاد کند، a هر مضربی از b به علاوه یا منهای هر مضربی از c را عاد می‌کند. خوب است این یکی را برایتان اثبات کنیم تا با اثبات این نوع رابطه‌ها آشنا شوید:

$$\left. \begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \mid mb + nc$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times m} mb = maq \\ a \mid c \Rightarrow c = aq' \xrightarrow{\times n} nc = naq' \end{array} \right. \xrightarrow{\oplus} mb + nc = maq + naq' = a(mq + nq')$$

$$\Rightarrow mb + nc = aq'' \Rightarrow a \mid mb + nc$$

تست - مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که هر دو عدد $6n+5$ و $7n+3$ بر آن بخش پذیرند، کدام است؟

$$10 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

پاسخ - گزینه «۳» عدد a می‌نامیم. هر دو عدد $6n+5$ و $7n+3$ بر a بخش پذیرند، بنابراین:

$$\begin{aligned} a \mid 7n+3 &\xrightarrow{\times 6 \text{ سمت راست}} a \mid 42n+18 \\ a \mid 6n+5 &\xrightarrow{\times 7 \text{ سمت راست}} a \mid 42n+35 \end{aligned} \xrightarrow{(-)} a \mid 17$$

در این مدل سؤال‌ها باید با ضرب کردن سمت راست‌ها، متغیر را حذف کنیم. پس بزرگ‌ترین مقدار a برابر ۱۷ است که مجموع ارقام آن برابر $7+1=8$ است.

تست - از رابطه $7 \mid 53m-11$ کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$$7 \mid m+2 \quad (4)$$

$$7 \mid m+1 \quad (3)$$

$$7 \mid m-2 \quad (2)$$

$$7 \mid m-1 \quad (1)$$

پاسخ - گزینه «۱» با توجه به گزینه‌ها باید از شرط ضرب m یعنی 53 و -11 راحت شویم. از ویژگی‌های عادکردن استفاده می‌کنیم.

سعی می‌کنیم دوروبر عدد 53 و -11 مضرب 7 پیدا کنیم:

$$7 \mid 49 \Rightarrow \begin{aligned} &7 \mid 49m \\ &\xrightarrow{(-)} 7 \mid 4m-11 \end{aligned}$$

$$7 \mid 53m-11 \text{ از طرفی}$$

دیدیم وقتی سمت چپ در رابطه عادکردن یکسان است می‌توانیم سمت راست‌ها را از هم کم کنیم. حالا می‌رویم سراغ -11 . داریم:

$$\begin{aligned} 7 \mid 4m-11 &\xrightarrow{\oplus} 7 \mid 4m-4 \Rightarrow 7 \mid 4(m-1) \\ 7 \mid 7 &\end{aligned}$$

اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{4(m-1)}{7}$ درمی‌آید. این یعنی $4(m-1)$ بر 7 بخش پذیر است و چون 4 نمی‌تواند بر 7 بخش پذیر باشد، پس $m-1$ باید بر 7 بخش پذیر باشد و در نتیجه:

یک ویژگی دیگر این است که از $a \mid b$ و $c \mid d$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $ac \mid bd$.

تست - اگر $3m+1$ بر 5 و $9m+1$ بر 7 بخش پذیر باشد، کدام یک از عبارات زیر بر 35 بخش پذیر است؟

$$8m^2-12m-1 \quad (4)$$

$$8m^2+12m-1 \quad (3)$$

$$8m^2-12m+1 \quad (2)$$

$$8m^2+12m+1 \quad (1)$$

پاسخ - گزینه «۴» همان‌طور که در بالا گفتیم اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ باشند، می‌توانیم طرفین این دو رابطه را در هم ضرب کنیم:

$$\left. \begin{matrix} a \mid b \\ c \mid d \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac \mid bd$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} 5 \mid 3m+1 &\xrightarrow{\times} 35 \mid (3m+1)(9m+1) \Rightarrow 35 \mid 27m^2+12m+1 \\ 7 \mid 9m+1 &\end{aligned}$$

اما در هیچ کدام از گزینه‌ها ضریب m^2 برابر ۲۷ نیست؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} 35 \mid 27m^2+12m+1 &\xrightarrow{(-)} 35 \mid 8m^2-12m-1 \\ 35 \mid 35m^2 &\end{aligned}$$

تست - اگر $۱۱n - ۱ \mid ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n + a$ و a کوچک ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۳۵ (۴)

۲۵ (۳)

۱۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ - گزینه «۴» روش اول: این مدل سؤال‌ها در تمرین‌های کتاب درسی آمده و یک مقدار سخت است. فکر کردم بد نیست یک نمونه این‌جا برایتان حل کنیم:

$$\begin{array}{l} ۱۱n - ۱ \mid ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n - ۱ \quad (I) \\ ۶ \mid ۶n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ۱۱n - ۱ \mid ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n - ۱ \quad (II) \\ ۶ \mid ۱۲n \end{array}$$

با ضرب کردن دو رابطه (I) و (II) در هم داریم:
پس $۵n^2 + ۴n - ۱$ بر ۳۶ بخش پذیر است اما مشکل این‌جاست که -۱ طبیعی نیست؛ بنابراین:

$$\begin{array}{l} ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n - ۱ \xrightarrow{(+)} ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n + ۳۵ \\ ۳۶ \mid ۳۶ \end{array}$$

پس کوچک ترین مقدار a برابر ۳۵ است.

روش دوم: یک عدد کوچک n پیدا می‌کنیم که رابطه $۱۱n - ۱ \mid ۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n + a$ به ازای آن برقرار باشد. با کمی دقت متوجه می‌شویم به ازای $n = -۱$ رابطه برقرار است. حالا اگر در رابطه $۳۶ \mid ۵n^2 + ۴n + a$ به جای n عدد -۱ را قرار دهیم، داریم:
مشخص است که کوچک ترین مقدار طبیعی a برابر ۳۵ است.

معادله‌های عادکردنی

یک مدل بسیار پرتکرار در سؤال‌های بخش پذیری سؤال‌هایی مثل این است:

«به ازای چند عدد صحیح رابطه $۵x + ۱ \mid x - ۲$ برقرار است؟»

این مدل سؤال‌ها را معادله‌های عادکردنی می‌نامیم. (پهن به پای تساوی علامت عادکردن داریم!)

روش اصلی پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها ضرب کردن سمت راست رابطه در یک عدد و یکسان کردن ضریب‌هاست. الان بیشتر توضیح می‌دهیم منظورمان چیست. بیایید همین سؤال بالا را با هم حل کنیم:

۱ می‌دانیم هر عددی خودش را عاد می‌کند. پس عبارت سمت چپ هم خودش را می‌شمارد.

۲ از طرفی دیدیم که می‌توانیم سمت راست هر عبارت عادکردنی را در هر عدد صحیحی که بخواهیم ضرب کنیم. سمت راست این رابطه را در ۵ ضرب می‌کنیم. چرا در ۵ ؟ صورت سؤال را ببینید، ضریب x در عبارت $۵x + ۱$ عدد ۵ است. به همین خاطر این را هم در ۵ ضرب می‌کنیم تا بعداً ضریب‌ها ساده شود:

$$x - ۲ \mid x - ۲ \xrightarrow{۵ \times \text{سمت راست}} x - ۲ \mid ۵x - ۱۰$$

۳ حالا از رابطه $a \mid b \Rightarrow a \mid b - c$ استفاده می‌کنیم و ضریب x را حذف می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} x - ۲ \mid ۵x - ۱۰ \xrightarrow{(-)} x - ۲ \mid ۱۱ \\ \underbrace{x - ۲ \mid ۵x + ۱}_{\text{رابطه صورت سؤال}} \end{array}$$

۴ حالا که سمت راست یک عدد ثابت است، عبارت سمت چپ (عبارت x دار) می‌تواند هر کدام از مقسوم‌علیه‌های آن عدد ثابت باشد:

$$x - ۲ \mid ۱۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \\ x - ۲ = ۱۱ \Rightarrow x = ۱۳ \\ x - ۲ = -۱۱ \Rightarrow x = -۹ \end{cases}$$

تست - مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که در رابطه $۹x + ۷ \mid ۵x - ۲$ صدق می‌کند، کدام است؟

۴ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ - گزینه «۱»

$$۵x - ۲ \mid ۵x - ۲ \xrightarrow{۹ \times \text{سمت راست}} ۵x - ۲ \mid ۴۵x - ۱۸ \Rightarrow ۵x - ۲ \mid ۵۳ \Rightarrow ۵x - ۲ = ۵۳$$

$$۵x - ۲ \mid ۹x + ۷ \xrightarrow{۵ \times \text{سمت راست}} ۵x - ۲ \mid ۴۵x + ۳۵$$

$$\Rightarrow ۵x = ۵۵ \Rightarrow x = ۱۱ \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} ۱ + ۱ = ۲$$

چون بزرگ ترین عدد را خواسته، خود ۵۳ را در نظر گرفتیم.

تست به ازای چند عدد صحیح رابطه $yx + 8 = x^2 + 3y$ برقرار است؟

(۴) بیشتر از ۲

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

پاسخ گزینه «۳» ابتدا رابطه را مرتب می‌کنیم:

$$yx + 8 = x^2 + 3y \Rightarrow yx - 3y = x^2 - 8 \Rightarrow y(x - 3) = x^2 - 8 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 8}{x - 3}$$

حالا اگر قرار باشد y عددی صحیح باشد، باید کسر $\frac{x^2 - 8}{x - 3}$ عددی صحیح باشد؛ یعنی صورت آن بر مخرجش بخش پذیر باشد یا به بیان دیگر $x - 3 \mid x^2 - 8$.

$$x - 3 \mid x^2 - 8 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times (x+3)} \left. \begin{array}{l} x - 3 \mid x^2 - 9 \\ x - 3 \mid x^2 - 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} x - 3 \mid 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 8 \\ x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

نکته تستی

یک راه ساده‌تر برای پاسخ‌دادن به این سؤال‌ها این است که اگر عبارت سمت چپ ریشه داشت، ریشه آن را در عبارت سمت راست قرار دهیم تا به یک عدد ثابت برسیم. عبارت سمت چپ آن عدد ثابت را می‌شمارد.

برای مثال در مثالی که حل کردیم یعنی $x - 2 \mid 5x + 1$ اگر $x - 2 = 0$ باشد، $x = 2$ است که اگر آن را در عبارت $5x + 1$ قرار دهیم می‌شود $11 = 5 \times 2 + 1$ و عبارت سمت چپ یعنی $x - 2$ عاد می‌کند ۱۱ را و سؤال خیلی ساده‌تر حل می‌شود یا در این تست آخر داشتیم:

$$\begin{aligned} x - 3 \mid x^2 - 8 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } x^2 - 8} 9 - 8 = 1 \\ \Rightarrow x - 3 \mid 1 \end{aligned}$$

حواستون باشه! حتی اگر عبارت سمت چپ ریشه صحیح نداشت، باز هم می‌شود از نکته قبلی سؤال را حل کرد. کافی است ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم و عبارت را ساده کنیم، در این صورت عبارت سمت چپ صورت کسر عبارت سمت راست را عاد می‌کند.

برای مثال به تست اولی که حل کردیم نگاه کنید:

$$\begin{aligned} 5x - 2 \mid 9x + 7 \\ 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \\ 9x + 7 \xrightarrow{x = \frac{2}{5}} 9 \times \frac{2}{5} + 7 = \frac{18}{5} + 7 = \frac{18 + 35}{5} = \frac{53}{5} \\ 5x - 2 \mid 53 \end{aligned}$$

ریشه را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم و مخرج مشترک می‌گیریم:

حالا عبارت سمت چپ صورت کسر را عاد می‌کند:

اما گاهی اوقات این معادله‌های عادکردنی از روش‌های معمول حل نمی‌شوند.

تست به ازای چند عدد صحیح n رابطه $n^2 - 1 \mid 2^n - 1$ برقرار است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

پاسخ گزینه «۳» می‌دانیم به ازای n های بزرگ، رشد $2^n - 1$ از رشد $n^2 - 1$ بیشتر است؛ یعنی اگر کسر $\frac{n^2 - 1}{2^n - 1}$ را در نظر بگیریم، از یک جایی به بعد مخرج کسر از صورت کسر بزرگ‌تر می‌شود و رابطه دیگر برقرار نیست. پس فقط در n های کوچک رابطه برقرار است.

$$n = 1 \Rightarrow \frac{0}{1} = 0 \quad \checkmark \qquad n = 2 \Rightarrow \frac{3}{3} = 1 \quad \checkmark \qquad n = 3 \Rightarrow \frac{8}{7} \times$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{15}{15} = 1 \quad \checkmark$$

$$n = -1 \Rightarrow \frac{0}{-1} = 0$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{24}{31} \times$$

غیر قابل قبول؛ چون بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ تعریف می‌شود. پس برای اعداد صحیح منفی رابطه برقرار نیست.

و از $n \geq 5$ مخرج از صورت بیشتر می‌شود.

باقی‌مانده مربع عدد فرد در تقسیم به ۸

در درس قبل دیدیم که اگر x عددی فرد باشد، مربع آن را می‌توان به صورت $8k+1$ نوشت. از این ایده سؤال‌هایی در این بخش می‌آید که بد نیست با آن‌ها آشنا شویم.

$$x = 2q + 1 \Rightarrow x^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4q(q+1) + 1 = 4(2k) + 1 = 8k + 1$$

حاصل‌ضرب دو عدد متوالی

همواره زوج است.

تست اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که $xy + x = 7^{17}$ باشد، باقی‌مانده $1 + 2y^3 + 3x^2$ بر ۸ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

پاسخ گزینه «۳» می‌دانیم 7^{17} عددی فرد است. حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی فرد شده ولی هر دو فردند:

$$xy + x = 7^{17} \Rightarrow x(y+1) = 7^{17} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ فرد است.} \\ y+1 \text{ فرد است.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 8q + 1 \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + 1 = 3(8q+1) + 2(8q'+1) + 1 = 24q + 3 + 16q' + 1 = 24q + 16q' + 4 \\ y &= 2q' \Rightarrow y^2 = 8q' \end{aligned}$$

مضرب ۸

تست اگر $a \mid 2^n + 1$ و $b \mid m^2 + m + 1$ باقی‌مانده $a^4 + b^4 + a^2b^2$ بر ۸ کدام است؟ (m و n اعداد طبیعی‌اند).

- ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر (۱)

پاسخ گزینه «۴» $2^n + 1$ عددی فرد است. همچنین $m^2 + m + 1 = \frac{m(m+1)}{2} + 1 = 2q + 1$ پس $m^2 + m + 1$ نیز فرد است.

ضرب دو عدد

متوالی زوج است.

بنابراین عدد فرد a و عدد فرد b پس a و b هیچ‌کدام نمی‌توانند عددی زوج باشند پس a و b هر دو فردند، بنابراین هر سه عبارت a^4 و b^4 و a^2b^2 مربع‌های عددهایی فردند، $(a^2)^2$ ، $(b^2)^2$ و $(ab)^2$ بنابراین:

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 = 8q + 1 + 8q' + 1 + 8q'' + 1 = 8(q+q'+q'') + 3$$

مضرب ۸

سه اتحاد مهم در بخش‌پذیری

به این اتحاد نگاه کنید:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

$$a-b \mid a^n - b^n$$

$$a+b \mid a^n + b^n$$

$$a+b \mid a^n - b^n$$

۱ از این‌جا می‌توان نوشت:

۲ همچنین اگر n فرد باشد می‌توان نوشت:

۳ و اگر n زوج باشد:

به بیان دیگر:

۱ $a^n + b^n$ زمانی بر $a+b$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

۲ $a^n - b^n$ همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است اما اگر n زوج باشد $a^n - b^n$ بر $a+b$ نیز بخش‌پذیر است.

تست به ازای چند مقدار $n \leq 300$ رابطه $2^n + 1 \mid 33$ برقرار است؟

- ۲۹ (۱) ۳۰ (۲) ۵۹ (۳) ۶۰ (۴)

پاسخ گزینه «۲» با توجه به $2^n + 1$ در سمت راست رابطه، عدد ۳۳ را یاد چه توانی از ۲ می‌اندازد؟ بله: $33 = 32 + 1 = 2^5 + 1$

حالا به اتحادهایی که گفتیم فکر کنیم، کدامشان ساختاری شبیه صورت سؤال داده‌شده دارد؛ چون در هر ۲ طرف رابطه + داریم، پس باید از اتحاد مقابل کمک بگیریم:

$$a+b \mid a^n + b^n \text{ فرد است } n$$

$$2^5 + 1 \mid (2^5)^{2k+1} + 1^{2k+1} \Rightarrow 2^5 + 1 \mid 2^{10k+5} + 1$$

خب اگر $a = 2^5$ و $b = 1$ باشد، داریم:

چون n باید فرد باشد آن را به صورت $2k+1$ در نظر گرفتیم.

با مقایسه با صورت سؤال می‌توان فهمید $n = 10k + 5$ است. اما گفته $n \leq 300$ بنابراین:

$$0 \leq 10k + 5 \leq 300 \Rightarrow 0 \leq 10k \leq 295 \Rightarrow 0 \leq k \leq 29/5 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 29$$

تست - عدد $3^{56} - 2^{28}$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش پذیر نیست؟

۳۵ (۱) ۹۱ (۲) ۱۱۹ (۳) ۱۸۷ (۴)

پاسخ - گزینه «۲» اگر بخواهیم از اتحادهای گفته شده استفاده کنیم، توان‌ها باید برابر باشند. بنابراین سعی می‌کنیم آن‌ها را برابر کنیم:

$$56 = 2^3 \times 7 \quad 28 = 2^2 \times 7$$

$$3^{56} - 2^{28} = (3^4)^{14} - (2^2)^{14} = 81^{14} - 4^{14}$$

۱۴ زوج است پس $81^{14} - 4^{14}$ هم بر $81 - 4 = 77$ بخش پذیر است. (یعنی هم بر ۷ و هم بر ۱۱) و هم بر $81 + 4 = 85$ بخش پذیر است (یعنی هم بر ۵ و هم بر ۱۷).

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$35 = 5 \times 7 \quad \checkmark$$

$$91 = 7 \times 13 \quad \times \text{ بر } 3^{56} - 2^{28} \text{ بخش پذیر است اما بر } 13 \text{ نه.}$$

$$119 = 7 \times 17 \quad \checkmark$$

$$187 = 11 \times 17 \quad \checkmark$$

قضیه بالا را به صورت زیر نیز می‌توان گفت که اگر n و t اعدادی صحیح باشند:

۱ اگر $\frac{n}{t}$ صحیح باشد: $a^t - b^t \mid a^n - b^n$

۲ اگر $\frac{n}{t}$ فرد باشد: $a^t + b^t \mid a^n + b^n$

۳ اگر $\frac{n}{t}$ زوج باشد: $a^t + b^t \mid a^n - b^n$

تست - به ازای چند عدد n از مجموعه $A = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$ به $a^n + b^n$ به $a^5 + b^5$ بخش پذیر است؟

۱۰ (۴) ۹ (۳) ۶ (۲) ۳ (۱)

پاسخ - گزینه «۱» طبق نکته گفته شده رابطه $a^5 + b^5 \mid a^n + b^n$ هنگامی برقرار است که $\frac{n}{5}$ عددی فرد باشد، پس n مضرب فردی از ۵ است که عضو مجموعه A نیز هست، یعنی n هم مضرب فرد ۵ است هم مضرب ۳، پس n به صورت زیر است:

$$n = 3^k + 5 \Rightarrow n = 15, 45, 75 \rightarrow \text{مقدار } 3$$

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک

مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی دو عدد ۳۰ و ۴۵ را ببینید:

$$30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$45 = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$$

حالا مجموعه مقسوم علیه‌های مشترک این دو عدد را نگاه کنید:

$$45 \text{ و } 30 \text{ مشترک} = \{1, 3, 5, 15\}$$

که در میان آن‌ها ۱۵ بزرگ‌ترین است.

اما خبر برای عددهای بزرگ نمی‌شود این کار را کرد. اما پیش از آن خوب است با تعریف ب.م.م که آن را در ریاضیات با d نشان می‌دهند، آشنا شویم:

حواستون باشه! عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم و می‌نویسیم: $(a, b) = d$

هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد: **۱** $d \mid a, d \mid b$ (این یعنی d مقسوم علیه هر دو a و b است)

۲ $c \mid a, c \mid b \Rightarrow \begin{cases} c \leq d \\ c \mid d \end{cases}$ (این ویژگی تضمین می‌کند که d کوچک‌ترین است)

۱ راه بهتر برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد کافی است هر دو عدد را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در هم ضرب کنیم:

$$(360, 288) = (2^3 \times 3^2 \times 5, 2^5 \times 3^2) = 2^3 \times 3^2 = 72$$

$$(35, 24) = (5 \times 7, 2^3 \times 3) = 1$$

۲ اگر ب.م.م دو عدد برابر ۱ باشد، آن دو عدد را نسبت به هم اول می‌گویند.

تست - اگر $(2^\alpha \times 3^\beta, 360) = 36$ باشد، کدام گزینه در مورد α و β درست است؟

$$\alpha = 2 \text{ و } \beta \geq 2$$

$$\alpha = \beta = 2$$

$$\alpha \geq 2, \beta \geq 2$$

$$\alpha \geq 2, \beta = 2$$



پاسخ- گزینه «۲» گفتیم برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد باید هر دو عدد را تجزیه کرده عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم. داریم:

$$(2^{\alpha} \times 3^{\beta}, 2^2 \times 3^2 \times 5) = 2^2 \times 3^2$$

α باید حتماً ۲ باشد وگرنه در ب.م.م دو عدد ۲ دیده نمی‌شود. (پهن اون یکی ۲ داره!)

در توان‌های ۳ باید $\min\{\beta, 2\} = 2$ باشد، بنابراین β حداقل برابر ۲ است اما هر مقداری می‌تواند داشته باشد یعنی $\beta \geq 2$.

تست- اگر $(x, 600) = 100$ باشد، حاصل $(x^2, 100000)$ کدام است؟

- (۱) همواره ۱۰۰۰۰۰ (۲) همواره ۲۰۰۰۰۰ (۳) ۵۰۰۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰۰ (۴) ۲۰۰۰۰۰ یا ۵۰۰۰۰۰

پاسخ- گزینه «۳» اول عددها را تجزیه می‌کنیم تا بفهمیم چه خبر است:

$$(x, 600) = 100 \Rightarrow (x, 2^3 \times 3 \times 5^2) = 2^2 \times 5^2$$

پس x عامل ۳ ندارد (وگرنه تو ب.م.م می‌اومد) دارای دو عامل ۲ است (پهن آله بیشتر داشت تو ب.م.م می‌اومد) و دارای دست کم دو عامل ۵ است. (پهن اون یکی دو تا ۵ داره، تو ب.م.م هم ۲ تا ۵ تها) (پس این می‌تونه هر عدد بیشتر از ۲ باشه.)

پس فرم کلی x به صورت روبه‌رو است:

(البته ممکن است x عامل‌های دیگری هم داشته باشد ولی چون ۱۰۰۰۰۰ فقط عامل ۲ و ۵ دارد بقیه مهم نیستند.)

حالا ب.م.م $(x^2, 100000)$ را پیدا می‌کنیم:

$$(x^2, 100000) = (2^4 \times 5^{2\alpha}, 2^5 \times 5^5)$$

خب در توان‌های ۲ که کار مشخص است چون 2^4 و 2^5 داریم که مینیمم 2^4 می‌شود. اما در مورد توان‌های ۵ باید ۲ حالت در نظر بگیریم.

$$\alpha = 2 \Rightarrow (2^4 \times 5^{2\alpha}, 2^5 \times 5^5) = (2^4 \times 5^4, 2^5 \times 5^5) = 2^4 \times 5^4 = 10000$$

$$\alpha = 3 \Rightarrow (2^4 \times 5^{2\alpha}, 2^5 \times 5^5) = (2^4 \times 5^6, 2^5 \times 5^5) = 2^4 \times 5^5 = 50000$$

تست- اگر $(n, 21) = 7$ باشد، فرم کلی n بر حسب متغیر $k \in \mathbb{Z}$ کدام است؟

$$n = 21k + 7 \quad (1)$$

$$n = 21k + 14 \quad (3) \quad \text{یا} \quad n = 21k + 7 \quad (4)$$

پاسخ- گزینه «۳» با توجه به این که $(n, 3 \times 7) = 7$ پس n عامل ۳ ندارد ولی بر ۷ بخش‌پذیر است؛ یعنی $n = 7q$ ولی بر ۳ بخش‌پذیر نیست بنابراین q یا به صورت $3k+1$ است یا به صورت $3k+2$ ، پس:

$$n = 7(3k+1) = 21k+7 \quad \text{یا} \quad n = 7(3k+2) = 21k+14$$

تست- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۵۰ مانند n دو عدد $n-3$ و n^2+3n+1 نسبت به هم اول اند؟ ($n \in \mathbb{N}$)

$$142 \quad (1) \quad 143 \quad (2) \quad 148 \quad (3) \quad 149 \quad (4)$$

پاسخ- گزینه «۱» روش اول: ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. با توجه به ویژگی اول ب.م.م داریم:

$$d \mid n-3 \xrightarrow{\times n} d \mid n^2-3n \xrightarrow{(-)} d \mid n+1$$

$$d \mid n^2+3n+1$$

حالا دوباره:

$$d \mid n-3 \xrightarrow{\times 6} d \mid 6n-18 \xrightarrow{(-)} d \mid 19 \Rightarrow d=1 \quad \text{یا} \quad 19$$

$$d \mid 6n+1 \Rightarrow d \mid 6n+1$$

می‌خواهیم ب.م.م ۱ باشد؛ بنابراین حالت‌هایی که ب.م.م ۱۹ است قابل قبول نیست. بنابراین باید حالت‌هایی که عددها بر ۱۹ بخش‌پذیرند را پیدا کرده

از کل عددها کم کنیم.

$$n-3=19k \Rightarrow n=19k+3 < 150 \Rightarrow 0 \leq 19k < 147 \Rightarrow 0 \leq k < 7 \dots \Rightarrow k=0, 1, 2, \dots, 6$$

یعنی به ازای ۸ عدد ب.م.م برابر ۱۹ می‌شود پس به ازای $142-7=149$ عدد ب.م.م برابر ۱ است و دو عدد نسبت به هم اول اند.

(هواستون باشه: $[a, 0] = |a|$)

روش دوم: در این نوع سؤال‌ها هم می‌شود ریشه یکی از عبارت‌ها را در دیگری قرار داد. در این صورت d آن مقدار را عاد می‌کند:

$$n-3=0 \xrightarrow{\text{جاگذاری در عبارت دیگر}} 3^2+3 \times 3+1=19 \Rightarrow d \mid 19$$

و بقیه پاسخ مثل روش اول است.

روش نردبانی برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد: گفتیم بهترین روش پیدا کردن ب.م.م تجزیه دو عدد و ضرب کردن عوامل مشترک با توان کوچک‌تر در هم است. اما گاهی عددها خوب تجزیه نمی‌شوند. در این صورت می‌توانیم از روش نردبانی ب.م.م دو عدد را پیدا کنیم. در این روش از جدول زیر استفاده می‌کنیم. سطر اول مربوط به خارج قسمت‌ها، سطر دوم مربوط به دو عدد و سطر سوم مخصوص باقی‌مانده‌هاست. عددها را به ترتیب نزولی در سطر وسط قرار می‌دهیم و بر هم تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت را در سطر بالایی و باقی‌مانده را در سطر پایینی می‌گذاریم. اگر باقی‌مانده صفر بود، عدد آخر ب.م.م است وگرنه باقی‌مانده را به سطر وسط منتقل می‌کنیم و دوباره الگوریتم را تکرار می‌کنیم.



برای درک بهتر به تست زیر نگاه کنید:

تست - مجموع ارقام بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو عدد ۴۳۷ و ۲۵۳ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ - گزینه «۲» چون تجزیه عددها آسان نیست، برای پیدا کردن ب.م.م از روش نردبانی استفاده می‌کنیم:

(۱) اول ۴۳۷ را بر ۲۵۳ تقسیم می‌کنیم:

۲	۱	۲	۱	۱	۹
۲۳	۴۶	۶۹	۱۸۴	۲۵۳	۴۳۷
۰	۲۳	۴۶	۶۹	۱۸۴	۲

$$437 \overline{) 253}$$

$$\underline{253} \quad 1$$

باقی‌مانده می‌رود سطر وسط $\rightarrow 184$

(۲) حالا ۲۵۳ را بر ۱۸۴ تقسیم می‌کنیم:

$$253 \overline{) 184}$$

$$\underline{-184} \quad 1$$

باقی‌مانده دوباره می‌رود سطر وسط $\rightarrow 69$

(۳) حالا ۱۸۴ را بر ۶۹ تقسیم می‌کنیم:

$$184 \overline{) 69}$$

$$\underline{-138} \quad 2$$

باقی‌مانده دوباره می‌رود سطر وسط $\rightarrow 46$

(۴) ۶۹ را بر ۴۶ تقسیم می‌کنیم:

$$69 \overline{) 46}$$

$$\underline{-46} \quad 1$$

$$23$$

$$2+3=5$$

(۵) ۴۶ بر ۲۳ بخش‌پذیر است پس ب.م.م ۲۳ است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک

c را کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b می‌گوییم و می‌نویسیم:

۱ $a|c$ و $b|c$ (یعنی c بر هر دو عدد a و b بخش‌پذیر است)

هرگاه:

۲ $\forall m > 0; a|m, b|m \Rightarrow \begin{cases} c \leq m \\ c|m \end{cases}$ (این ویژگی تضمین می‌کند که c کوچک‌ترین باشد)

یادتان هست کمی قبل ب.م.م دو عدد ۳۰ و ۴۵ را پیدا کردیم؟ الان ک.م.م.شان را پیدا می‌کنیم:

$$30 = \{30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, \dots\}$$

$$45 = \{45, 90, 135, 180, 225, \dots\}$$

$$45 \text{ و } 30 \text{ مشترک} = \{90, 180, 270, \dots\}$$

اما خوب واضح است که این راه خوبی نیست. برای پیدا کردن ک.م.م دو یا چند عدد بهتر است از روش زیر استفاده کنیم.

حواستون باشه! برای پیدا کردن ک.م.م دو یا چند عدد، عددها را تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل

غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

$$[30, 45] = [2 \times 3 \times 5, 3^2 \times 5] = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

برای مثال:

$$[54, 60] = [2 \times 3^3, 2^2 \times 3 \times 5] = 2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$$

تست - اگر $[a, 20] = 120$ باشد، کدام گزینه درست نیست؟

(۲) a بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

(۱) a بر ۸ بخش‌پذیر است اما بر ۱۶ بخش‌پذیر نیست.

(۴) کوچک‌ترین مقدار طبیعی a دورقمی است.

(۳) a بر ۵ بخش‌پذیر است اما بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست.

$$[a, 2^2 \times 5] = 2^3 \times 3 \times 5$$

پاسخ - گزینه «۳» داریم:

در ک.م.م ۲۳ داریم پس a حتماً بر ۲۳ بخش‌پذیر است اما بر ۲۴ بخش‌پذیر نیست به دلیل این‌که در آن صورت در ک.م.م هم ۲۴ می‌آمد پس

گزینه (۱) درست است.

a حتماً عامل ۳ دارد چون ۳ در ک.م.م آمده اما بر ۹ نمی‌تواند بخش پذیر باشد. چون در آن صورت در ک.م.م هم 3^2 می‌آمد پس گزینه (۲) درست است. چون $2^2 \times 5 = 20$ و در ک.م.م هم فقط یک عامل ۵ وجود دارد، پس a ممکن است اصلاً بر ۵ بخش پذیر نباشد پس گزینه (۳) درست نیست. (البته ممکنه یه ۵ داشته باشه اما نمی‌تونیم بگیریم هتماً ۵ داره!)
 a دارای دست کم ۳ عامل ۲ و یک عامل ۳ است پس $a_{\min} = 2^3 \times 3 = 24$ پس گزینه (۴) درست است.

ویژگی‌های ب.م.م و ک.م.م

(اگر دو تا عدد داشته باشیم که یکی اون یکی رو عاد می‌کنه ب.م.م می‌شه اون یکی که قدر مطلقش کوچک تره و ک.م.م می‌شه اون یکی.)

$$1 \quad a | b \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = |a| \\ [a, b] = |b| \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} (a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b) \\ [a, b] = [a, -b] = [-a, b] = [-a, -b] \end{cases}$$

(علامت منفی تو ب.م.م و ک.م.م هیچ تأثیری نداره.)

$$3 \quad \begin{cases} (ka, kb) = |k| (a, b) \\ [ka, kb] = |k| [a, b] \end{cases}$$

(هرفا تونستی فاکتور بگیر ی بگیر!)

$$4 \quad (a, b) = d \Rightarrow (a, b \pm ak) = d$$

(اگر هر مفبری از یکی از عددها رو به اون یکی اضافه و یا ازش کم کنیم ب.م.م تغییری نمی‌کنه.)

$$\text{برای مثال } [30, 45] = [30, 45 + 2 \times 30] = [30 - 3 \times 45, 45] = 90$$

$$5 \quad (a, b)[a, b] = |ab|$$

(ضرب ب.م.م دو تا عدد تو ک.م.م شون می‌شه قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد.)

$$\begin{aligned} (30, 45) &= 15 \\ [30, 45] &= 90 \Rightarrow 30 \times 45 = 15 \times 90 \end{aligned}$$

برای مثال:

تست حاصل $((a, [a, b]), [a^2, (a, b)])$ کدام است؟

$$(a, b) \quad (1) \quad a \quad (2) \quad [a, b] \quad (3) \quad |a| \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۴» یک چیزی را همیشه یادتان باشد، ک.م.م دو تا عدد بر هر دو عدد بخش پذیر است و هر دو عدد بر ب.م.م نشان بخش پذیرند. حالا برویم سراغ حل سؤال:

$$\left. \begin{aligned} a | [a, b] &\Rightarrow (a, [a, b]) = |a| \\ (a, b) | a, a | a^2 &\Rightarrow (a, b) | a^2 \Rightarrow [a^2, (a, b)] = a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (|a|, a^2) = |a|$$

حواستان باشد ممکن است a منفی باشد، پس گزینه (۲) همیشه درست نیست.

تست اگر دو عدد a و b نسبت به هم اول باشند، حاصل $(\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b)$ کدام است؟

$$\gamma \text{ یا } 1 \quad (4) \quad 3 \text{ یا } 1 \quad (3) \quad 2 \text{ یا } 1 \quad (2) \quad \text{همواره } 1 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۱» برای پاسخ گویی از آن ویژگی ب.م.م استفاده می‌کنیم که $(a, b) = d \Rightarrow (a, b \pm ak) = d$.

یعنی هر مضربی از یکی را می‌توان به دیگری اضافه یا از آن کم کرد.

(۱) عبارت سمت راست را نگه می‌داریم و عبارت سمت چپ را منهای عبارت سمت راست می‌کنیم.

$$(\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b) = ((\gamma a + \epsilon b) - (\delta a + \zeta b), \delta a + \zeta b) = (\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b)$$

(۲) حالا عبارت سمت چپ را نگه می‌داریم و عبارت سمت راست را برابر عبارت سمت چپ می‌کنیم:

$$= (\gamma a + \epsilon b, (\delta a + \zeta b) - \gamma(a + b)) = (\gamma a + \epsilon b, a + b)$$

$$(\gamma a + \epsilon b - (a + b), a + b) = (a, a + b)$$

(۳) حالا راستی را نگه می‌داریم و چپی را منهای راستی می‌کنیم:

$$(a, a + b) = (a, a + b - a) = (a, b) = 1$$

(۴) و بالاخره a را نگه می‌داریم و $a + b$ را منهای a می‌کنیم:

روش دوم: این سؤال را می‌توان با نکته زیر نیز حل کرد:

■ اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $(a, b) = d$ باشد، آن گاه اگر x, y, z, t اعداد صحیح باشند، داریم:

$$(xa + yb, za + tb) \mid \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} d$$

حال برای حل سؤال داریم:

$$(\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b) \mid \begin{vmatrix} \gamma & \epsilon \\ \delta & \zeta \end{vmatrix} \times 1 \Rightarrow (\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b) \mid 1 \Rightarrow (\gamma a + \epsilon b, \delta a + \zeta b) = 1$$

تست - حاصل $(20m + 2, 30m + 8)$ کدام است؟

(۱) همواره ۲

(۲) ۱ یا ۲

(۳) ۲ یا ۱۰

(۴) همواره ۱۰

$$(20m + 2, 30m + 8) = 2(10m + 1, 15m + 4)$$

پاسخ - گزینه «۱» اول از همه خوب است از یک ۲ فاکتور بگیریم:

حالا فرض می‌کنیم $d = (10m + 1, 15m + 4)$ باشد، در این صورت:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 10m + 1 \xrightarrow{\times 3} d \mid 30m + 3 \\ d \mid 15m + 4 \xrightarrow{\times 2} d \mid 30m + 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

اما دقت کنید d نمی‌تواند برابر ۵ باشد چون $10m + 1$ و $15m + 4$ نمی‌توانند بر ۵ بخش‌پذیر باشند پس فقط $d = 1$ قابل قبول است و چون از یک ۲ فاکتور گرفته بودیم پاسخ همواره ۲ است.

متابین‌سازی

در سؤال‌های متابین‌سازی معمولاً دو رابطه (گاهی هم یک رابطه ترکیبی) از ب.م.م، ک.م.م، مجموع یا حاصل ضرب دو عدد داده می‌شود و باید عددها را پیدا کنیم.

نکته کلیدی پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها نکته زیر است:

$$(a, b) = d \xrightarrow{\div d} \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) = 1$$

۱ $\frac{a}{d} = a' \Rightarrow a = a'd$

$\frac{a}{d}$ ام را a' و $\frac{b}{d}$ ام را b' می‌نامیم، بنابراین:

۲ $\frac{b}{d} = b' \Rightarrow b = b'd$

۳ $(a', b') = 1$

۴ $[a, b] = [a'd, b'd] = d[a', b'] = a'b'd$

حالا در این سؤال‌ها هر چیزی به ما بدهند را برحسب d ، b' و a' بازنویسی می‌کنیم:

۵ $a + b = a'd + b'd = d(a' + b')$

۶ $ab = (a'd)(b'd) = a'b'd^2$

حالا سؤال‌های زیر را حل کنید تا با ایده‌های متابین‌سازی بیشتر آشنا شوید:

تست - اگر $(a, b) = 7$ و $a + b = 56$ باشد، حداکثر $[a, b]$ کدام است؟

(۱) ۴۹

(۲) ۸۴

(۳) ۱۰۵

(۴) ۱۱۲

$$(a, b) = 7 \Rightarrow d = 7$$

پاسخ - گزینه «۳»

$$a + b = 56 \Rightarrow d(a' + b') = 56 \Rightarrow a' + b' = 8$$

۱	۷	✓
۲	۶	×
۳	۵	✓
۴	۴	×

دقت کنید $(a', b') = 1$ است پس دو حالت قابل قبول نیست. حالا می‌خواهیم $[a, b]$ حداکثر شود پس باید حالتی را در نظر بگیریم که حاصل ضرب $a'b'$ بیشتر شود، پس ۵ و ۳ را در نظر می‌گیریم:

$$[a, b] = a'b'd = 5 \times 3 \times 7 = 105$$

تست - اگر $a + b = 117$ و $[a, b] = 260$ باشد، کدام گزینه درست است؟ ($a > b$)

(۱) $a - b$ زوج است.

(۲) $a - b$ مضرب ۳ است.

(۳) $a - b$ عددی اول است.

(۴) a و b دو عدد متوالی‌اند.

$$a + b = 117 \Rightarrow d(a' + b') = 117 \quad (I)$$

پاسخ - گزینه «۳»

$$[a, b] = 260 \Rightarrow a'b'd = 260 \quad (II)$$

$$\frac{(I)}{(II)} = \frac{(a' + b')d}{a'b'd} = \frac{117}{260}$$

با تقسیم دو رابطه داریم:

$$\frac{a' + b'}{a'b'} = \frac{9}{20} \Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 9 \\ a'b' = 20 \end{cases} \xrightarrow{\text{وقتی } a > b \text{ پس } a' > b' \text{ می‌شود.}} a' = 5, b' = 4$$

d را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم:

با جای‌گذاری در یکی از رابطه‌ها d هم پیدا می‌شود. هر چند وقتی طرفین $\frac{117}{260}$ را به ۱۳ ساده کردیم، معلوم بود $d = 13$ است، ولی با این حال:

$$a'b'd = 260 \Rightarrow 5 \times 4 \times d = 260 \Rightarrow d = 13 \Rightarrow a = 65, b = 52 \Rightarrow a - b = 13$$

اعداد اول

اعداد اول را که همه می‌دانند چیست! عددهایی هستند که در میان اعداد طبیعی فقط بر خودشان و ۱ بخش‌پذیر باشند. همین اول کار دوتا تست ببینید تا بعد نکته‌هایش را با هم مرور کنیم:

تست ۱- اگر a, b, c سه عدد اول باشند به طوری که $a < b < c$ و $a + b + c = ۲۰۶$ باشد، مجموع ارقام $a^2b + a^2c$ کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

پاسخ- گزینۀ «۴» می‌دانیم همه عددهای اول به جز ۲ فردند. از طرفی مربع سه عدد فرد، عددی فرد می‌شود اما این‌جا $a + b + c$ زوج است. پس یکی از آن‌ها حتماً زوج است و چون هر سه اول‌اند، کوچک‌ترین آن‌ها یعنی $a = ۲$ است. حالا:

$$a + b + c = ۲۰۶ \Rightarrow ۲ + b + c = ۲۰۶ \Rightarrow b + c = ۲۰۴$$

$$a^2b + a^2c = a^2(b + c) = ۴ \times (۲۰۴) = ۸۱۶ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۸ + ۱ + ۶ = ۱۵$$

تست ۲- اگر a و b دو عدد طبیعی و p عددی اول باشد به طوری که $a^2 = p + b^2$ و $ab = ۴۲۰$ باشد، $۲a + ۳b$ کدام است؟

۱۰۱ (۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۳ (۳) ۱۰۴ (۴)

پاسخ- گزینۀ «۲» حاصل ضرب دو عدد برابر عددی اول شده پس یکی ۱ و دیگری p است.

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = p \end{cases} \Rightarrow a = \frac{p+1}{2}, b = \frac{p-1}{2} \Rightarrow ab = \frac{p^2-1}{4} = ۴۲۰$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 = ۱۶۸۰ \Rightarrow p^2 = ۱۶۸۱ \Rightarrow p = ۴۱$$

$$\Rightarrow a = \frac{۴۱+1}{2} = ۲۱, b = \frac{۴۱-1}{2} = ۲۰ \Rightarrow ۲a + ۳b = ۲ \times ۲۱ + ۳ \times ۲۰ = ۱۰۲$$

چند نکته در مورد اعداد اول

$$\left. \begin{array}{l} ۶k \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۱ \\ ۶k+۲ \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۳ \Rightarrow \text{مضرب ۳} \\ ۶k+۴ \Rightarrow \text{زوج} \\ ۶k+۵ \end{array} \right\} \Rightarrow p = ۶k+۱ \text{ یا } ۶k+۵$$

۱ هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد.

یا برای راحتی کار $p = ۶k \pm ۱$.

$$p > ۳ \Rightarrow p^2 = ۲۴k + ۱$$

۲ مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

۳ هیچ‌کدام از عددهای بزرگ‌تر از $n! + ۱$ و کوچک‌تر یا مساوی $n! + n$ اول نیستند. برای مثال همه عددهای بزرگ‌تر از $۲۰! + ۱$ و کوچک‌تر یا مساوی $۲۰! + ۲۰$ مرکب‌اند. برای مثال $۲۰! + ۱۳ = ۲۰ \times ۱۹ \times \dots \times ۱۳ \times \dots \times ۲ \times ۱ + ۱۳$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۴ اگر $a \mid bc$ و $a \mid c$ باشد آن‌گاه $a \mid b$. این هم واضح است؛ فرض کنید $a \mid ۳b$ و $a \mid (۳, ۳) = ۱$ باشد. الان باید کسر $\frac{۳b}{a}$ عددی صحیح شود، a را که با ۳ نمی‌شود ساده کرد، پس b باید بر a بخش‌پذیر باشد یا $a \mid b$.

۵ تعداد اعداد اول نامتناهی است.

تست ۳- حاصل کدام‌یک از عبارت‌های زیر به ازای هیچ مقدار $n \in \mathbb{N}$ عدد اول نمی‌شود؟

$n^3 + ۲۷$ (۴) $n^2 - ۵n + ۸$ (۳) $n^3 - ۸$ (۲) $۵n + ۱$ (۱)

پاسخ- گزینۀ «۴» $۵n + ۱$ که مشخص است به ازای عددهای زیادی اول می‌شود، برای مثال اگر $n = ۲$ باشد، $۵n + ۱ = ۱۱$ می‌شود. پس گزینۀ (۱) پاسخ سؤال نیست.

$$n^3 - ۸ = (n-۲)(n^2 + ۲n + ۴)$$

این عبارت حاصل ضرب دو عدد مختلف است و به نظر می‌رسد ضرب دو عدد هیچ‌گاه اول نمی‌شود اما اگر $n = ۳$ باشد، $n - ۲ = ۱$ و $n^2 + ۲n + ۴ = ۱۹$ می‌شود و حاصل اول است. پس گزینۀ (۲) نیز پاسخ سؤال نیست.

اگر n فرد باشد، n^2 و $۵n$ هر دو فرد می‌شوند؛ پس $n^2 - ۵n + ۸$ زوج می‌شود. اگر n زوج باشد نیز $n^2 - ۵n + ۸$ همواره زوج است؛ اما ممکن است حاصل برابر ۲ شود که یک عدد اول است.

$$n^2 - ۵n + ۸ = ۲ \Rightarrow n^2 - ۵n + ۶ = ۰ \Rightarrow (n-۳)(n-۲) = ۰ \Rightarrow n = ۳$$

اگر بررسی کنیم، داریم:

یعنی به ازای $n = ۳$ حاصل برابر ۲ می‌شود که عددی اول است. پس گزینۀ (۳) نیز پاسخ سؤال نیست.

$$n^3 + ۲۷ = (n+۳)(n^2 - ۳n + ۹)$$

حاصل $n^3 + ۲۷$ ولی هیچ‌گاه عدد اول نمی‌شود زیرا:

حاصل ضرب دو عدد است که هیچ‌کدام به ازای هیچ مقدار طبیعی n برابر ۱ نمی‌شود. بنابراین ضرب دو عدد بزرگ‌تر از ۱ است که هیچ‌گاه اول نیست.

تست - اگر p عددی اول باشد، به ازای چند مقدار p عبارت $p^4 + p^2 + 1$ عددی اول می‌شود؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

پاسخ - گزینه «۱» گفتیم مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $۲۴k + ۱$ نوشت، بنابراین:

$$p = 2 \Rightarrow p^4 + p^2 + 1 = 16 + 4 + 1 = 21 \quad \text{اول نیست.}$$

$$p = 3 \Rightarrow p^4 + p^2 + 1 = 81 + 9 + 1 = 91 \quad \text{اول نیست.}$$

$$p > 3 \Rightarrow (۲۴k + ۱)^2 + ۲۴k + ۱ + ۱ = (۲۴k)^2 + ۷۲k + ۳ \quad \text{همواره مضرب ۳ است بنابراین اول نیست.}$$

قضیه تقسیم و کاربردها

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b اگر q خارج قسمت و r باقی‌مانده باشد، داریم:

$$\begin{array}{l} \text{مقسوم علیه} \rightarrow a \mid b \\ \text{خارج قسمت} \rightarrow q \\ \text{باقی‌مانده} \rightarrow r \end{array}$$

$$a = bq + r \quad \text{و} \quad 0 \leq r < b$$

تست - در تقسیم عدد a بر b اگر ۲۲۱ واحد به a اضافه شود، خارج قسمت و باقی‌مانده هر کدام m واحد اضافه می‌شوند، b کدام است؟ ($m > ۱$)

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۶ (۴) نمی‌توان گفت.

$$a = bq + r \quad (I) \quad \text{و} \quad 0 \leq r < b$$

$$a + ۲۲۱ = b(q + m) + (r + m) \quad (II) \quad \text{و} \quad 0 \leq r + m < b$$

$$(II) - (I): ۲۲۱ = mb + m \Rightarrow ۲۲۱ = m(b + ۱) \Rightarrow ۱۳ \times ۱۷ = m(b + ۱)$$

حالا اگر دو رابطه را از هم کم کنیم داریم: با توجه به شرط باقی‌مانده می‌دانیم $b > m$ است، پس $m = ۱۳$ و $b + ۱ = ۱۷$ و در نتیجه $b = ۱۶$ است.

تست - چند عدد دورقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم به ۹ خارج قسمت آن مضرب ۴ و باقی‌مانده آن مضرب ۵ باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۲

پاسخ - گزینه «۱» عدد a را فرض می‌کنیم، چون خارج قسمت مضرب ۴ است، آن را $۴q$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$a \mid ۹ \quad ۴q \Rightarrow a = ۳۶q + r, 0 \leq r < ۹$$

باقی‌مانده مضرب ۵ است، پس باقی‌مانده یا صفر است یا ۵. در هر دو حالت عددهای دورقمی را پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow a = ۳۶q \Rightarrow a = ۳۶, ۷۲ \quad \text{یا} \quad a = ۳۶q + ۵ \Rightarrow a = ۴۱, ۷۷$$

تست - در تقسیم عددهای a و b بر ۱۴ باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۲ و ۱۱ و خارج قسمت‌ها q و q' اند. باقی‌مانده تقسیم $۶a + ۳b$ بر ۲۱ برابر

..... و خارج قسمت آن برابر است.

(۱) $۲q + q' + ۱$ و (۲) $۴q + ۲q' + ۲$ (۳) $۲q + q' + ۱$ و (۴) $۴q + ۲q' + ۲$

پاسخ - گزینه «۴»

$$a = ۱۴q + ۲ \xrightarrow{\times ۶} ۶a = ۸۴q + ۱۲ \quad \xrightarrow{+} \quad ۶a + ۳b = ۸۴q + ۴۲q' + ۴۵$$

$$b = ۱۴q' + ۱۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳b = ۴۲q' + ۳۳$$

$$= ۲۱(۴q + ۲q') + \frac{۴۵}{۲۱ \times ۲ + ۳} = ۲۱(۴q + ۲q' + ۲) + ۳$$

در سؤال‌های بخش‌پذیری گاهی لازم می‌شود باقی‌مانده یک عدد منفی را بر یک عدد مثبت پیدا کنیم. دو روش برای انجام این کار وجود دارد. فرض کنید a عددی منفی است و می‌خواهیم باقی‌مانده آن را بر عدد b به دست آوریم:

۱ می‌توانیم اول خارج قسمت را با دستور $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ پیدا کنیم و سپس باقی‌مانده را از رابطه $r = a - bq$ به دست آوریم.

۲ باقی‌مانده $|a|$ را بر b پیدا کنیم و آن را r' می‌نامیم. در این صورت باقی‌مانده a بر b برابر است با:

برای مثال اگر بخواهیم باقی‌مانده -۲۸ را بر ۵ به دست آوریم داریم:

$$\text{روش اول:} \quad q = \left[\frac{-۲۸}{۵} \right] = [-۵/۶] = -۶ \Rightarrow r = -۲۸ - ۵ \times -۶ = ۲$$

روش دوم:

$$\frac{۲۸}{۵} \mid \frac{۵}{۳} \Rightarrow r' = ۳ \Rightarrow r = ۵ - ۳ = ۲$$



تست اگر $a = 15q + 13$ باشد، باقی مانده و خارج قسمت $4a - 93$ بر 20 کدام است؟

- (۱) $3q - 2$ (۲) $3q - 3$ (۳) 19 و $3q - 2$ (۴) $3q - 3$ و 19

پاسخ گزینه «۴»

$$a = 15q + 13 \Rightarrow 4a - 93 = 4(15q + 13) - 93 = 60q - 41$$

برای پیدا کردن باقی مانده توجه کنید $60q$ بر 20 بخش پذیر است، پس باید باقی مانده 41 را بر 20 پیدا کنیم:

$$41 \overline{) 20}$$

$$\frac{40}{1} \quad 2 \Rightarrow r = 20 - 1 = 19$$

$$\left[\frac{60q - 41}{20} \right] = [3q - 2/05] = 3q - 3$$

و برای خارج قسمت:

تست اگر باقی مانده تقسیم a بر 5 برابر 1 باشد، باقی مانده تقسیم $2a + 1$ بر 30 حداکثر برابر چند است؟

- (۱) 21 (۲) 23 (۳) 24 (۴) 27

پاسخ گزینه «۲»

باقی مانده a در تقسیم به 5 برابر 1 است؛ بنابراین:

$$a = 5q + 1 \Rightarrow 2a + 1 = 10q + 3$$

حالا می خواهیم باقی مانده $2a + 1$ را بر 30 به دست آوریم، بنابراین باید q را در سه حالت بررسی کنیم:

$$q = 3k \Rightarrow 2a + 1 = 30k + 3 \Rightarrow r = 3$$

$$q = 3k' + 1 \Rightarrow 2a + 1 = 10(3k' + 1) + 3 = 30k' + 13 \Rightarrow r = 13$$

$$q = 3k'' + 2 \Rightarrow 2a + 1 = 10(3k'' + 2) + 3 = 30k'' + 23 \Rightarrow r = 23$$

تست مجموع ارقام بزرگ ترین عددی که در تقسیم به 42 باقی مانده آن $\frac{3}{4}$ مربع خارج قسمت آن باشد، کدام است؟

- (۱) 15 (۲) 16 (۳) 17 (۴) 18

پاسخ گزینه «۴»

$$a \overline{) 42} \quad - \frac{3}{4}q^2 \Rightarrow a = 42q + \frac{3}{4}q^2, 0 \leq \frac{3}{4}q^2 < 42 \Rightarrow 0 \leq q^2 < 56 \Rightarrow q_{\max} = 7$$

اما q باید زوج باشد وگرنه باقی مانده عدد صحیح نمی شود پس $q_{\max} = 6$.

$$a_{\max} = 42 \times 6 + \frac{3}{4} \times 6^2 = 252 + 27 = 279 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 2 + 7 + 9 = 18$$

بنابراین:

تست باقی مانده a بر 12 و 7 به ترتیب برابر 11 و 5 است. باقی مانده a بر 42 کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 7

پاسخ گزینه «۳»

باید دو رابطه را در عددی ضرب کنیم که خارج قسمت جدید مضرب 42 باشد و وقتی آن دو را از هم کم می کنیم اختلاف یکی شود:

$$a = 12q + 11 \xrightarrow{\times 7} 7a = 84q + 77$$

$$a = 7q' + 5 \xrightarrow{\times 6} 6a = 42q' + 30$$

$$\xrightarrow{(-)} 7a - 6a = 84q + 77 - 42q' - 30 \Rightarrow a = 42(2q - q') + \frac{47}{42+5}$$

واضح است که باقی مانده عبارت بر 42 برابر 5 است.

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک تقسیم

$\mathbb{Z}$

عددهای صحیح در تقسیم به 2 ، دو حالت دارند: یا زوج اند یا فرد. بنابراین مجموعه $\mathbb{Z}$ در تقسیم به 2 به دو مجموعه افراز می شود:

عددهای فرد $2k + 1$ یا	عددهای فرد $2k$ یا
---------------------------	-----------------------

$\mathbb{Z}$

با همین استدلال در تقسیم به m مجموعه $\mathbb{Z}$ به m مجموعه افراز می شود.

mk	$mk + 1$	$mk + 2$	$\dots$	$mk + m - 1$
------	----------	----------	---------	--------------

برای مثال در تقسیم به 5 مجموعه $\mathbb{Z}$ به 5 دسته زیر افراز می شود:

$\mathbb{Z}$

$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$
مضرب 5	عددهایی که در تقسیم به 5 باقی مانده 1 دارند.	عددهایی که در تقسیم به 5 باقی مانده 2 دارند.	عددهایی که در تقسیم به 5 باقی مانده 3 دارند.	عددهایی که در تقسیم به 5 باقی مانده 4 دارند.



تست - باقی‌مانده یک عدد اول بزرگ‌تر از ۱۱ در تقسیم به ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

پاسخ - گزینه «۳» در تقسیم به ۱۲ مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۱۲ مجموعه زیر افراز می‌شود. بررسی می‌کنیم در کدام حالت‌ها عدد نمی‌تواند اول باشد.

زوج $12k + 8$	زوج $12k + 4$	زوج $12k$
مضرب ۳ $12k + 9$	$12k + 5$	$12k + 1$
زوج $12k + 10$	زوج $12k + 6$	زوج $12k + 2$
$12k + 11$	$12k + 7$	مضرب ۳ $12k + 3$

پس باقی‌مانده یک عدد اول در تقسیم به ۱۲ می‌تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد.

تست - چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۳۰ وجود دارد به طوری که وقتی در تقسیم به ۳ مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۳ دسته افراز می‌شود، این عددها در

دسته $3k + 1$ و وقتی در تقسیم به ۴ مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۴ دسته افراز می‌شود، این عددها در دسته $4k + 2$ قرار گیرند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ - گزینه «۲» عددهای کوچک‌تر از ۳۰ دسته $3k + 1$ و $4k + 2$ را مشخص کرده اشتراک آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\{x = 3k + 1 : k \in \mathbb{Z}, x < 30\} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$$

$$\{x = 4k + 2 : k \in \mathbb{Z}, x < 30\} = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26\}$$

همان‌طور که می‌بینید تنها عددهای مشترک ۱۰ و ۲۲ هستند.

تست - اگر a مضرب ۵ نباشد، باقی‌مانده $3a^2 + 1$ در تقسیم به ۵ کدام است؟

(۱) ۱ یا ۲ (۲) ۱ یا ۴ (۳) ۳ یا ۴ (۴) ۲ یا ۴

پاسخ - گزینه «۳» می‌دانیم در تقسیم به ۵ مجموعه $\mathbb{Z}$ به ۵ دسته افراز می‌شود، چون عدد a مضرب ۵ نیست پس آن را به یکی از حالت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$a = 5k + 1 \quad a = 5k + 2 \quad a = 5k + 3 \quad a = 5k + 4$$

در هر حالت $3a^2 + 1$ را پیدا کرده باقی‌مانده آن را به ۵ به دست می‌آوریم:

$$a = 5k + 1 \Rightarrow 3a^2 + 1 = 3(5k + 1)^2 + 1 = \underbrace{75k^2 + 30k + 4}_{\text{مضرب ۵}} \Rightarrow r = 4$$

$$a = 5k + 2 \Rightarrow 3a^2 + 1 = 3(5k + 2)^2 + 1 = \underbrace{75k^2 + 60k + 13}_{\text{مضرب ۵}} \Rightarrow r = 3$$

$$a = 5k + 3 \Rightarrow 3a^2 + 1 = 3(5k + 3)^2 + 1 = \underbrace{75k^2 + 90k + 28}_{\text{مضرب ۵}} \Rightarrow r = 3$$

$$a = 5k + 4 \Rightarrow 3a^2 + 1 = 3(5k + 4)^2 + 1 = \underbrace{75k^2 + 120k + 49}_{\text{مضرب ۵}} \Rightarrow r = 4$$

پس باقی‌مانده برابر ۳ یا ۴ است.

این سؤال را در فصل بعد و با هم‌نهشتی خیلی راحت‌تر می‌شود حل کرد اما اگر در همین فصل هم می‌خواهید ساده‌تر به سؤال پاسخ دهید به جای کل عبارت می‌توانید فقط باقی‌مانده‌ها را جای‌گذاری کنید:

$$r = 1 \Rightarrow 3 \times 1^2 + 1 = 4$$

$$r = 2 \Rightarrow 3 \times 2^2 + 1 = 13 \Rightarrow r = 3$$

$$r = 3 \Rightarrow 3 \times 3^2 + 1 = 28 \Rightarrow r = 3$$

$$r = 4 \Rightarrow 3 \times 4^2 + 1 = 49 \Rightarrow r = 4$$

تست - اگر a مضرب ۵ باشد و زوج نباشد، باقی‌مانده آن در تقسیم به ۲۰ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ - گزینه «۲» a مضرب ۵ است پس $a = 5k$ است. می‌خواهیم باقی‌مانده آن را بر ۲۰ به دست آوریم. پس مجبوریم k را در ۴ حالت فرض کنیم که عامل ۲۰ به وجود بیاید. اما چون گفته k زوج نیست پس k یا به صورت $4q + 1$ است یا $4q + 3$ بنابراین:

$$k = 4q + 1 \Rightarrow a = 20q + 5 \Rightarrow r = 5$$

$$k = 4q + 3 \Rightarrow a = 20q + 15 \Rightarrow r = 15$$

پس باقی‌مانده برابر ۵ یا ۱۵ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◀ عادکردن

۴۱- چند عدد از مجموعه $\{۳۱, ۳۲, ۳۳, \dots, ۸۸, ۸۹\}$ مضرب ۳ و زوج است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۴۲- به ازای چند مقدار صحیح a ، روابط $a \mid (b+5)^2$ و $a \mid (b+6)(b+4)$ برقرارند؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴)

۴۳- اگر $a \mid b$ ، کدام یک از نتایج زیر در حالت کلی برقرار نیست؟

- $a^2 \mid b^4 - 2a^2$ (۱) $a^2 \mid (a-b)^2$ (۲) $ab \mid 7b^2 - 5ab$ (۳) $a^2 \mid b - a^5$ (۴)

۴۴- برای سه عدد طبیعی a ، b و c ، اگر $abc \mid 2ab + 3ac$ ، آن‌گاه کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

- $b \mid 12c$ (۱) $c \mid 8b$ (۲) $a \mid 2b + 3c$ (۳) $bc \mid 2b + 3c$ (۴)

۴۵- از رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ کدام گزینه صحیح نیست؟

- $a - b \mid c^2$ (۱) $c \mid a + b$ (۲) $a + b \mid c^2$ (۳) $c \mid a^4 - b^4$ (۴)

۴۶- اگر $a \mid 12$ و $a \mid b$ ، آن‌گاه کدام رابطه درست نیست؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

- $4 \mid b$ (۱) $a \mid 2b$ (۲) $a \mid 84$ (۳) $2a \mid b$ (۴)

۴۷- اگر $a \mid 25$ و $a \mid 55$ ، آن‌گاه a چند مقدار صحیح می‌تواند بپذیرد؟

- ۱۶ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۴۸- به ازای چند عدد طبیعی n هر دو رابطه $n^2 \mid 12$ و $n \mid 3600$ برقرار است؟

- ۲۴ (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۳۶ (۴)

۴۹- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x = 2^n \times 3^m$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $\frac{x}{18}$ ، ۱۴ واحد بیشتر است. تعداد مقسوم‌علیه‌های $3x$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های $\frac{x}{9}$ چه قدر بیشتر است؟

- ۱۲ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۴ (اطلاعات مسئله کافی نیست. (۴)

۵۰- اگر n عددی طبیعی باشد که دارای ۳۰ مقسوم‌علیه طبیعی است، n^2 حداکثر چند مقسوم‌علیه دارد؟

- ۵۹ (۱) ۸۷ (۲) ۹۹ (۳) ۱۳۵ (۴)

۵۱- عدد $24! + 10!$ بر چند عدد طبیعی یک‌رقمی بخش پذیر است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۵۲- عدد $24! + 25!$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر نیست؟

- ۱۶۹ (۱) ۱۹۶ (۲) ۲۸۹ (۳) ۳۲۴ (۴)

۵۳- به ازای چند عدد صحیح n ، هر دو رابطه $2n^2 + n \mid 2n^3 + 2$ و $n^3 + 2 \mid 2n^2 + n$ برقرار است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۵۴- به ازای چند مقدار صحیح x ، $a \mid x^2 - 6x + 9$ و $a \mid x^2 - 6x + 9$ است؟

- ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (بی‌شمار (۴)

۵۵- اگر $x^3 - 3x^2 + 3x - 28 \mid x^3 - 3x^2 + 3x - 28$ ، آن‌گاه x چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

- ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (صفر (۱)

۵۶- اگر $3^n \mid 30!$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار n کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

۵۷- برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \dots$ ، مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = 24$ کدام است؟

- ۴۳ (۱) ۴۴ (۲) ۴۵ (۳) ۴۶ (۴)

۵۸- کوچک‌ترین عدد طبیعی n به طوری که $7^{10} \mid n!$ باشد کدام است؟

- ۴۹ (۱) ۵۶ (۲) ۶۳ (۳) ۷۰ (۴)

۵۹- به ازای چند عدد طبیعی n رابطه $2^{n+9} \mid 3^{n-1}$ درست است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) بی شمار

۶۰- اگر $x^2 \mid 12$ ، چند عدد سه رقمی x وجود دارد؟

(۱) ۱۴۹ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۵۱ (۴) ۱۵۲

۶۱- اگر $a^2 \mid 189$ و $512 \mid b^2$ در این صورت کمترین مقدار $a+b$ کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

(۱) ۷۱ (۲) ۷۹ (۳) ۹۵ (۴) ۲۹

۶۲- تعداد اعداد ۴ و ۵ رقمی مضرب ۴۸ که مکعب کامل باشند کدام است؟ ($\sqrt[3]{100} = 4/6$)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۳- برای دو عدد صحیح a و b ($a \neq 0$)، اگر $a \mid b^2$ آن گاه کدام رابطه زیر لزوماً درست است؟

(۱) $a^2 \mid b^5$ (۲) $a^2 \mid b^5$ (۳) $a^4 \mid b^7$ (۴) $a^7 \mid b^{12}$

۶۴- اگر $a^{11} \mid b^{11}$ و $b^{11} \mid c^{11}$ کدام گزینه غلط است؟

(۱) $a^4 \mid c^{11}$ (۲) $a^2 \mid b^5$ (۳) $a \mid c^2$ (۴) $a^5 \mid c^{12}$

۶۵- به ازای چند عدد صحیح مانند a ، دو عدد $3n+4$ و $5n+2$ همواره بر a بخش پذیرند؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۶- دو عدد $2+11k$ و $7k+m$ به ازای مقادیر مختلف k بر عدد صحیح a بخش پذیرند. به ازای کدام m ، عدد a فقط چهار مقدار صحیح دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴) ۶

۶۷- دو عدد $3+2n$ و $2+n+3n^2$ به ازای برخی از مقادیر n بر عدد d بخش پذیرند. کدام می تواند باشد؟

(۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۷ (۴) ۲۳

۶۸- اگر a عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد، به گونه ای که $a \mid 4n-7$ و $a^2 \mid 2n-7$ آن گاه چند مقدار برای a وجود دارد؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۶۹- اگر $2a+3b \mid 11$ ، به ازای چند مقدار k از مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -11 \leq x \leq 11\}$ ، رابطه $6a+kb \mid 11$ لزوماً برقرار است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۰- اگر $5a+9b \mid 3a+4b$ آن گاه کدام یک از اعداد زیر همواره مضرب $3a+4b$ است؟

(۱) $83a$ (۲) $167b$ (۳) $167a$ (۴) $42b$

۷۱- عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ وجود دارد که $4k+1 \mid 7$. اگر $49 \mid 16k^2+36k+m$ کدام می تواند باشد؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۷۲- اگر $7 \mid 3n+1$ ، بزرگترین عددی که عبارت $3n^2+34n+8$ همواره بر آن بخش پذیر است کدام است؟

(۱) ۱۹۶ (۲) ۴۹ (۳) ۹۸ (۴) ۲۸

۷۳- اگر $13 \mid 93m-25$ کدام گزینه درست است؟

(۱) $13 \mid m-1$ (۲) $13 \mid m+1$ (۳) $13 \mid 2m+1$ (۴) $13 \mid 2m-1$

۷۴- اگر $5m+3 \mid 7$ و $3m+7 \mid 11$ کدام گزینه درست است؟

(۱) $77 \mid 15m^2-44m+21$ (۲) $77 \mid 15m^2+44m-21$ (۳) $77 \mid 15m^2-11m+7$ (۴) $77 \mid 15m^2+11m-7$

۷۵- اگر $(x-1)(x-2)(x-3)$ مضرب ۷ باشد، آن گاه مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۷۶- اگر $9x^3-7x^2+12x$ مضرب ۹ باشد، آن گاه مجموع ارقام کوچکترین عدد سه رقمی x مضرب ۵ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۹

معادله عادکردنی

۷۷- روی منحنی $y = \frac{7x-1}{3x-1}$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

(۱) ۶ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۱

۷۸- نقطه (a, b) نقطه ای با مختصات طبیعی روی تابع $yx-y = 5x+3$ است. b کدام عدد نمی تواند باشد؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۷



۷۹- اگر $3 - 4n + n^3 \mid n + 2$ آن گاه n چند مقدار طبیعی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸۰- تعداد مقادیر x و y صحیح که در تابع $y = \frac{x^3 + x + 2}{x + 1}$ صدق می کند، چنداناست؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) بی شمار

۸۱- به ازای چند عدد صحیح n رابطه $2 - n^2 \mid 3n + 2$ برقرار است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۸۲- به ازای چند عدد دورقمی n ، $24 \mid n^3 - n$ برقرار است؟

- (۱) ۴ (۲) ۴۵ (۳) ۵۶ (۴) ۹۰

۸۳- به ازای چند عدد طبیعی دو یا سه رقمی مانند n ، داریم: $3^n \mid n^3$ ؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۴- اگر a عضوی از مجموعه $A = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ باشد، آن گاه به ازای چند مقدار a عدد طبیعی مانند k می توان یافت به گونه ای که رابطه $3 + k^2 \mid a$ برقرار باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

◀ باقی مانده مربع عدد فرد در تقسیم به ۸

۸۵- اگر a عددی صحیح و فرد باشد، آن گاه $7 + a^2$ همواره بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۶ (۳) ۸ (۴) ۹

۸۶- اگر x و y اعدادی صحیح از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ باشند، چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $7 - x^2 = 8y$ قرار دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۶ (۴) ۴

۸۷- اگر a عددی فرد و p عددی اول باشد و $a \mid p + 2$ ، باقی مانده تقسیم $2 + p^2 + 2a^2$ به ۸ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۵

۸۸- اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab فرد باشد، باقی مانده تقسیم $12 + 8(b - 2) + (a + 2)^2$ بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۸۹- اگر p یک عدد فرد باشد، عبارت $1 - p^{16}$ همواره بر 2^n بخش پذیر باشد، حداکثر مقدار n کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

◀ سه اتحاد مهم در بخش پذیری

۹۰- عدد $2^{48} - 3^{48}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر نیست؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۳۵ (۳) ۴۳ (۴) ۶۵

۹۱- عدد $7^{14} + 3^{21}$ بر کدام عدد بخش پذیر است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۷ (۳) ۱۳ (۴) ۱۱

۹۲- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی m ، $1 + 3^m \mid 244$ برقرار است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۹۳- به ازای چند عدد طبیعی $1 \leq n \leq 1200$ ، $344 \mid 7^n - 1$ برقرار است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۴۰۰ (۴) هیچ مقدار

۹۴- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی n ، $3^n - 2^n$ بر ۲۱۱ بخش پذیر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۱۹

۹۵- به ازای چند مقدار طبیعی دورقمی n ، $5 - \frac{n(n+1)}{7} \mid 3 + \frac{n(n+1)}{7}$ برقرار است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۵ (۳) ۳۰ (۴) ۴۵

◀ بزرگترین مقسوم علیه مشترک

۹۶- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۳۷۸ و ۴۶۸ چند مقسوم علیه مثبت دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۴۸



۹۷- اگر m عددی صحیح باشد، حاصل $\frac{(6m^2, 4m)}{|m|}$ چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۸- اگر $2 \mid a$ حاصل $(3a^2, 420)$ چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴)

۹۹- اگر $(a, 18) \neq 1$ ، مجموع مقادیر تکریمی a کدام است؟

۳۰ (۱) ۳۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴)

۱۰۰- اگر $d = (3n + 2, 36)$ باشد؛ بزرگ ترین مقدار d چند مقسوم علیه طبیعی دارد؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

۱۰۱- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی، $(n - 8, 11)$ بزرگ تر از ۱ می شود؟

۸ (۱) ۷ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴)

۱۰۲- به ازای چند مقدار دورقمی n ، رابطه $(n, 36) = 18$ برقرار است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۰۳- اگر $(15a, 21b) = 102$ باشد، حاصل (a, b) است؟

۱۷ (۱) ۳۴ (۲)

۱۰۴- اگر $(a, 9) = 3$ و $(b, 9) = 3$ کدام رابطه زیر همواره درست است؟

$(a + b, 9) = 3$ (۱) $(ab, 27) = 9$ (۲) $(a + b, 9) = 9$ (۳) $(ab, 27) = 27$ (۴)

۱۰۵- به ازای چند عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی ۱۰۰، رابطه $(n, 70) = 2$ برقرار است؟

۴۷ (۱) ۳۳ (۲) ۴۹ (۳) ۳۴ (۴)

۱۰۶- به ازای چند عدد طبیعی کوچک تر یا مساوی ۱۰۰، رابطه $(n, 180) = 6$ برقرار است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۱۰۷- اگر a و b اعدادی طبیعی باشند به طوری که $(a, 7^3 \times 3) = 49$ باشد و $(b, 3^4 \times 7) = 27$ باشد، اگر حاصل $(a^2 b^3, 21^5)$ به صورت $3^x \times 7^y$ باشد، حاصل xy کدام است؟

۲۰ (۱) ۷۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۵ (۴)

۱۰۸- اگر یک عدد طبیعی دلخواه باشد به گونه ای که $(a, 18) = 6$ و $(a, 121) = 11$ ، آن گاه $(a, 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2)$ به ازای مقادیر مختلف a ، چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

۱۰۹- کدام گزینه نادرست است؟

$(5a + 1, 5a + 6) = 1$ (۱) $(7a + 2, 7a + 9) = 1$ (۲) $(3a - 1, 3a + 2) = 1$ (۳) $(2a - 2, 2a + 1) = 1$ (۴)

۱۱۰- اعداد صحیح a و b به گونه ای هستند که $3 \mid a$ و $3 \mid b + 1$. کدام نتیجه گیری همواره درست است؟

$(a, b) = 1$ (۱) $(a, b + 1) = 3$ (۲) $(a + b + 1, 3) = 3$ (۳) $(a + b - 1, 3) = 3$ (۴)

۱۱۱- اگر $d > 1$ و $(a, b) = d$ و $4a^2 - b + 13 \mid d$ ، آن گاه a کدام مقدار می تواند باشد؟

۳۶ (۱) ۳۹ (۲) ۷۲ (۳) ۲۵ (۴)

۱۱۲- اگر b عددی فرد باشد به طوری که $(a, b) = 7$ ، حاصل (b, c) کدام است؟

۱ (۱) ۷ (۲) ۷ یا ۱ (۳) $|c|$ (۴)

۱۱۳- به ازای چند مقدار طبیعی و سه رقمی n ، دو عدد $13n + 6$ و $15n + 7$ نسبت به هم اول اند؟

۹۰۰ (۱) ۴۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۲۲۵ (۴)

۱۱۴- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $13n + 5$ و $7n - 2$ نسبت به هم اول نباشند، آن گاه بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱۰۱ (۱) ۶۱ (۲) ۹ (۳) ۸۱ (۴)

۱۱۵- به ازای چند عدد دورقمی n ، دو عدد $21n + 1$ و $14n + 3$ نسبت به هم اول اند؟

۷۷ (۱) ۸۳ (۲) ۸۴ (۳) ۹۰ (۴)



۱۱۶- اگر دو عدد $7n + 3$ و $5n + 4$ نسبت به هم اول نباشند، کدام نتیجه درست است؟

- (۱) $11 \mid 7n + 3$ (۲) $13 \mid 7n + 3$ (۳) $17 \mid 7n + 3$ (۴) $19 \mid 7n + 3$

۱۱۷- به ازای کدام مقدار a ، دو عدد صحیح $2n + 3$ و $7n + a$ همواره نسبت به هم اول نیستند؟ ($n \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱۵ (۲) ۸ (۳) ۱۱ (۴) ۶

۱۱۸- به ازای چند عدد دورقمی دو عدد $3n + 2$ و $5n - 2$ نسبت به هم اول اند؟

- (۱) ۸۵ (۲) ۵ (۳) ۸۴ (۴) ۸۳

۱۱۹- بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $2n^2 + 3n$ و $3n + 2$ ، برای مقادیر مختلف طبیعی n ، چند مقدار متفاوت می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۲۰- دو عدد $A = 2^5 \times 3^2 \times 5^m \times 7^3 \times 17$ و $B = 2^2 \times 3^6 \times 5^7 \times 7^n \times 13^2$ دارای ۵۳ مقسوم علیه مشترک مثبت و غیر یک هستند. حاصل AB چند مقدار متمایز می تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۲۱- اگر برای دو عدد طبیعی a و b داشته باشیم $(a, b) = 7$ ، حاصل $(2a + 3b, 3a + 4b)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۱۴ (۴) ۲۱

۱۲۲- اگر $(a^2, b^2) - (2^0a, 2^0b) + 100 = 0$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی x هر دو رابطه $x \mid a$ و $x \mid b$ برقرار است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

کوچک ترین مضرب مشترک

۱۲۳- کوچک ترین عضو مجموعه $\{x \in \mathbb{N} : 28 \mid x, 21 \mid x\}$ چند مقسوم علیه غیر اول دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۱۲۴- حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $([385, 186], 341)$

- (۱) ۷۷ (۲) ۲۱۷ (۳) ۳۴۱ (۴) ۳۳

۱۲۵- به ازای چند عدد طبیعی مانند n ، ک.م.م و ب.م.م دو عدد $9 - 7n + n^2$ و ۳ برابر است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

۱۲۶- به ازای چند عدد صحیح m رابطه $[m, m^2], m^3 = 64$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۲۷- حاصل $([12a^3, 4a], (3a^2, 6a^4))$ کدام است؟

- (۱) $3a^2$ (۲) $12a^2$ (۳) $|4a|$ (۴) $|3a|$

۱۲۸- حاصل عبارت $((a, b)[a, b], (a^2, b^2))$ کدام است؟

- (۱) (a, b) (۲) (a^2, b^2) (۳) $[a, b]$ (۴) $[a^2, b^2]$

۱۲۹- حاصل $[18!, 17! - 16! - 15!]$ کدام است؟

- (۱) $18! \times 15$ (۲) $|5! \times 5|$ (۳) $18! \times 5$ (۴) $18! \times 255$

۱۳۰- به ازای کدام مقدار m رابطه $[(24, 18), m] = 90$ درست است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۳۶ (۴) ۴۵

۱۳۱- به ازای چند عدد طبیعی m رابطه $[m, 180] = 900$ برقرار است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

متباین سازی

۱۳۲- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 7$ و $ab = 1764$ باشد، حاصل جمع بیشترین و کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲۲۴ (۲) ۲۳۱ (۳) ۳۵۰ (۴) ۳۴۳

۱۳۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = d$ باشد، حاصل $(\frac{a^2 b^2}{d^2}, [a^2, b^2])$ کدام است؟

- (۱) $|ab|$ (۲) d^2 (۳) $[a^2, b^2]$ (۴) $\frac{a^2 b^2}{d}$

۱۳۴- بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۱۱ و کوچک ترین مضرب مشترک آن ها ۳۳۰ است. مجموع دو عدد کدام نمی تواند باشد؟

- (۱) ۱۲۱ (۲) ۱۸۷ (۳) ۳۴۱ (۴) ۳۵۲



۱۳۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 9$ و $a + b = 126$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار $[a, b]$ کدام است؟

(۱) ۳۶۰ (۲) ۴۰۵ (۳) ۴۳۲ (۴) ۴۴۱

۱۳۶- اگر $2ab = 3(a, b)^2 + 1$ حاصل $a^2 + b^2$ چیست؟ $(a, b \in \mathbb{N})$

(۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۱۷ (۴) چنین چیزی غیرممکن است.

۱۳۷- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) \neq 1$ و $2[a, b] = 41(a, b) + 13$ باشد، مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۱۱۷ (۲) ۱۳۰ (۳) ۱۴۳ (۴) ۱۵۶

۱۳۸- چند زوج عدد طبیعی a و b وجود دارد، به طوری که $a + b = 42$ و $\frac{[a, b]}{(a, b)} = 12$ باشد؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۳۹- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $2a = 7b$ و $2ab + \frac{[a^2, b^2]}{14} = 504$ ، آن‌گاه حاصل (a, b) کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۹

۱۴۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $2a + 3b = 91$ و $[a, b] = 42$ باشد، مجموع ارقام $3a + 4b$ کدام است؟ $((a, b) > 1)$

(۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

◀ اعداد اول

۱۴۱- هر عدد اول بزرگ‌تر از ۵ به کدام صورت نمی‌تواند نوشته شود؟

(۱) $10k + 1$ (۲) $10k + 3$ (۳) $10k + 5$ (۴) $10k + 7$

۱۴۲- اگر p عدد اول و $308 \mid p$ باشد، p چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۱۴۳- اگر a عددی صحیح و p عددی اول باشد به طوری که $\frac{9}{13} = \frac{2a - 4p}{a}$ باشد، حاصل $a + p$ بر کدام عدد اول بخش‌پذیر است؟

(۱) ۱۹ (۲) ۲۳ (۳) ۲۹ (۴) ۶۹

۱۴۴- به ازای چند عدد دورقمی بزرگ‌تر از 80 مانند n رابطه $80! \mid n$ برقرار نیست؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴۵- اگر عدد صحیح a دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی و b دارای ۳ مقسوم‌علیه طبیعی باشد و $(a, b) = 1$ باشد، ba دارای چند مقسوم‌علیه طبیعی است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) نمی‌توان گفت.

۱۴۶- اگر p عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌مانده p^2 بر ۶ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۵ و ۱

۱۴۷- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌مانده p بر ۱۸ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۴۸- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، چه تعداد از اعداد زیر حتماً مرکب هستند؟

(الف) $\frac{p^2 + 1}{2}$ (ب) $\frac{p^2 + 3}{2}$ (پ) $\frac{p^2 + 5}{2}$ (ت) $\frac{p^2 + 7}{2}$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۹- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۲ باشد، کدام یک از عبارات زیر همواره عددی مرکب است؟

(۱) $7p - 6$ (۲) $2^p - 1$ (۳) $2^p + 1$ (۴) $p^2 + 2$

۱۵۰- اگر $n = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times \dots \times 97) + 1$ باشد، به ازای چند مقدار طبیعی دورقمی کوچک‌تر از ۱۰۰ برای $x \mid n$ ؟ n برابر حاصل ضرب اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ به علاوه ۱ است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲۵ (۴) ۲۶

۱۵۱- به ازای چند مقدار طبیعی n ، هر ۵ عدد $n, n + 2, n + 6, n + 8$ و $n + 14$ اول هستند؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۵۲- بزرگ‌ترین عدد اول p که $50! \mid p^3$ باشد، کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۱۳ (۳) ۱۷ (۴) ۴۷

۱۵۳- به ازای چند مقدار صحیح a ، حاصل $12 - 7a + a^2$ عددی اول است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار



۱۵۴- اگر a, b و c اعدادی اول متمایز باشند به طوری که $a + b + c = 14$ باشد، $a^2 + b^2 + c^2$ بر کدام عدد بخش پذیر نیست؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

۱۵۵- چند عدد اول مانند p وجود دارد که عدد $16p + 11$ مربع کامل باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۱۵۶- چند عدد اول مانند p وجود دارد که عدد $p + 27$ مکعب کامل باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۱۵۷- اگر x, y و z اعداد اول متمایز و رابطه $x = y^2 - z^2$ برقرار باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم xyz بر ۷ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۵۸- اگر a, b و c اعداد اول متمایز و رابطه $a = b^2 + c^2$ برقرار باشد، چند مقدار دورقمی برای a وجود دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۵۹- اگر a, b و c اعداد اول متمایز و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

❖ قضیه تقسیم و کاربردها

۱۶۰- در تقسیم چند عدد سه رقمی به ۷، باقی مانده برابر ۲ می شود؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۲۹ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۳۱

۱۶۱- اگر در تقسیمی ۵۰ واحد به مقسوم و ۶ واحد به مقسوم علیه اضافه شود، خارج قسمت تغییری نکرده و باقی مانده ۴ واحد کم شود، خارج قسمت کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۱۶۲- فرض کنید مجموع خارج قسمت و باقی مانده تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۷، عدد ۹ باشد. کدام عدد زیر بر ۱۶ بخش پذیر است؟

- (۱) $a + 3$ (۲) $a + 5$ (۳) $a + 7$ (۴) $a + 9$

۱۶۳- در تقسیم عدد a بر ۱۷، باقی مانده برابر ۷ می باشد. حداقل چند واحد از مقسوم کم کنیم تا باقی مانده برابر ۱۳ شود؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۴

۱۶۴- در یک تقسیم، خارج قسمت برابر ۵ و باقی مانده ۲۴ می باشد. حداکثر چند واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد به شرطی که مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۶۵- در تقسیم عدد a بر ۱۲، باقی مانده ۷ است. اگر ۷۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت m واحد زیاد و باقی مانده n واحد کم می شود. $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۱۶۶- خارج قسمت و باقی مانده تقسیم عدد طبیعی a بر b به ترتیب ۳۱ و ۲۴ می باشد. تعداد عددهای طبیعی سه رقمی a که بر ۵ بخش پذیر باشد کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۶۷- چند عدد سه رقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم بر ۱۱، خارج قسمت مضرب ۵ و باقی مانده مضرب ۷ باشد؟

- (۱) ۶۸ (۲) ۱۷ (۳) ۸۵ (۴) ۳۴

۱۶۸- باقی مانده تقسیم عددی بر ۱۱۷ برابر ۲۸ است. باقی مانده تقسیم آن بر ۱۳ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) ۱۱

۱۶۹- اگر $a = 91k + 23$ باشد، باقی مانده تقسیم $a^3 - 2a^2 - 9$ بر ۷ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۷۰- اگر باقی مانده تقسیم دو عدد a و b بر ۱۷ به ترتیب برابر ۳ و ۵ باشد، باقی مانده تقسیم $2a + 3b + ab$ بر ۱۷ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷۱- باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی $2a$ و $3a$ بر عدد طبیعی x ، به ترتیب ۵ و ۲۳ است. x کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۵۸ (۴) ۵۹



۱۷۲- باقی‌مانده تقسیم عدد زوج a بر ۱۷ برابر ۳ است. باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{4}$ بر ۱۷ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۰

۱۷۳- خارج قسمت تقسیم عدد $7-13!$ بر 13 را به صورت $a! + b$ نوشته‌ایم. $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۰ (۳) ۴ (۴) ۱۱

۱۷۴- در تقسیم عدد ۵۵- بر ۱۲، از مقسوم ۵ واحد کم و به مقسوم‌علیه ۵ واحد اضافه می‌کنیم. باقی‌مانده چه تغییری می‌کند؟

- (۱) سه واحد کم می‌شود. (۲) دو واحد زیاد می‌شود. (۳) سه واحد زیاد می‌شود. (۴) دو واحد کم می‌شود.

۱۷۵- اگر $a = 15q + 7$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $97 - 7a$ بر ۲۱ برابر است.

- (۱) $5q - 2$ و ۶ (۲) $5q - 2$ و ۱۵ (۳) $5q - 3$ و ۶ (۴) $5q - 3$ و ۱۵

۱۷۶- بزرگ‌ترین عدد صحیحی که وقتی بر ۲۶ تقسیم شود، باقی‌مانده ۴ برابر خارج قسمت باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۷۷ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۱۰

۱۷۷- در یک عمل تقسیم، مقسوم‌علیه برابر ۷ و باقی‌مانده یک‌سوم خارج قسمت است. حداکثر مقدار مقسوم کدام است؟

- (۱) ۱۳۰ (۲) ۱۳۲ (۳) ۱۳۹ (۴) ۱۴۶

۱۷۸- در یک تقسیم مقسوم برابر a ، مقسوم‌علیه برابر ۱۷، خارج قسمت برابر q و باقی‌مانده برابر ۷ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم $a + m$ بر ۱۷ برابر ۷ و

خارج قسمت تقسیم $a - n$ بر ۱۷ برابر q می‌باشد. مجموع حداقل مقدار m و حداکثر مقدار n برابر کدام گزینه است؟ (m و n مقادیر طبیعی هستند.)

- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۱۷۹- در تقسیم a بر عدد طبیعی b ، باقی‌مانده ۱۲ و خارج قسمت عدد طبیعی است. چند جواب طبیعی کوچک‌تر و یا مساوی ۲۶ برای a وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸۰- در تقسیم عدد ۴۵۱ بر چند عدد طبیعی، خارج قسمت، برابر ۷ می‌شود؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۸۱- چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم ۶۷ بر هر یک از آن‌ها برابر ۷ باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۱۲

۱۸۲- چند عدد طبیعی a وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۳، از مکعب خارج قسمت بزرگ‌تر است؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۴

۱۸۳- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر b باقی‌مانده بیشترین مقدار خود را داشته باشد و $4a + 15b$ ، آن‌گاه چند مقدار برای b وجود دارد؟ ($b > 1$)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۸۴- در یک تقسیم، مقسوم ۷۰ واحد بیشتر از مقسوم‌علیه و باقی‌مانده برابر ۱۰ است. خارج قسمت این تقسیم حداکثر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۸۵- اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a + 90$ بر عدد طبیعی b ، باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر با ۵ و ۱۵ باشند، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار

b کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۶۴ (۳) ۷۰ (۴) ۷۹

۱۸۶- چند عدد طبیعی وجود دارد که در تقسیم به ۲۰۰ باقی‌مانده آن $\frac{4}{5}$ مربع خارج قسمت آن است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۱۸۷- در تقسیم عدد ۳۶- بر عدد طبیعی b ، باقی‌مانده ۶ واحد کم‌تر از مقسوم‌علیه است. اگر b کم‌ترین عدد قابل قبول باشد، خارج قسمت کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۶ (۳) صفر (۴) ۲۹

۱۸۸- در تقسیم عدد ۲۳۱ بر عدد b ، باقی‌مانده مجذور خارج قسمت است. چند مقدار صحیح برای b موجود است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۸۹- در یک تقسیم، مقسوم برابر ۵۲ و مجموع مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده برابر ۳۲ می‌باشد. چند مقدار متمایز برای باقی‌مانده وجود دارد؟

(مقادیر مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده همگی طبیعی هستند.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۹۰- عدد a در تقسیم بر ۷ خارج قسمت و باقی‌مانده برابر و در تقسیم بر ۱۱ نیز خارج قسمت و باقی‌مانده برابر دارد. مجموع مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴) ۱۲۰

۱۹۱- باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۱۱ و ۱۲ به ترتیب برابر ۴ و ۷ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۳۲ کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۲۹ (۳) ۱۰۳ (۴) ۷



۱۹۲- باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی $a < 200$ بر ۱۳ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۳ است. مجموع ارقام این عدد کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۹۳- a عددی فرد و باقی‌مانده تقسیم a^2 بر ۹ برابر ۴ است. باقی‌مانده تقسیم a^2 بر ۷۲ کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۳۱ (۳) ۴۹ (۴) ۶۷

◀ افراز مجموعه % به کمک قضیه تقسیم

۱۹۴- اگر $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid 2 \mid k+1\}$ و $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid k+1\}$ آن‌گاه مجموعه $A \cap B$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- (۱) $\{6q+3 \mid q \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{6q+4 \mid q \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{6q+2 \mid q \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{6q+5 \mid q \in \mathbb{Z}\}$

۱۹۵- حاصل ضرب دو عدد به شکل $7q+3$ کدام می‌تواند باشد؟ ($q \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۹۱ (۲) ۹۲ (۳) ۹۳ (۴) ۹۴

۱۹۶- باقی‌مانده تقسیم عدد فرد a در تقسیم بر ۱۲ چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۹۷- اگر a عددی فرد باشد که بر ۷ بخش‌پذیر باشد، فرم کلی آن به کدام صورت است؟

- (۱) $21k+14$ (۲) $21k+7$ (۳) $14k+7$ (۴) $7k+1$

۱۹۸- اگر در تقسیم عدد a بر ۷ باقی‌مانده برابر ۲ باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۳۵ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۹۹- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۰، باقی‌مانده برابر ۸ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۰، چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۰۰- اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم p^2 بر ۳۶ چند مقدار متمایز می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۹

۲۰۱- به ازای اعداد صحیح و دلخواه a همواره یکی از اعداد $a+81$ ، $a+28$ ، $a+122$ یا k بر ۴ بخش‌پذیر است. k کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) $a+73$ (۲) $a+74$ (۳) $a+75$ (۴) $a+76$

۲۰۲- به ازای کدام یک از مقادیر زیر برای b عبارت $(4a)(a+17)(a+b)$ به ازای تمامی مقادیر طبیعی a بر ۳ بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۹۵ (۲) ۸۳ (۳) ۴۳ (۴) ۳۶

۲۰۳- کدام گزینه مثال نقضی است برای گزاره «به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳، n^2+2 مضرب ۳ است.»؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۴۱ (۳) ۷۱ (۴) مثال نقض ندارد.

۲۰۴- اگر دو عدد طبیعی x و y بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، باقی‌مانده تقسیم عبارت x^2+y^2+7 به ازای مقادیر صحیح x و y بر ۳ کدام است؟

- (۱) فقط صفر (۲) فقط ۱ (۳) صفر یا ۲ (۴) صفر یا ۱

۲۰۵- اگر a و b دو عدد صحیح باشند که a^2+b^2 بر ۳ برقرار باشد، حاصل $2a-b$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۲۰۶- اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، مربع آن به کدام صورت است؟

- (۱) $16k+1$ (۲) $8k+1$ (۳) $4k+1$ (۴) $4k$ و $8k+1$

۲۰۷- به تصادف عدد صحیح مربع کاملی را انتخاب می‌کنیم. این عدد با چه احتمالی در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده ۴ دارد؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۲۰۸- باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد طبیعی بر ۶ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۰۹- اگر n عددی طبیعی باشد به ازای چند عدد دورقمی n ، 5^n+2 مربع کامل است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳۰ (۴) ۴۵





۴۳-۴ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

۱ درست است.

$$a \mid b \xrightarrow{\text{سمت راست } b \times} a \mid b^2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} a^2 \mid b^4$$

$$a^2 \mid 2a^2 \text{ از طرفی}$$

$$\xrightarrow{(-)} a^2 \mid b^4 - 2a^2$$

۲ درست است.

$$\left. \begin{array}{l} a \mid a \\ a \mid b \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} a \mid a - b \xrightarrow{\text{به توان } 2} a^2 \mid (a - b)^2$$

۳ درست است.

$$a \mid b \xrightarrow{\text{طرفین } b \times} ab \mid b^2 \xrightarrow{\text{سمت راست } 7 \times} ab \mid 7b^2$$

$$ab \mid ab \xrightarrow{\text{سمت راست } 5 \times} ab \mid -5ab$$

$$\xrightarrow{+} ab \mid 7b^2 - 5ab$$

۴ نادرست است. برای مثال اگر $a = 3$ و $b = 6$ باشد، داریم:

$$a^2 \mid b - a^5 \Rightarrow 9 \mid 6 - 3^5$$

۴۴-۳ درست است.

$$abc \mid 2ab + 3ac \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } a} bc \mid 2b + 3c$$

۲ درست است.

$$bc \mid 2b + 3c \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div b} c \mid 2b + 3c$$

$$c \mid 3c \text{ از طرفی}$$

$$\xrightarrow{(-)} c \mid 2b \xrightarrow{\text{سمت راست } 4 \times} c \mid 8b$$

۱ درست است.

$$bc \mid 2b + 3c \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div c} b \mid 2b + 3c$$

$$b \mid 2b \text{ از طرفی}$$

$$\xrightarrow{(-)} b \mid 3c \xrightarrow{\text{سمت راست } 4 \times} b \mid 12c$$

۳ نادرست است. برای مثال اگر $b = c = 5, a = 4$ رابطه صورت سؤال درست

است؛ زیرا $4 \mid 5 + 6 + 10$ ولی $a \mid 2b + 3c$ نادرست است زیرا: $4 \nmid 25$

۴۵-۲ روش اول: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2$

$$(a - b)(a + b) = c^2 \Rightarrow \begin{cases} a - b \mid c^2 \\ a + b \mid c^2 \end{cases}$$

۱ و ۳ درست‌اند.

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 \mid a^2 - b^2 \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div c} c \mid a^2 - b^2$$

$$\xrightarrow{(a^2 + b^2) \times \text{سمت راست}} c \mid a^4 - b^4$$

۴ درست است.

پس ۲ نادرست است.

روش دوم: سه عدد پیدا می‌کنیم که در رابطه داده‌شده صدق کند.

$$\begin{cases} a = 13 \\ b = 5 \\ c = 12 \end{cases} \text{ برای مثال:}$$

۱ $8 \mid 144$ ✓ حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲ $12 \mid 18$ ✗ ۳ $18 \mid 144$ ✓

۴ $12 \mid 13^4 - 5^4 = (13^2 - 5^2)(13^2 + 5^2) = 144 \times 194$ ✓

۴۶-۱ $12 \mid b \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div 3} 4 \mid b$ درست است.

۲ $a \mid 12, 12 \mid b \Rightarrow a \mid b \xrightarrow{\text{سمت راست } 2 \times} a \mid 2b$ درست است.

۴۱-۲ عددی که مضرب ۳ و زوج است یعنی بر ۶ بخش پذیر است، بنابراین:

$$\left[\frac{189}{6} \right] - \left[\frac{30}{6} \right] = 14 - 5 = 9$$

اول مضارب ۶ در فاصله ۱ تا ۸۹ را پیدا می‌کنیم، بعد چون مضارب ۶ از ۳۱ تا ۸۹ را می‌خواهیم مضارب ۶ از ۱ تا ۳۰ را حذف می‌کنیم.

۴۲-۱ هر دو رابطه را ساده می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid (b + 5)^2 \Rightarrow a \mid b^2 + 10b + 25 \\ a \mid (b + 4)(b + 6) \Rightarrow a \mid b^2 + 10b + 24 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid 1$$

پس به ازای دو مقدار a رابطه برقرار است. $\Rightarrow a = \pm 1$





$$10! + 24 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 24 \quad \text{نکته ۳-۵۱}$$

از ۲۴ فاکتور می‌گیریم:

$$24(10 \times 9 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 2 \times 1 + 1)$$

خب این عدد بر ۲۴ بخش‌پذیر است یعنی واضح است که بر ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۹, ۷, ۵ بخش‌پذیر است و با توجه به این که نه ۲۴ و نه A بر هیچ کدام از عددهای ۵, ۷, ۹, ۸ بخش‌پذیر نیستند پس عدد، فقط بر ۶ عدد طبیعی یک‌رقمی بخش‌پذیر است.

$$24! + 24! = 24! \times 24! = 24! \times 26 \quad \text{نکته ۳-۵۲}$$

$$= 24 \times 23 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \times 13 \times 2$$

یک عامل ۱۳ در ۲۴! است و یک عامل در ۲۶ پس عدد بر ۱۶۹ بخش‌پذیر است. می‌دانیم $14^2 = 196$ پس باید ببینیم دوتا عامل ۷ و دوتا عامل ۲ عوامل عبارت است یا نه که البته هست! برای مثال یکی خود عدد ۱۴ و دیگری عددهای ۷ و ۲ که در هم ضرب بشوند می‌شود ۱۹۶.

$17^2 = 289$ اما در این حاصل ضرب فقط یک عامل ۱۷ وجود دارد پس این عدد بر 17^2 بخش‌پذیر نیست و 17^2 پاسخ سؤال است.

و بالآخره $18^2 = 324$ است و این عدد دوتا عامل ۱۸ دارد. برای مثال ضرب عددهای ۱۸, ۲, ۹ می‌شود 18^2 .

$$\text{نکته ۳-۵۳} \quad \text{وقتی هم } a \mid b \text{ و هم } b \mid a \text{ یعنی } a = \pm b \text{ است.}$$

بنابراین هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$n^2 - n - 2n^2 + 2 = 0 \Rightarrow n^2 + 2 = 2n^2 + n \Rightarrow n^2 + 2 = 2n^2 + n \text{ حالت اول}$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n+1) - 2(n-1)(n+1) = 0$$

$$\Rightarrow (n-1)(n+1)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n=-1 \\ n=2 \end{cases}$$

$$n^2 + 2 = -2n^2 - n \Rightarrow n^2 + n + 2n^2 + 2 = 0 \text{ حالت دوم}$$

$$n(n^2+1) + 2(n^2+1) = 0 \Rightarrow (n^2+1)(n+2) = 0 \Rightarrow n = -2$$

پس به ازای ۴ مقدار صحیح n، رابطه برقرار است.

$$\text{نکته ۲-۵۴} \quad \text{دقت کنید گفتیم اگر } a \mid b, \text{ آن گاه } |a| \leq |b|$$

اما در صورت سؤال دقیقاً برعکس این گزاره را داریم، پس فقط در حالتی گزاره $|a| > |b|$ درست است که $b = 0$ باشد. در نتیجه:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ مقدار ۱ فقط}$$

$$\text{نکته ۲-۵۵} \quad \text{رابطه } a \mid 0 \text{ تنها زمانی برقرار است که } a = 0 \text{ باشد.}$$

$$\text{بنابراین: } x^3 - 3x^2 + 3x - 28 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 28 = 0$$

حالا باید این عبارت را یک‌جوری تجزیه کنیم. یک جمله x^3 داریم و یک عدد ثابت ۲۸. اگر فرض کنیم تجزیه عبارت به صورت $(x-a)(x^2+bx+c)$ باشد، پس $ac = 28$ است. واضح است که ۱ ریشه عبارت نیست پس ریشه عبارت ۴ است یا ۷. بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که رابطه به ازای $x = 4$ $4^3 - 3 \times 4^2 + 3 \times 4 - 28 = 0$ برقرار است.

خب حالا عبارت به صورت $(x-4)(x^2+bx+7)$ درمی‌آید. این عبارت را ساده کرده با عبارت صورت سؤال مقایسه می‌کنیم:

$$x^2 + bx^2 + 7x - 4x^2 - 4bx - 28$$

$$= x^2 + (b-4)x^2 + (7-4b)x - 28$$

$$\text{نکته ۳-۵۶} \quad \text{درست است. } a \mid 12 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 7} a \mid 84$$

درست نیست؛ برای مثال به ازای $a = b = 12$ نقض می‌شود.

نکته ۴-۴۷ در این مدل سؤال‌ها بهتر است رابطه اول را تبدیل به تساوی کنیم و در رابطه دوم قرار دهیم.

$$25 \mid a \Rightarrow a = 25q$$

$$22 \mid q \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲۵}} 25q \mid 550 \Rightarrow a \mid 550$$

$$\{1, \pm 2, \pm 11, \pm 22\} = \text{مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۲۲}$$

پس به ازای ۸ عدد رابطه برقرار است.

$$\text{نکته ۱-۴۸} \quad \text{اگر } 12 \mid n^2 \text{ یعنی کسر } \frac{n^2}{12} \text{ عددی صحیح است در این صورت:}$$

$$\frac{n^2}{12} = \frac{n^2}{2^2 \times 3}$$

اگر بخواهیم مخرج با صورت ساده شود، n باید دست کم یک عامل ۲ و یک شمارنده ۳ داشته باشد، به بیان دیگر: $n = 6q$.

$$\text{حالا با توجه به رابطه دوم داریم: } 6q \mid 3600 \xrightarrow{\div 6} q \mid 600$$

$$\text{نکته} \quad \text{می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ برابر است با: } (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \dots (\alpha_k+1)$$

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

بنابراین:

$$600 = 4 \times 2 \times 3 = 24 \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی}$$

$$\text{نکته ۳-۴۹} \quad \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت } x = 2^n \times 3^m \text{ برابر است با:}$$

$$(n+1)(m+1)$$

حال با توجه به این که:

$$\frac{x}{18} = \frac{2^n \times 3^m}{2^1 \times 3^2} = 2^{n-1} \times 3^{m-2}$$

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت } \frac{x}{18} \text{ برابر است با: } n(m-1)$$

اختلاف تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۱۴ ناست، بنابراین:

$$(n+1)(m+1) - n(m-1) = 14$$

$$\Rightarrow mn + m + n + 1 - mn + n = 14 \Rightarrow m + 2n = 13$$

دقت کنید $n \leq 1$ و $2 \leq m$ است و گرنه $\frac{x}{18}$ عددی صحیح نمی‌شود.

$$3x = 2^n \times 3^{m+1} \xrightarrow{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی}} (n+1)(m+2)$$

$$\frac{x}{6} = \frac{2^n \times 3^m}{2 \times 3} = 2^{n-1} \times 3^{m-1} \xrightarrow{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌ها}} nm$$

$$(n+1)(m+2) - nm = mn + m + 2n + 2 - mn$$

$$= m + 2n + 2 = 13 + 2 = 15$$

پس تعداد مقسوم‌علیه‌های $3x$ ، ۱۵ تا از تعداد مقسوم‌علیه‌های $\frac{x}{6}$ بیشتر است.

$$\text{نکته ۴-۵۰} \quad \text{حالت‌های زیادی وجود دارند که ضرب تعدادی عدد برابر ۳۰ می‌شود اما اگر بخواهیم تعداد مقسوم‌علیه‌های } n^2 \text{ بیشترین مقدار خود را بگیرد، باید تا جا دارد ۳۰ را خرد کنیم! یعنی چی؟ یعنی به صورت}$$

$$2 \times 3 \times 5 \text{ در نظر بگیریم. در این صورت: } \alpha_1 + 1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 + 1 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = 2$$

$$\alpha_3 + 1 = 5 \Rightarrow \alpha_3 = 4$$

$$\Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \Rightarrow n^2 = p_1^{\alpha_1^2} p_2^{\alpha_2^2} p_3^{\alpha_3^2}$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } = 3 \times 5 \times 9 = 135$$





پس $-3 = b - 4$ و $2 = 4 - b$ است که از هر دو رابطه نتیجه می‌شود $b = 1$ (این معادله انگار بیشتر سوال ریاضی پایه است تا گسسته اما شما این رو در نظر بگیرید که طراح‌ها ممکن است کرم داشته باشند)

$$(x-4)(x^2+x+7) = 0 \Rightarrow x = 4$$

در این عبارت

$\Delta < 0$ است پس

همواره مثبت است.

پس تنها به ازای یک مقدار صحیح x رابطه برقرار است.

۵۶-۳ نکته برای پیدا کردن توان عدد اول p در تجزیه $n!$ از

دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

حالا پیدا می‌کنیم که در تجزیه $30!$ چند عامل 3 وجود دارد.

$$\left[\frac{30}{3}\right] + \left[\frac{30}{9}\right] + \left[\frac{30}{27}\right] = 10 + 3 + 1 = 14$$

بنابراین اگر بخواهیم $3^n \mid 30!$ برقرار باشد. n حداکثر می‌تواند برابر 14 باشد.

۵۷-۴ پاسخ این سؤال طولانی است اما چون شبیه آن در کنکورهای اخیر آمده مجبوریم این نوع سؤال‌ها را هم یاد بگیریم.

با توجه به نکته گفته‌شده در تست قبل، خیلی سریع برویم دنبال پیدا کردن توان عددهای اول مختلف در تجزیه $24!$:

$$a_1 = \left[\frac{24}{2}\right] + \left[\frac{24}{4}\right] + \left[\frac{24}{8}\right] + \left[\frac{24}{16}\right] = 12 + 6 + 3 + 1 = 22$$

$$a_2 = \left[\frac{24}{3}\right] + \left[\frac{24}{9}\right] = 8 + 2 = 10, \quad a_3 = \left[\frac{24}{5}\right] = 4$$

$$a_4 = \left[\frac{24}{7}\right] = 3, \quad a_5 = \left[\frac{24}{11}\right] = 2, \quad a_6 = \left[\frac{24}{13}\right] = 1$$

$$a_7 = \left[\frac{24}{17}\right] = 1, \quad a_8 = \left[\frac{24}{19}\right] = 1, \quad a_9 = \left[\frac{24}{23}\right] = 1$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10} + \dots$$

$$= 22 + 10 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 0 = 44$$

۵۸-۳ اگر بخواهیم رابطه $n! \mid 7!$ برقرار باشد، باید کوچک‌ترین عدد

$n!$ را طوری پیدا کنیم که کسر $\frac{n!}{7!}$ عددی صحیح شود. به بیان دیگر

$n!$ باید دست کم 10 عامل 7 داشته باشد. مضارب 7 را می‌رویم جلو تا پیدا کنیم اولین عدد فاکتوریلی که 10 عامل 7 دارد، کدام است.

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 7 \times \dots \times 14 \times \dots \times 21 \times \dots \times 28 \times \dots \times 35 \times \dots \times 42$$

$$\times \dots \times 49 \times \dots \times 56 \times \dots \times 63$$

دقت کنید 49 دو عامل 7 دارد. بنابراین کوچک‌ترین عدد $63!$ است.

اما می‌توانیم بررسی هم کنیم.

$$\left[\frac{63}{7}\right] + \left[\frac{63}{49}\right] = 9 + 1 = 10$$

۵۹-۱ رابطه را به کسر تبدیل می‌کنیم. توان 2 در صورت باید بزرگ‌تر یا مساوی توان 2 در مخرج باشد.

$$8^{n-1} \mid 2^{n+9} \xrightarrow{\text{تبدیل کسر}} \frac{2^{n+9}}{8^{n-1}} = \frac{2^{n+9}}{(2^3)^{n-1}} = \frac{2^{n+9}}{2^{3n-3}}$$

$$\Rightarrow n + 9 \geq 3n - 3 \Rightarrow 2n \leq 12 \Rightarrow n \leq 6$$

پس به ازای 6 عدد طبیعی رابطه برقرار است.

۶۰-۲ اول باید ببینیم از $x^2 \mid 12$ چه نتایج می‌توان گرفت. اگر این رابطه

را به کسر تبدیل کنیم، می‌شود $\frac{x^2}{2^2 \times 3}$. قرار است این کسر عدد صحیح باشد،

پس x باید دست کم یک عامل 2 و یک عامل 3 داشته باشد یعنی: $x = 6q$

$$\left[\frac{999}{6}\right] - \left[\frac{99}{6}\right] = 166 - 16 = 150$$

۶۱-۱ هر دو رابطه را به کسر تبدیل می‌کنیم بعد توان‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$189 \mid a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{189} = \frac{a^2}{3^3 \times 7}$$

اگر بخواهیم این کسر عددی صحیح باشد a باید دست کم دو عامل 3 (هون) به 7 داشته باشد و 3 تو مخرج می‌مونه و دست کم یک عامل 7 داشته

باشد، بنابراین: $a_{\min} = 3^2 \times 7 = 63$

$$512 \mid b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{2^9}$$

در این‌جا هم اگر بخواهیم کسر عددی صحیح شود، b باید دست کم سه عامل 2 داشته باشد تا کسر ساده شود بنابراین: $b_{\min} = 2^3 = 8$

$$\min(a+b) = 63 + 8 = 71$$

و در نتیجه:

۶۲-۱ عدد x را فرض می‌کنیم. x باید مضرب 48 باشد، پس

$$x = 48q$$

خب چه عددهایی مکعب کامل‌اند؟ عددهایی که در تجزیه آن‌ها توان همه

عوامل مضرب 3 است؛ بنابراین:

$$x = 48q = 2^4 \times 3 \times q$$

حالا q باید یک‌جوری باشد که توان همه عوامل مضرب 3 شود. بنابراین q

باید حتماً یک 2^2 داشته باشد، یک 3^2 هم داشته باشد و هر عامل دیگری

هم بخواهد داشته باشد باید به صورت توان 3 باشد که $48q$ مربع کامل

شود. یعنی:

$$q = 2^2 \times 3^2 \times p^3$$

که در این صورت x می‌شود:

$$x = 2^6 \times 3^3 \times p^3$$

$$1000 \leq x < 1000000 \Rightarrow 1000 \leq 2^6 \times 3^3 \times p^3 < 1000000$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم}} 10 \leq 2^2 \times 3 \times p < 1000 \sqrt[3]{1000} = 46 \Rightarrow 10 \leq 12p < 46$$

$$\Rightarrow p = 1, 2, 3$$

۶۳-۲ نکته یک نکته خیلی کارراه‌بنداز در درس‌نامه درباره این

نوع سؤال‌ها گفتیم که اگر بخواهیم رابطه زیر برقرار باشد:

$$a^m \mid b^n \Rightarrow a^p \mid b^q$$

باید $np \leq mq$ باشد؛ یعنی:

با این نکته سریع هر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

$$a \mid b^2 \Rightarrow a^3 \mid b^5 \Rightarrow 2 \times 3 \leq 5 \times 1$$

$$a \mid b^2 \Rightarrow a^2 \mid b^5 \Rightarrow 2 \times 2 \leq 5 \times 1$$

$$a \mid b^2 \Rightarrow a^4 \mid b^7 \Rightarrow 2 \times 4 \leq 7 \times 1$$

$$a \mid b^2 \Rightarrow a^7 \mid b^{12} \Rightarrow 7 \times 2 \leq 12 \times 1$$

۶۴-۴ با توجه به نکته گفته‌شده در تست قبل، اگر بخواهیم رابطه

$$11x \leq 49 \Rightarrow x \leq 4/...$$

$a^y \mid b^{11} \Rightarrow a^x \mid b^y$ برقرار باشد، باید:

$$11x \leq 49 \Rightarrow x \leq 4/...$$





پس $b(k-9)$ باید همواره مضرب ۱۱ باشد، بنابراین اگر $k-9$ مضرب ۱۱ باشد رابطه همواره برقرار است.

$$k-9=11q \Rightarrow k=11q+9 \quad \left\{ \begin{array}{l} q=0 \Rightarrow k=9 \\ q=-1 \Rightarrow k=-2 \end{array} \right.$$

$$-11 \leq 11q+9 < 11 \Rightarrow -20 \leq 11q \leq 2 \Rightarrow -\frac{20}{11} \leq q \leq \frac{2}{11}$$

پس به ازای ۲ مقدار k رابطه لزوماً برقرار است.

۷۰-۴ روش اول: کاری که در این مدل سؤال‌ها می‌شود کرد این است که یک بار a و یک بار b را از سمت راست رابطه حذف کنیم تا ببینیم چه می‌شود:

$$\left. \begin{array}{l} 3a+4b \mid 5a+9b \xrightarrow{\times 3} 3a+4b \mid 15a+27b \\ 3a+4b \mid 3a+4b \xrightarrow{\times 5} 3a+4b \mid 15a+20b \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{-} 3a+4b \mid 7b$$

$$\Rightarrow 3a+4b \mid 7b \xrightarrow{\times 6} 3a+4b \mid 42b$$

خب همین‌جا سؤال حل شد و اصلاً لازم نشد b را حذف کنیم.

روش دوم: خیلی ساده فرض می‌کنیم $a=b=1$ در این صورت فقط $42b$ بر $3a+4b$ بخش‌پذیر است.

۷۱-۳ یک کار خوبی که در این مدل سؤال‌ها می‌شود کرد این است که اول کار دو عبارت را تقسیم به هم کرد و خارج قسمت را پیدا کرد. بعد می‌گوییم چرا.

$$\begin{array}{r} 16k^2 + 36k + m \mid 4k+1 \\ 16k^2 + 4k \quad 4k+8 \\ \hline 32k + m \\ 32k + 8 \\ \hline m - 8 \end{array}$$

معمولاً می‌شود ثابت کرد که عدد سمت چپ خارج قسمت و باقی‌مانده را نیز می‌شمارد. نگاه کنید:

$$7 \mid 4k+1 \xrightarrow{(+)} 7 \mid 4k+8$$

$$7 \mid 7$$

حالا دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \mid 4k+1 \xrightarrow{(\times)} 49 \mid 16k+36k+8 \\ 7 \mid 4k+8 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{(+)} 7 \mid m-8 \xrightarrow{(-)} 7 \mid m-1$$

پس m باید طوری باشد که $m-1$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد. در میان گزینه‌ها عدد ۸ این ویژگی را دارد.

روش دوم: یک عدد کوچک پیدا می‌کنیم به طوری که رابطه $7 \mid 4k+1$ برقرار باشد. با کمی دقت می‌شود فهمید $k=-2$ رابطه را برقرار می‌کند. حالا اگر در رابطه دوم به جای k عدد -2 را قرار دهیم، داریم:

$$49 \mid 64-72+m \Rightarrow 49 \mid m-8$$

و رابطه به ازای $m=8$ برقرار است.

۷۲-۱ مثل سؤال قبل اگر دو عبارت را به هم تقسیم کنیم، داریم:

$$\begin{array}{r} 30n^2 + 34n + 8 \mid 3n+1 \\ 30n^2 + 10n \quad 10n+8 \\ \hline 24n + 8 \\ 24n + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

از درستی $7 \mid 3n+1$ می‌شود نتیجه گرفت $7 \mid 10n+8$:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \mid 3n+1 \\ 7 \mid 10n+8 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 7 \mid 13n+9$$

یعنی حداکثر مقدار x می‌تواند برابر ۴ باشد یا به عبارت دیگر رابطه $a^4 \mid b^{11} \Rightarrow a^4 \mid b^4$ رابطه‌ای درست است. حالا:

۱ درست است. $a^4 \mid b^4, b^4 \mid c^{11} \Rightarrow a^4 \mid c^{11}$

۲ درست است. $a^4 \mid b^{11} \Rightarrow a^3 \mid b^5 \Rightarrow 3 \times 11 \leq 5 \times 7$

۳ درست است. $a^4 \mid c^{11} \Rightarrow a \mid c^3 \Rightarrow 11 \leq 12$

۴ نادرست است. $a^4 \mid c^{12} \Rightarrow a^5 \mid c^{12} \Rightarrow 55 \nless 48$

برای این که خیالتان راحت باشد اگر $a=2^{11}$ ، $b=2^{17}$ و $c=2^{49}$ باشد، رابطه‌های صورت سؤال درست می‌شود اما رابطه چهارم نادرست می‌شود.

$$a^5 \mid c^{12} \Rightarrow (2^{11})^5 \mid (2^{49})^{12} \Rightarrow 2^{55} \mid 2^{588} \times$$

۶۵-۳

$$\left. \begin{array}{l} a \mid 4n+3 \xrightarrow{\times 5} a \mid 20n+15 \\ a \mid 5n+2 \xrightarrow{\times 4} a \mid 20n+8 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} a \mid 7$$

$$\Rightarrow a = \pm 1, \pm 7$$

اما دقت کنید $5n+2$ و $4n+3$ همواره بر ۱ و -1 بخش‌پذیرند اما همواره بر ۷ و -7 بخش‌پذیر نیستند. بنابراین فقط به ازای دو مقدار a ، دو عبارت $4n+3$ و $5n+2$ همواره به a بخش‌پذیر است و به ازای برخی مقادیر n نیز می‌تواند بر ۷ و -7 بخش‌پذیر باشد.

۶۶-۲

$$\left. \begin{array}{l} a \mid 7k+m \xrightarrow{\text{سمت راست } 11 \times} a \mid 77k+11m \\ a \mid 11k+2 \xrightarrow{\text{سمت راست } 7 \times} a \mid 77k+14 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} a \mid 11m-14$$

اگر بخواهیم a فقط ۴ مقدار صحیح داشته باشد $11m-14$ حتماً باید یک عدد اول باشد که ۴ مقسوم‌علیه صحیح داشته باشد. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$m=4 \Rightarrow 11m-14=30 \times$$

$$m=3 \Rightarrow 11m-14=19 \checkmark$$

$$m=7 \Rightarrow 11m-14=63 \times$$

$$m=6 \Rightarrow 11m-14=52 \times$$

۶۷-۲ در هر مرحله n را از سمت راست رابطه حذف می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 2n^2+3 \xrightarrow{\times 3} d \mid 6n^2+9 \\ d \mid 3n^2+n+2 \xrightarrow{\times 2} d \mid 6n^2+2n+4 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 2n-5$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 2n-5 \xrightarrow{\text{سمت راست } (2n+5) \times} d \mid 4n^2-25 \\ d \mid 2n^2+3 \xrightarrow{\times 2} d \mid 4n^2+6 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 31$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ یا } 31$$

برای مثال به ازای $n=-13$ هر دو مقدار بر ۳۱ بخش‌پذیرند.

۶۸-۳

$$\left. \begin{array}{l} a^2 \mid 2n-7 \xrightarrow{\text{سمت چپ } +a} a \mid 2n-7 \xrightarrow{\times 2} a \mid 4n-14 \\ a^2 \mid 2n-7 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} a \mid 7 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 7$$

واضح است که به ازای $a = \pm 1$ هر دو رابطه برقرار است اما اگر $a=7$ خواهد بر ۷ بخش‌پذیر باشد، با توجه به این که -7 بر ۷ بخش‌پذیر است پس باید $4n$ و در نتیجه n حتماً بر ۷ بخش‌پذیر باشد در این صورت $2n-7$ نمی‌تواند بر ۴۹ بخش‌پذیر باشد.

۶۹-۲ می‌خواهیم هر دو رابطه برقرار باشد، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} 11 \mid 2a+3b \xrightarrow{\times 3} 11 \mid 6a+9b \\ 11 \mid 2a+3b \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} 11 \mid kb-9b$$





حالا اگر دو رابطه را در هم ضرب کنیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \mid 3n+1 \\ 7 \mid 10n+8 \end{array} \right\} \xrightarrow{(\times)} 49 \mid (3n+1)(10n+8)$$

اما اگر دقت کنید داریم: $(3n+1)(10n+8) = 2(3n+1)(5n+4)$ ؛
خب از یک عامل ۲ که فاکتور گرفتیم؛ هم چنین دقت کنید اگر n زوج باشد $5n+4$
زوج می شود و اگر n فرد باشد $3n+1$ زوج می شود. یعنی $(3n+1)(5n+4)$
همواره زوج است. بنابراین عبارت همواره بر ۴ نیز بخش پذیر است.
خب پس در نتیجه می توان گفت $30n^2 + 34n + 8$ هم بر ۴۹ و هم بر ۴
بخش پذیر است پس همواره بر ۱۹۶ بخش پذیر است.

۷۳-۳ در این نوع سؤال ها خوب است که بگردیم ببینیم دور و بر ۹۳
و ۲۵- چه مضرب هایی از ۱۳ وجود دارد. بعد با استفاده از ویژگی های
بخش پذیری سؤال را ساده کنیم. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 13 \mid 91m \\ 13 \mid 93m-25 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} 13 \mid 2m-25 \quad \left. \begin{array}{l} 13 \mid 2m-25 \\ 13 \mid 26 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 13 \mid 2m+1$$

۷۴-۳

$$\left. \begin{array}{l} 11 \mid 3m+7 \\ 7 \mid 5m+3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو رابطه را در هم ضرب می کنیم.}} 77 \mid 15m^2 + 44m + 21$$

اما چنین چیزی در گزینه ها نیست. با کمی دقت می توان فهمید از آن جایی
که $77 \mid 77m$ می توان این رابطه را از رابطه اصلی کم کرد.

$$\left. \begin{array}{l} 77 \mid 15m^2 + 44m + 21 \\ 77 \mid 77m \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} 77 \mid 15m^2 - 33m + 21$$

حالا دقت کنید می توان از یک عامل ۳ فاکتور گرفت؛ یعنی:

$$15m^2 - 33m + 21 = 3(5m^2 - 11m + 7)$$

این عبارت باید بر ۷۷ بخش پذیر باشد. ۳ که با ۷۷ عامل مشترک بزرگ تر از
۱ ندارد، بنابراین $5m^2 - 11m + 7$ باید بر ۷۷ بخش پذیر باشد.

۷۵-۴ $(x-1)(x-2)(x-3)$ مضرب ۷ است. این سه عدد
متوالی اند. بنابراین یا ۱- x مضرب ۷ است یا ۲- x و یا ۳- x ؛ بنابراین:

$$x-1=7q \Rightarrow x=7q+1$$

$$x-2=7q' \Rightarrow x=7q'+2$$

$$x-3=7q'' \Rightarrow x=7q''+3$$

پس اگر عددی در تقسیم به ۷ باقی مانده ای برابر ۱ یا ۲ یا ۳ داشته باشد
عبارت بر ۷ بخش پذیر است. حال با توجه به این که بزرگ ترین عدد دورقمی
۹۹ است که در تقسیم به ۷ باقی مانده ای برابر ۱ دارد، پس خود ۹۹ پاسخ
مسئله است.

۷۶-۳ حل این سؤال دقت زیادی می خواهد. ابتدا عبارت
 $12x^3 - 7x^2 + 12x$ را تجزیه می کنیم:

$$12x^3 - 7x^2 + 12x = x(x^2 - 7x + 12) = x(x-3)(x-4)$$

حال $(x-3)(x-4)$ مضرب ۹ است، پس حالات زیر را در نظر می گیریم:

$$x=9q \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵}} x=135$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 9$$

حالت دوم: $x-3=9q' \Rightarrow x=9q'+3$ مضرب ۹ باشد:

$$3 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 120 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵}}$$

حالت سوم: $x-4$ مضرب ۹ باشد: $x=9q''+4$

$$4 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 130 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵}}$$

حالت چهارم: اما دقت کنید! ۹ عدد مرکب است پس این حالت را هم باید در نظر
بگیریم که تا از عوامل x ، $x-3$ و $x-4$ مضرب ۳ باشند، که برای این منظور
تنها حالتی قبول است که x و $x-3$ مضرب ۳ باشند، یعنی $x=9q''+6$.

دقت کنید که وقتی x مضرب ۳ است اگر بخواهیم باقی مانده آن را بر ۹
بنویسیم سه حالت رخ می دهد:

$$x=9q$$

$$x=9q'+3$$

دو حالت $x=9q$ و $x=9q'+3$ را قبلاً بررسی کردیم. بنابراین فقط باید
حالت $x=9q''+6$ را در نظر بگیریم:

$$105 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵}} x=9q''+6$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 6$$

بنابراین کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵ که در معادله صدق می کند،
 $x=105$ است با مجموع ارقام ۶.

روش دوم: اعداد صحیح به یکی از صورت های $9t+1$ ، $9t+2$ ، $9t+3$ ، ... و
 $9t+8$ هستند که اگر آن ها را در عبارت $(x-3)(x-4)$ قرار دهیم
فقط به ازای $x=9t+3$ ، $x=9t+4$ ، $x=9t+6$ و $x=9t+8$ بر ۹
بخش پذیر هستند:

$$x=9t \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵}} x=135$$

$$x=9t+3 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵}} x=120$$

$$x=9t+4 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵}} x=130$$

$$x=9t+6 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵}} x=105$$

که در بین اعداد بالا کوچکترین عدد ۳ رقمی مضرب ۵، $x=105$ است
که مجموع ارقام آن ۶ می باشد.

۷۷-۴ نقاط روی منحنی $y = \frac{7x-1}{3x-1}$ هنگامی طبیعی هستند که x

و y طبیعی باشند، یعنی $\frac{7x-1}{3x-1}$ طبیعی باشد، پس:

$$3x-1 \mid 7x-1 \xrightarrow{\text{ریشه عبارت سمت چپ در عبارت سمت راست}} 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x-1 \mid 7 \times \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow 3x-1 \mid \frac{4}{3} \Rightarrow 3x-1 \mid 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x-1=4 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \text{ طبیعی نیست } x \\ 3x-1=-4 \Rightarrow x=-1 \text{ طبیعی نیست } x \\ 3x-1=2 \Rightarrow x=1, y=3 \checkmark \\ 3x-1=-2 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \text{ طبیعی نیست } x \\ 3x-1=1 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \text{ طبیعی نیست } x \\ 3x-1=-1 \Rightarrow x=0 \text{ طبیعی نیست } x \end{array} \right.$$

بنابراین روی منحنی $y = \frac{7x-1}{3x-1}$ تنها یک نقطه با مختصات طبیعی
وجود دارد.

روش دوم: سعی می کنیم x را از سمت راست حذف کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 3x-1 \mid 7x-1 \xrightarrow{\times 3} 3x-1 \mid 21x-3 \\ 3x-1 \mid 3x-1 \xrightarrow{\times 7} 3x-1 \mid 21x-7 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} 3x-1 \mid 4$$

ادامه مانند روش اول.



$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} x+1 \mid 2x+2$$

$$\begin{cases} x+1 \mid 2x+2 \xrightarrow{\times 1} x+1 \mid 2x+2 \\ x+1 \mid x+1 \xrightarrow{\times 2} x+1 \mid 2x+2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x+1 \mid 0$$

که عبارت فوق به ازای بی شمار مقدار صحیح x برقرار است.

روش دوم:

$$x+1 \mid x^2+x+2 \xrightarrow{\text{ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم.}} x+1 \mid 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow x+1 \mid 0$$

ادامه مانند روش اول.

روش سوم:

$$y = \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{x^2+1+x+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)+(x+1)}{x+1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{x+1} = x^2-x+2 \Rightarrow y = x^2-x+2$$

که بی شمار نقطه با مختصات صحیح در معادله فوق صدق می‌کند.

۸۱-۱ سعی می‌کنیم n را از سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} n^2-2 \mid 3n+2 \xrightarrow{\times 3n-2} n^2-2 \mid 9n^2-4 \\ n^2-2 \mid n^2-2 \xrightarrow{\times 9} n^2-2 \mid 9n^2-18 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} n^2-2 \mid 14$$

$$\begin{cases} n^2-2=14 \Rightarrow n^2=16 \Rightarrow n=\pm 4 \\ n^2-2=-10 \Rightarrow n^2=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2-2=7 \Rightarrow n^2=9 \Rightarrow n=\pm 3 \\ n^2-2=-7 \Rightarrow n^2=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2-2=2 \Rightarrow n^2=4 \Rightarrow n=\pm 2 \\ n^2-2=-4 \Rightarrow n^2=-2 \end{cases}$$

$$n^2-2=1 \Rightarrow n^2=3 \quad \times$$

$$\begin{cases} n^2-2=-1 \Rightarrow n^2=1 \Rightarrow n=\pm 1 \\ n^2-2=-9 \Rightarrow n^2=-7 \end{cases}$$

$$n^2-2=-2 \Rightarrow n^2=0 \Rightarrow n=0 \Rightarrow -2 \mid 2 \quad \checkmark$$

$$n^2-2=-7 \Rightarrow n^2=-5 \quad \times$$

$$n^2-2=-14 \Rightarrow n^2=-12 \quad \times$$

دقت کنید که بهتر است جوابها در معادله اصلی چک شوند، برای مثال به ازای

$$n = -4 \text{ داریم } n^2-2=14 \text{ اما } 3n+2=-10 \text{ است که } -10 \nmid 14.$$

$$\text{بنابراین معادله } n^2-2 \mid 3n+2 \text{ به ازای}$$

$$n = 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -13, -14, -15, -16, -17, -18, -19, -20, \dots$$

روش دوم:

نکته ابتدا دقت کنید که در درس نامه گفتیم اگر $a \mid b$ آن گاه $|a| \leq |b|$.

برای سؤالاتی از این روش استفاده می‌کنیم که روند رشد عبارت سمت چپ بیشتر از عبارت سمت راست است:

$$n^2-2 \mid 3n+2 \Rightarrow |n^2-2| \leq |3n+2|$$

۷۸-۱ ابتدا y را تنها می‌کنیم:

$$yx-y=5x+3 \Rightarrow y(x-1)=5x+3 \Rightarrow y=\frac{5x+3}{x-1}$$

x و y طبیعی هستند، پس:

$$x-1 \mid 5x+3 \xrightarrow{\text{ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم.}} x-1 \mid 0$$

$$\Rightarrow x=1 \Rightarrow x-1 \mid 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=8 \Rightarrow x=9 \Rightarrow y=6 \\ x-1=4 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=7 \\ x-1=2 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=9 \\ x-1=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=13 \\ x-1=-1 \\ x-1=-2 \\ x-1=-4 \\ x-1=-8 \end{cases} \quad \times \text{ طبیعی نیست.}$$

بنابراین b می‌تواند برابر مقادیر $6, 7, 9, 13$ باشد.

روش دوم: سعی می‌کنیم x را از سمت راست حذف کنیم.

$$\begin{cases} x-1 \mid 5x+3 \\ x-1 \mid x-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x-1 \mid 4$$

ادامه راه حل مانند روش اول.

$$n+2 \mid n^2-4n+3$$

۷۹-۲

باید n را از سمت راست حذف کنیم:

$$\begin{cases} n+2 \mid n^2-4n+3 \xrightarrow{\times 1} n+2 \mid n^2-4n+3 \\ n+2 \mid n+2 \xrightarrow{\times n^2} n+2 \mid n^3+2n^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} n+2 \mid 2n^2+4n-3$$

$$\begin{cases} n+2 \mid 2n^2+4n-3 \xrightarrow{\times 1} n+2 \mid 2n^2+4n-3 \\ n+2 \mid n+2 \xrightarrow{\times 2n} n+2 \mid 2n^2+4n \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} n+2 \mid 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+2=3 \Rightarrow n=1 \quad \checkmark \Rightarrow 3 \mid 3 \\ n+2=1 \Rightarrow n=-1 \quad \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+2=-1 \Rightarrow n=-3 \quad \times \\ n+2=-3 \Rightarrow n=-5 \quad \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+2=3 \Rightarrow n=1 \quad \checkmark \Rightarrow 3 \mid 3 \\ n+2=1 \Rightarrow n=-1 \quad \times \\ n+2=-1 \Rightarrow n=-3 \quad \times \\ n+2=-3 \Rightarrow n=-5 \quad \times \end{cases}$$

روش دوم: خیلی راحت‌تر می‌توانیم ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت

راست قرار بدهیم:

$$n+2 \mid n^2-4n+3 \Rightarrow n+2=0 \Rightarrow n=-2$$

$$\Rightarrow n+2 \mid 3$$

ادامه مانند روش اول.

۸۰-۴ باز هم x و y صحیح هستند، پس:

$$\begin{cases} x+1 \mid x^3+x+2 \xrightarrow{\times 1} x+1 \mid x^3+x+2 \\ x+1 \mid x+1 \xrightarrow{\times x^2} x+1 \mid x^3+x^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} x+1 \mid x^2-x-2$$

$$\begin{cases} x+1 \mid x^2-x-2 \xrightarrow{\times 1} x+1 \mid x^2-x-2 \\ x+1 \mid x+1 \xrightarrow{\times x} x+1 \mid x^2+x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} x+1 \mid 2x-2$$





دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$n^4 - 4n^2 + 4 \leq 9n^2 + 12n + 4 \Rightarrow n^4 - 13n^2 - 12n \leq 0$$

$$\Rightarrow n(n^2 - 13n - 12) \leq 0 \Rightarrow n(n+1)(n^2 - n - 12) \leq 0$$

$$\Rightarrow n(n+1)(n-4)(n+3) \leq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & -3 & & -1 & & 0 & & 4 \\ + & | & - & | & + & | & - & | & + \end{array}$$

$$\Rightarrow n \in [-3, -1] \cup [0, 4], n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

حال باید همانند روش اول اعداد فوق را در معادله چک کنیم.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$$

می‌دانیم حاصل ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۳ است، پس کافی است $n^3 - n$ مضرب ۸ باشد تا مضرب ۲۴ شود. حالا برای n دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow (n-1)n(n+1)$$

$$= 2k(2k+1)(2k+2) = 4k(2k+1)(k+1)$$

$$= 4k(k+1)(2k+1) \Rightarrow \text{همواره مضرب ۸ است.}$$

زوج

به ازای ۴۵ عدد فرد دورقمی $n^3 - n$ مضرب ۲۴ می‌شود.

حالت دوم: اگر n زوج باشد:

$$n = 2k \Rightarrow (n-1)n(n+1) = (2k-1)2k(2k+1)$$

$2k-1$ و $2k+1$ فرداند، پس برای این که عدد مضرب ۸ شود، k باید

مضرب ۴ باشد، یعنی n باید مضرب ۸ شود که $11 = \left[\frac{99}{8}\right] - \left[\frac{9}{8}\right]$ عدد

دورقمی مضرب ۸ داریم، پس جواب $45 + 11 = 56$ می‌شود.

۸۳-۴ عدد 3^n را ببینید. فقط عامل سه دارد؛ یعنی فقط بر اعداد

3^m که $0 \leq m \leq n$ است، بخش پذیر می‌باشد؛ یعنی n باید توانی از ۳

باشد. توان‌های ۳ که دو یا سه رقمی هستند را امتحان می‌کنیم:

$$n = 27 \Rightarrow (27)^3 \mid 3^{27} \Rightarrow 3^9 \mid 3^{27} \quad \checkmark$$

$$n = 81 \Rightarrow (81)^3 \mid 3^{81} \Rightarrow 3^{12} \mid 3^{81} \quad \checkmark$$

$$n = 243 \Rightarrow (243)^3 \mid 3^{243} \Rightarrow 3^{15} \mid 3^{243} \quad \checkmark$$

$$n = 729 \Rightarrow (729)^3 \mid 3^{729} \Rightarrow 3^{18} \mid 3^{729} \quad \checkmark$$

بنابراین به ازای ۴ مقدار طبیعی ۲ یا ۳ رقمی، $n^3 \mid 3^n$.

۸۴-۲ به ازای $a = 3$ ، $n = 1$ می‌شود، پس:

$$a \mid k^2 + 3 \Rightarrow 3 \mid k^2 + 3$$

که عبارت فوق به ازای k های مضرب ۳ برقرار است.

اما اگر $n \geq 2$ باشد، $a = 9, 27, 81, \dots$ ، یعنی $a = 9t$ است. حال

می‌دانیم هر عددی مثل k در تقسیم به ۳، سه حالت دارد:

$$(1) \text{ یا بر } 3 \text{ بخش پذیر است. } k = 3q$$

$$(2) \text{ یا بر } 3 \text{ باقی‌مانده } 1 \text{ دارد. } k = 3q + 1$$

$$(3) \text{ یا بر } 3 \text{ باقی‌مانده } 2 \text{ دارد. } k = 3q + 2$$

در هر سه حالت $k^2 + 3$ را پیدا می‌کنیم: $k = 3q \Rightarrow k^2 + 3 = 9q^2 + 3$

$$k = 3q + 1 \Rightarrow k^2 + 3 = 9q^2 + 6q + 4$$

$$k = 3q + 2 \Rightarrow k^2 + 3 = 9q^2 + 12q + 7$$

همان‌طور که می‌بینید هیچ کدام از این عبارت‌ها مضرب ۹ نیستند؛ پس

$$a \mid k^2 + 3, n \geq 2 \text{ یعنی به ازای } 9t \mid k^2 + 3$$

(به طور راحت‌تری هم همین‌ها رو می‌شه گفت. نگاه کن اگر k مضرب ۳ باشه، k^2 می‌شه

مضرب ۹ پس $k^2 + 3$ درجه نمی‌تونه به ۹ بخش پذیر باشه. آگه هم k مضرب ۳ نباشه،

k^2 هم مضرب ۳ نیست. $k^2 + 3$ حتی مضرب ۳ هم نیست چه برسه مضرب ۹).

۸۵-۳ اگر a عددی صحیح و فرد باشد، مربع آن به صورت

$$a^2 = 8t + 1 \text{ می‌باشد.}$$

پس: همواره به ۸ بخش پذیر است $\rightarrow a^2 + 7 = 8t + 8 = 8(t+1)$

به ازای $a = 1$ ، $a^2 + 7 = 8$ است که مثال نقضی برای مابقی گزینه‌هاست.

۸۶-۴ ابتدا y را تنها می‌کنیم:

$$8y - x^2 = 7 \Rightarrow 8y = x^2 + 7 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 7}{8}$$

x و y اعدادی صحیح هستند، پس:

حالا دقت کنید هر عدد صحیح x به یکی از دو صورت زیر است:

$$(1) \quad x = 2t \text{ که در این حالت } x^2 = 4t^2 \text{ و } x^2 + 7 = 4t^2 + 7 \text{ که بر } 8$$

بخش پذیر نمی‌باشد.

$$(2) \quad x = 2t + 1 \text{ که در این حالت } x^2 = 4t^2 + 4t + 1$$

به صورت $x^2 = 4t^2 + 4t + 1$ نوشته می‌شود، پس $x^2 + 7 = 4t^2 + 4t + 8$ است

که بر ۸ بخش پذیر می‌باشد.

بنابراین $x^2 + 7$ به ازای اعداد $x = 2t + 1$ یا به بیان دیگر اعداد فرد

صحیح است که مجموعه A شامل ۵ عدد فرد می‌باشد. اما دقت کنید به

ازای $x = 9$ ، $y = 11$ می‌شود که در A نیست، پس جواب ۴ می‌شود.

۸۷-۴ a عددی فرد است و $a \mid p^2 + 2$ پس $p^2 + 2$ هم باید عددی فرد

باشد (زیرا یک عدد فرد به یک عدد زوج بخش پذیر نیست)، بنابراین a و p

هر دو اعداد فرد هستند، پس مربع آن‌ها در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده ۱ دارد:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= 8t + 1 \Rightarrow 2a^2 = 16t + 2 \\ p^2 &= 8k + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a^2 + p^2 + 2$$

$$= 16t + 2 + 8k + 1 + 2 = 2a^2 + p^2 + 2 = 16t + 8k + 5 = 8(2t + k) + 5$$

پس باقی‌مانده تقسیم عدد فوق بر ۸ برابر ۵ می‌باشد.

۸۸-۳ a و b دو عدد صحیح هستند که ضربشان فرد است، پس a و

b هر دو فرد هستند، بنابراین $a + 2$ نیز عددی فرد است، پس مربع آن به

صورت $(a+2)^2 = 8t + 1$ نوشته می‌شود:

$$(a+2)^2 + 8(b-2) + 12 = 8t + 1 + 8(b-2) + 8 + 4$$

$$= 8t + 8(b-2) + 8 + 5$$

$$\Rightarrow (a+2)^2 + 8(b-2) + 12 = 8(t+b-2+1) + 5$$

پس باقی‌مانده تقسیم $(a+2)^2 + 8(b-2) + 12$ بر ۸ برابر ۵ می‌باشد.

۸۹-۳ ابتدا $p^{16} - 1$ را تجزیه می‌کنیم:

$$p^{16} - 1 = (p^8 - 1)(p^8 + 1) = (p^4 - 1)(p^4 + 1)(p^8 + 1)$$

$$= (p^2 - 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1)(p^8 + 1)$$

حال طبق گفته سؤال p عددی فرد است، پس مربع آن به صورت $p^2 = 8t + 1$

$$p^2 = 8t + 1$$

نوشته می‌شود:

$$\Rightarrow p^4 = (8t + 1)^2 = 64t^2 + 16t + 1 = 8(8t^2 + 2t) + 1 = 8k + 1$$

$$\Rightarrow p^4 = 8k + 1 \Rightarrow p^8 = (8k + 1)^2 = 64k^2 + 16k + 1$$

$$= 8(8k^2 + 2k) + 1 = 8m + 1 \Rightarrow p^8 = 8m + 1$$

$$p^{16} - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1)(p^8 + 1)$$

$$= (8t + 1 - 1)(8t + 1 + 1)(8k + 1 + 1)(8m + 1 + 1)$$

$$= \frac{8t}{2} \cdot \frac{(8t+2)}{2} \cdot \frac{(8k+2)}{2} \cdot \frac{(8m+2)}{2}$$

(فقط ۱ عامل ۲) (فقط ۲ عامل ۲) (فقط ۱ عامل ۲) (فقط ۲ عامل ۲)

پس $p^{16} - 1$ حداکثر ۶ عامل ۲ دارد، بنابراین بزرگ‌ترین مقدار n که به ازای

آن $p^{16} - 1$ همواره بر 2^n بخش پذیر باشد $n = 6$ می‌باشد.



حال n باید مضرب صحیحی از ۵ باشد، یعنی: $n = 5t$

مقادیر دورقمی n مدنظر است، پس: $10 \leq 5t \leq 99$

$$\Rightarrow 2 \leq t \leq 19/8 \Rightarrow t = 2, 3, 4, \dots, 19 \rightarrow \text{مقدار } 18$$

بنابراین ۱۸ عدد دورقمی بخش پذیر بر ۵ داریم.

$$\frac{n(n+1)}{\frac{7}{n}} = \frac{n(n+1)}{7} \quad \text{باید مضرب زوجی از } n \text{ باشد، به بیان دیگر} \quad \frac{n(n+1)}{7} \quad \text{باید عددی زوج باشد، بنابراین:}$$

$$\frac{n(n+1)}{\frac{7}{n}} = \frac{n+1}{7} = 2t \Rightarrow n+1 = 14t \Rightarrow n = 14t - 1$$

حال مقادیر دورقمی n مدنظر است، پس:

$$10 \leq 14t - 1 \leq 99 \Rightarrow 11 \leq 14t \leq 100 \Rightarrow 0/7 \leq t \leq 7/1$$

$$\Rightarrow t = 1, 2, 3, \dots, 7 \rightarrow \text{مقدار } 7$$

۹۶-۲ روش اول: دو عدد را تجزیه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} 468 &= 2^2 \times 3^2 \times 13 \\ 378 &= 2^1 \times 3^3 \times 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (468, 378) = 2^1 \times 3^2$$

$$\Rightarrow (1+1)(2+1) = 6 \rightarrow \text{مقسوم علیه}$$

q	۱	۴	۵
۴۶۸	۳۷۸	۹۰	م.م.ب
r	۹۰	۱۸	۰

روش دوم: اگر دیدید عددها خوب تجزیه

نمی شوند. برای پیدا کردن م.م.ب دو عدد

می توانیم از روش نردبانی استفاده کنیم.

$$\Rightarrow (468, 378) = 18 = 3^2 \times 2^1$$

$$(2+1)(1+1) = 6 \rightarrow \text{تعداد مقسوم علیه های مثبت}$$

$$(ax, bx) = |x|(a, b) \quad \text{۹۷-۲ ابتدا دقت کنید می دانیم:}$$

$$(6m^2, 4m) = (2m \times 3m, 2m \times 2) = 2|m|(3m, 2) \quad \text{پس:}$$

$$\Rightarrow \frac{(6m^2, 4m)}{|m|} = 2(3m, 2)$$

حال دو حالت داریم:

(۱) اگر m عددی زوج یعنی $m = 2t$ باشد، داریم:

$$2(3m, 2) = 2(3 \times 2t, 2) = 4(3t, 1) = 4$$

(۲) اگر m عددی فرد یعنی $m = 2t + 1$ باشد، داریم:

$$2(3m, 2) = 2(3(2t+1), 2) = 2(6t+3, 2) = 2$$

$$\text{بنابراین حاصل } \frac{(6m^2, 4m)}{|m|} \text{ یکی از مقادیر } 2 \text{ و } 4 \text{ است.}$$

$$2|a| \Rightarrow a = 2t \quad \text{۹۸-۲ ابتدا } 2|a| \text{ را به تساوی تبدیل می کنیم:}$$

حال با جای گذاری در $(3a^2, 420)$ داریم: $(3a^2, 420)$ (می دانیم $(ax, bx) = |x|(a, b)$):

$$(3a^2, 420) = (3 \times 4t^2, 2^2 \times 3 \times 5 \times 7) = 12(t^2, 5 \times 7)$$

دقت کنید t عددی صحیح است که می تواند عوامل اول مختلفی داشته باشد اما در بین عوامل اول t ، تنها عامل های ۵ و ۷ به درد می خورند، پس ۴ حالت در نظر می گیریم:

(۱) t نه عامل ۵ و نه عامل ۷ داشته باشد، که در این صورت $(t^2, 5 \times 7) = 1$ است.

(۲) t عامل ۵ داشته باشد ولی عامل ۷ نداشته باشد، که در این صورت $(t^2, 5 \times 7) = 5$ است.

(۳) t عامل ۵ نداشته باشد ولی عامل ۷ داشته باشد، که در این صورت $(t^2, 5 \times 7) = 7$ است.

۹۰-۳ نکته می دانیم n اگر مضرب زوجی از t باشد، $a^n - b^n$ هم بر $a^t - b^t$ و هم بر $a^t + b^t$ بخش پذیر است.

۴۸ مضرب زوجی از ۲ است، پس: $3^{48} - 2^{48} = (3^2)^{24} - (2^2)^{24}$

$3^{48} - 2^{48}$ هم بر $3^2 - 2^2 = 5$ و هم بر $3^2 + 2^2 = 13$ بخش پذیر است.

(بر ۴ بخش پذیر است.) $3^{48} - 2^{48} = (3^3)^{16} - (2^3)^{16}$

۴۸ مضرب زوجی از ۳ است، پس $3^{48} - 2^{48}$ هم بر $3^3 - 2^3 = 19$ و هم

بر $3^3 + 2^3 = 35$ (بر ۱ و ۲ هم بخش پذیر است.)

۹۱-۱ نکته می دانیم اگر x مضرب فردی از t باشد، $a^n + b^n$ بر $a^t + b^t$ بخش پذیر است.

در این نوع سؤال ها اول باید توان ها را یکسان کنیم:

$$3^{21} + 7^4 = (3^3)^7 + (7^2)^4 = 27^7 + 49^4$$

۷ مضرب فردی از ۱ است، پس $27^7 + 49^4$ بر $27^1 + 49^1 = 76$ یعنی بر 4×19 بخش پذیر است.

۹۲-۱ با کمی دقت می توان فهمید $1 + 3^5 = 244$. حال اتحاد های

بخش پذیری را در ذهنتان یک لحظه مرور کنید. با توجه به این کسر

$$1 + 3^m \mid a^n + b^n \quad \text{به نظر شما از کدام اتحاد باید استفاده کنیم؟ بله}$$

$$a \text{ را برابر } 3^5 \text{ و } b \text{ را برابر یک فرض می کنیم، داریم: } (3^5)^{2k+1} + 1 \mid 1 + 3^5$$

(دقت کنید چون n فرد است به صورت $2k+1$ نوشتیم.)

$$\Rightarrow 244 \mid 1 + 3^{10k+5}$$

حالا این را با رابطه صورت سؤال مقایسه کنید، به راحتی می توان متوجه

شد که m باید به صورت $10k+5$ باشند. داریم:

$$10 \leq 10k+5 \leq 99 \Rightarrow 5 \leq 10k \leq 94 \Rightarrow 0/5 \leq k \leq 9/4$$

پس رابطه به ازای $k = 1, 2, 3, \dots, 9$ یعنی ۹ عدد برقرار است.

$$3^5 + 1 \mid 3^m + 1 \quad \text{روش دوم: دیدیم:}$$

$$\frac{m}{5} = 2k+1 \Rightarrow m = 10k+5 \quad \text{پس } m \text{ مضرب فرد } 5 \text{ است، یعنی } m = 10k+5$$

ادامه مانند روش اول.

$$۹۳-۲ \quad \text{با کمی دقت می توان فهمید } 1 + 7^3 = 344, \text{ حال دقت کنید}$$

۹۰-۳ نکته می دانیم $a^t + b^t \mid a^n - b^n$ اگر $\frac{n}{t}$ زوج باشد.

حال داریم:

$$7^3 + 1 \mid 7^n - 1 \quad \text{پس } n \text{ باید مضرب زوج } 3 \text{ باشد، پس:}$$

$$\frac{n}{3} = 2k \Rightarrow n = 6k$$

$$6k \leq 1200 \Rightarrow k \leq 200 \Rightarrow k = 1, 2, 3, \dots, 200$$

پس رابطه به ازای ۲۰۰ عدد برقرار است.

۹۴-۲ نکته ابتدا دقت کنید اگر n مضرب صحیحی از t باشد،

$a^n - b^n$ بر $a^t - b^t$ بخش پذیر است.

$$211 \mid 3^n - 2^n$$

اول از همه باید سمت چپ را به صورت توان های ۲ و ۳ بنویسیم:

$$211 = 243 - 32 = 3^5 - 2^5 \Rightarrow 3^5 - 2^5 \mid 3^n - 2^n$$



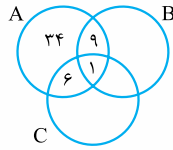


$$n(A) = \left[\frac{100}{2}\right] = 50$$

$$n(A \cap B) = \left[\frac{100}{10}\right] = 10$$

$$n(A \cap C) = \left[\frac{100}{14}\right] = 7$$

$$n(A \cap B \cap C) = \left[\frac{100}{70}\right] = 1$$



بنابراین ۳۴ عدد وجود دارد که بر ۲ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ و ۷ نباشد.
اول از همه اعداد را تجزیه می‌کنیم:

$$(n, 180) = 6 \Rightarrow (n, 2^2 \times 3^2 \times 5^1) = 2^1 \times 3^1$$

پس n فقط ۱ عامل ۲ و فقط ۱ عامل ۳ دارد و عامل ۵ ندارد. یعنی $n = 6t$
است که t عامل ۲ و ۳ و ۵ ندارد. t می‌تواند عوامل دیگر داشته باشد برای مثال:
 $n = 6 \times 7 = 42$ $n = 6 \times 11 = 66$ $n = 6 \times 13 = 78$
از ۱۷ به بعد n عدد بزرگ‌تر از صد است. $n = 6 \times 17 = 102 > 100$
و یا این که هیچ عامل دیگری نداشته باشد $n = 6$. بنابراین n می‌تواند ۳ عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ باشد.

$$a \text{ عامل } 3 \text{ ندارد و دقیقاً } 2 \text{ عامل } 7 \text{ دارد.} \quad \text{۱-۱۰۷}$$

$$(a, 7^3 \times 2) = 49 = 7^2 \Rightarrow 49 \mid a \Rightarrow a = 49q$$

b عامل ۷ ندارد و دقیقاً ۳ عامل ۳ دارد.

$$(b, 3^4 \times 7) = 27 = 3^3 \Rightarrow 27 \mid b \Rightarrow b = 27q'$$

$$(a^2 b^3, 2^{15}) = ((7^2)^2 q^2 \times (3^3)^3 q'^3, 2^{15}) = 7^4 \times 3^5$$

$7^4 \times 3^4 \times q^2 \times q'^3$

بنابراین $x = 5$ و $y = 4$ و در نتیجه $xy = 20$ است.

$$\text{اول از همه عددها را تجزیه می‌کنیم تا ببینیم چه خبر است:} \quad \text{۱-۱۰۸}$$

$$(a, 18) = 6 \Rightarrow (a, 2 \times 3^2) = 2 \times 3$$

که نتیجه می‌شود a حداقل ۱ عامل دو دارد و دقیقاً یک عامل ۳.

$$(a, 121) = 11 \Rightarrow (a, 11^2) = 11$$

بنابراین a دقیقاً یک عامل ۱۱ دارد.

پس در کل a حداقل ۱ عامل ۲، دقیقاً یک عامل ۳ و یک عامل ۱۱ دارد.

$$(a, 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2) = 2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\theta \times 11^\gamma \quad \text{حالا می‌دانیم:}$$

که مشخص است $\beta = 1$ و $\gamma = 1$ می‌باشد (زیرا a فقط ۱ عامل ۳ و یک عامل ۱۱ دارد). اما α دو حالت دارد؛ اگر a فقط یک عامل ۲ داشته باشد $\alpha = 1$ و اگر a بیش از یک عامل ۲ داشته باشد $\alpha = 2$ می‌باشد. برای بررسی θ اگر a عامل ۷ نداشته باشد $\theta = 0$ ، اگر a فقط ۱ عامل ۷ داشته باشد $\theta = 1$ و اگر a بیش از ۱ عامل ۷ داشته باشد $\theta = 2$ می‌باشد. پس در کل α دو حالت، β یک حالت، θ سه حالت و γ یک حالت دارد که طبق اصل ضرب جواب مسئله ۶ مقدار متمایز می‌تواند باشد.

$$\text{تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:} \quad \text{۱-۱۰۹}$$

$$(\Delta a + 1, \Delta a + 6) = d \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \mid \Delta a + 1 \\ d \mid \Delta a + 6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 5$$

$\Rightarrow d = 1$ یا 5

اما d نمی‌تواند ۵ باشد، زیرا $\Delta a + 1$ ، بنابراین $d = 1$ است و ۱ صحیح است.

$$(7a + 2, 7a + 9) = d \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \mid 7a + 2 \\ d \mid 7a + 9 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 7$$

$\Rightarrow d = 1$ یا 7

اما d نمی‌تواند ۷ باشد، زیرا $7a + 2$ ، بنابراین $d = 1$ است و ۲ نیز صحیح است.

(۴) و حالت آخر این که t هم عامل ۵ و هم عامل ۷ داشته باشد، که در این صورت $35 = (5 \times 7, t^2)$ است.

بنابراین حاصل $(t^2, 5 \times 7)$ می‌تواند ۴ مقدار مختلف باشد، که در نتیجه $(3a^2, 420)$ هم می‌تواند ۴ مقدار مختلف باشد.

$$(a, 18) = (a, 2 \times 3^2) \neq 1$$

$$\text{۲-۹۹}$$

بنابراین a دارای عامل اول ۲ یا ۳ می‌باشد که مقادیر تکریمی آن به صورت مقابل است:

$$a = 2, 3, 4, 6, 8, 9$$

$$2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 = 32$$

که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\text{۱-۱۰۰ می‌دانیم:}$$

$$(3n + 2, 36) = d \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \mid 36 \\ d \mid 3n + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow d \mid 2^2 \times 3^2$$

$3n + 2$ عامل ۳ ندارد اما می‌تواند عامل ۴ داشته باشد، پس بزرگ‌ترین مقدار d برابر ۴ است (برای مثال به ازای $n = 2$ ، حاصل $(8, 36) = (4, 36)$ می‌باشد). که ۳ مقسوم‌علیه دارد.

$$\text{۱-۱۰۱ می‌دانیم ۱۱ عدد اول است، بنابراین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه}$$

مشترک یک عدد دیگر با ۱۱ یا برابر ۱ است و یا برابر ۱۱. (برای مثال $(11, 11) = 11$ ولی $(11, 33) = 11$). حالا در این سؤال می‌دانیم

$(n - 8, 11)$ بزرگ‌تر از ۱ است، پس برابر ۱۱ می‌باشد، پس:

$$(n - 8, 11) = 11 \Rightarrow 11 \mid n - 8 \Rightarrow n - 8 = 11t \Rightarrow n = 11t + 8$$

حال می‌خواهیم دورقمی باشد، پس $10 \leq n \leq 99$ داریم:

$$10 \leq 11t + 8 \leq 99 \Rightarrow 2 \leq 11t \leq 91 \Rightarrow 1 \leq t \leq 8$$

$$\Rightarrow t = 1, 2, 3, \dots, 8$$

یعنی به ازای ۸ مقدار دورقمی n رابطه برقرار است.

$$\text{۱-۱۰۲ نکته می‌دانیم اگر } (a, b) = d \text{ باشد، آن‌گاه } d \mid a \text{ و } d \mid b.$$

$$(n, 36) = 18 \Rightarrow 18 \mid n \Rightarrow n = 18q$$

بنابراین:

اما q نمی‌تواند زوج باشد چون اگر q زوج باشد، n مضرب ۳۶ می‌شود و در نتیجه $(n, 36)$ برابر ۳۶ می‌شود پس q فرد است:

$$q = 2k + 1 \Rightarrow n = 18(2k + 1) = 36k + 18$$

n دورقمی است، بنابراین:

$$10 \leq 36k + 18 \leq 99 \Rightarrow -8 \leq 36k \leq 81 \Rightarrow -0.2 \leq k \leq 2.25$$

$$\Rightarrow k = 0, 1, 2$$

پس به ازای ۳ عدد، رابطه برقرار است.

$$\text{۲-۱۰۳}$$

$$(15a, 21b) = 102 \Rightarrow 3(\Delta a, \Delta b) = 102 \Rightarrow (\Delta a, \Delta b) = 34$$

بنابراین Δa و Δb هر دو بر ۳۴ بخش پذیرند و چون ۵ و ۷ نسبت به ۳۴ اول اند پس a و b هر دو به ۳۴ بخش پذیرند و در نتیجه $(a, b) = 34$.

$$\text{۲-۱۰۴ } (a, 9) = 3 \text{ و } (b, 9) = 3 \text{ پس } a \text{ و } b \text{ هر کدام فقط یک}$$

عامل ۳ دارند، پس ab فقط ۲ عامل ۳ دارد، پس:

$$(ab, 27) = 9 \quad \text{۱ و ۴ است:}$$

$$(a + b, 9) = 3 \Rightarrow (3 + 6, 9) = (9, 9) = 9$$

$$(ab, 27) = 27 \Rightarrow (3 \times 6, 27) = (18, 27) = 9$$

و $a = 3$ و $b = 3$ مثال نقض ۳ است:

$$(a + b, 9) = 9 \Rightarrow (3 + 3, 9) = (6, 9) = 3$$

$$\text{۱-۱۰۵ چون } (n, 70) = 2 \text{ است، پس } n \text{ زوج است اما عامل } 5 \text{ و } 7$$

ندارد. این سؤال را با کمک از مجموعه‌ها حل می‌کنیم. A را اعداد بخش پذیر بر ۲، B را اعداد بخش پذیر بر ۵ و C را اعداد بخش پذیر بر ۷ در نظر می‌گیریم:



یعنی به ازای همه مقادیر n دو عدد نسبت به هم اول اند. ۹۰۰ عدد سهرقمی داریم، پس جواب سؤال ۹۰۰ است.

۱۱۴-۲

$$\left. \begin{aligned} d \mid 13n + 5 &\xrightarrow{\times 7} d \mid 91n + 35 \\ d \mid 7n - 2 &\xrightarrow{\times 13} d \mid 91n - 26 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \mid 117$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 61 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 61$$

پس اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند، ب.م.م ۶۱ است.

۱۱۵-۴ ب.م.م دو عدد را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\left. \begin{aligned} d \mid 21n + 1 &\xrightarrow{\times 2} d \mid 42n + 2 \\ d \mid 14n + 3 &\xrightarrow{\times 3} d \mid 42n + 9 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7$$

اما d نمی‌تواند ۷ باشد زیرا $21n + 1$ پس d همواره برابر ۱ است، پس به ازای ۹۰ عدد دورقمی دو عدد نسبت به هم اول هستند.

۱۱۶-۲ ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. داریم:

$$\left. \begin{aligned} d \mid 3n + 7 &\xrightarrow{\times 3} d \mid 9n + 21 \\ d \mid 3n + 7 &\xrightarrow{\times 4} d \mid 12n + 28 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \mid 11$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 13 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 13$$

دو عدد نسبت به هم اول نیستند پس $d = 13$.

بنابراین می‌دانیم هر دو عبارت مضرب ۱۳ هستند، یعنی:

$$\left. \begin{aligned} 13 \mid 3n + 7 \\ 13 \mid 4n + 5 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} 13 \mid 7n + 12$$

۱۱۷-۲ گزینه‌ها را یک به یک بررسی می‌کنیم:

$$(an + 7, 3n + 2) = d \xrightarrow{a=15} (15n + 7, 3n + 2) = d \quad \text{۱}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d \mid 15n + 7 &\xrightarrow{\times 1} d \mid 15n + 7 \\ d \mid 3n + 2 &\xrightarrow{\times 5} d \mid 15n + 10 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 3$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ یا } 3$$

اما d نمی‌تواند برابر ۳ باشد، زیرا $3n + 2$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس دو عدد همواره نسبت به هم اول هستند.

$$(an + 7, 3n + 2) = d \xrightarrow{a=8} (8n + 7, 3n + 2) = d \quad \text{۲}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d \mid 8n + 7 &\xrightarrow{\times 3} d \mid 24n + 21 \\ d \mid 3n + 2 &\xrightarrow{\times 8} d \mid 24n + 16 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 5$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

که برای مثال به ازای $n = 1$ داریم: $(8n + 7, 3n + 2) = (15, 5) = 5$ بنابراین دو عدد همواره نسبت به هم اول نیستند.

$$(an + 7, 3n + 2) = d \xrightarrow{a=11} (11n + 7, 3n + 2) = d \quad \text{۳}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d \mid 11n + 7 &\xrightarrow{\times 3} d \mid 33n + 21 \\ d \mid 3n + 2 &\xrightarrow{\times 11} d \mid 33n + 22 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 1 \Rightarrow d = 1$$

بنابراین دو عدد همواره نسبت به هم اول هستند.

$$(an + 7, 3n + 2) = d \xrightarrow{a=6} (6n + 7, 3n + 2) = d \quad \text{۴}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d \mid 6n + 7 &\xrightarrow{\times 1} d \mid 6n + 7 \\ d \mid 3n + 2 &\xrightarrow{\times 2} d \mid 6n + 4 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 3 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 3$$

اما d نمی‌تواند برابر ۳ باشد زیرا $3n + 2$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، پس دو عدد همواره نسبت به هم اول هستند.

$$(3a - 1, 3a + 2) = d \Rightarrow \left. \begin{aligned} d \mid 3a - 1 \\ d \mid 3a + 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 3$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ یا } 3$$

اما d نمی‌تواند ۳ باشد، زیرا $3a - 1$ بنابرین $d = 1$ است و ۳ صحیح است.

$$(2a - 2, 2a + 1) = d \Rightarrow \left. \begin{aligned} d \mid 2a - 2 \\ d \mid 2a + 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 3$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ یا } 3$$

که حاصل ب.م.م هم ۳ و هم ۱ می‌تواند باشد، برای مثال به ازای $a = 4$:

$$(2a - 2, 2a + 1) = (6, 9) = 3$$

$$(4, 7) = 1$$

و به ازای $a = 3$ داریم:

بنابراین $d = 1$ یا $(2a - 2, 2a + 1)$ می‌باشد و ۳ نادرست است.

۱۱۰-۳ اگر $a = 6$ و $b = 8$ باشد $(a, b) = (6, 8) = 2$ پس ۱ نادرست است.

اگر $a = 9$ و $b = 8$ باشد، $(a, b + 1) = (9, 9) = 9$ پس ۲ نادرست است.

اگر $a = 9$ و $b = 8$ باشد، $(a + b - 1, 3) = (16, 3) = 1$ پس ۴ هم نادرست است.

حال برای اثبات درستی ۳ داریم:

$$\left. \begin{aligned} 3 \mid a \\ 3 \mid b + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3 \mid a + b + 1 \\ 3 \mid 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a + b + 1, 3) = 3$$

۱۱۱-۲ ابتدا داریم:

$$(a, b) = d \Rightarrow \left. \begin{aligned} d \mid a &\xrightarrow{\times 4} d \mid 4a \\ d \mid b &\Rightarrow d \mid b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 4a^2 - b$$

طبق گفته سؤال $4a^2 - b + 13$ پس:

$$\left. \begin{aligned} d \mid 4a^2 - b \\ d \mid 4a^2 - b + 13 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid 13 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 13$$

حال $d > 1$ پس $d = 13$. بنابراین a مضرب ۱۳ است که در بین گزینه‌ها فقط ۳۹ مضرب ۱۳ است.

۱۱۲-۳ حاصل (b, c) را برابر d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(b, c) = d \Rightarrow \left. \begin{aligned} d \mid b \\ d \mid c \end{aligned} \right\}$$

در صورت سؤال گفته شده $2a - 3b$ ، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} d \mid c, c \mid 2a - 3b &\Rightarrow d \mid 2a - 3b \\ d \mid b &\xrightarrow{\times 3} d \mid 3b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} d \mid 2a$$

اما طبق گفته سؤال b عددی فرد است و $d \mid b$ پس d نیز عددی فرد است، بنابراین از $d \mid 2a$ می‌توان نتیجه گرفت (چون d عامل ۲ ندارد) $d \mid a$. در نتیجه $d \mid a$ و $d \mid b$.

$$\left. \begin{aligned} d \mid a \\ d \mid b \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \mid (a, b) = 7 \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7$$

به عنوان مثال نقض ۴، $a = -7$ و $b = 7$ را در نظر بگیرید:

$$c \mid 2a - 3b \Rightarrow c \mid -35$$

که واضح است ب.م.م c نمی‌شود.

۱۱۳-۱ ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$\left. \begin{aligned} d \mid 15n + 7 &\xrightarrow{\times 13} d \mid 195n + 91 \\ d \mid 13n + 6 &\xrightarrow{\times 15} d \mid 195n + 90 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 1 \Rightarrow d = 1$$



۱۱۸-۳ ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} d \mid \Delta n - 2 &\xrightarrow{\times 1} d \mid \Delta n - 2 \\ d \mid n + 3 &\xrightarrow{\times 5} d \mid \Delta n + 15 \end{aligned} \right\} (\Delta n - 2, n + 3) = d \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(-)} d \mid 17 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 17$$

ابتدا حالاتی را می‌شماریم که $d = 17$ باشد یعنی دو عدد بر ۱۷ بخش پذیر باشند:

$$n + 3 = 17k \Rightarrow n = 17k - 3 \quad 10 \leq 17k - 3 \leq 99 \Rightarrow 13 \leq 17k \leq 102$$

۶ مقدار $\rightarrow k = 1, 2, 3, \dots, 6$ پس: $10 \leq 17k - 3 \leq 99 \Rightarrow 13 \leq 17k \leq 102$ یعنی به ازای ۶ مقدار دورقمی n ، دو عدد نسبت به هم اول نیستند، پس به ازای $84 - 6 = 90 - 6 = 84$ مقدار دورقمی، دو عدد نسبت به هم اول اند.

۱۱۹-۳ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، هر دو عدد را می‌شمارد، پس:

$$\left. \begin{aligned} d \mid 2n^2 + 3n &\xrightarrow{\times 3} d \mid 6n^2 + 9n \\ d \mid 3n + 2 &\xrightarrow{\times 2n} d \mid 6n^2 + 4n \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid \Delta n$$

$$\left. \begin{aligned} d \mid \Delta n &\xrightarrow{\times 3} d \mid 15n \\ d \mid 3n + 2 &\xrightarrow{\times 5} d \mid 15n + 10 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 10$$

$$\xrightarrow{\text{می‌تواند مقسوم‌علیه‌های } 10 \text{ باشد}} d = 1, 2, 5, 10$$

برای مثال به ازای $n = 1$ داریم: $(3n + 2, 2n^2 + 3n) = (5, 5) = 5$ به ازای $n = 2$ داریم: $(3n + 2, 2n^2 + 3n) = (8, 14) = 2$ به ازای $n = 3$ داریم: $(3n + 2, 2n^2 + 3n) = (11, 27) = 1$ به ازای $n = 6$ داریم: $(3n + 2, 2n^2 + 3n) = (20, 90) = 10$ **روش دوم:** می‌توانیم ریشه $3n + 2$ را در عبارت $2n^2 + 3n$ قرار دهیم و صورت کسر حاصل را در نظر بگیریم:

$$3n + 2 = 0 \Rightarrow n = -\frac{2}{3} \Rightarrow 2n^2 + 3n = -\frac{10}{9} \Rightarrow d \mid -10$$

و ادامه راه حل مانند روش اول است.

۱۲۰-۲ **نکته** برای پیدا کردن تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد

کافی است عدد را تجزیه کرده، توان‌ها را با یک جمع کرده و در هم ضرب کنیم:

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \xrightarrow{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی}} (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

ابتدا دقت کنید A و B دارای 5^3 مقسوم‌علیه مشترک مثبت و غیر ۱ هستند، یعنی A و B دارای 5^4 مقسوم‌علیه مثبت هستند، به بیان دیگر ب.م.م A و B ، 5^4 مقسوم‌علیه مثبت دارد. عامل‌های اول مشترک A و B ، ۲ و ۳ و ۵ و ۷ هستند، پس:

$$(A, B) = (2^5 \times 3^2 \times 5^m \times 7^3 \times 17, 2^2 \times 3^6 \times 5^7 \times 7^n \times 13^2)$$

$$= 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$$

که $d \leq 3$ و $c \leq 7$ ، $b = 2$ ، $a = 2$ است، پس:

$$(A, B) = 2^2 \times 3^2 \times 5^c \times 7^d$$

از طرفی تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت این عدد 5^4 تا است، یعنی:

$$3 \times 3 \times (c+1)(d+1) = 5^4 \Rightarrow (c+1)(d+1) = 6$$

حاصل ضرب دو عدد برابر ۶ شده است. حالات ممکن را بررسی می‌کنیم:

$(c+1)$	$(d+1)$	
۶	۱	$\rightarrow c=5, d=0 \checkmark$
۳	۲	$\rightarrow c=2, d=1 \checkmark$
۲	۳	$\rightarrow c=1, d=2 \checkmark$
۱	۶	$\rightarrow c=0, d=5 \times$ غقی

اما با توجه به این که در یکی از عددها 7^3 داریم ب.م.م نمی‌تواند 7^5 شود.۱۲۱-۲ $(2a + 3b, 3a + 4b) = d$ می‌گیریم، پس:

$$\left. \begin{aligned} d \mid 2a + 3b &\xrightarrow{\times 3} d \mid 6a + 9b \\ d \mid 3a + 4b &\xrightarrow{\times 2} d \mid 6a + 8b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid b$$

$$\left. \begin{aligned} d \mid 2a + 3b &\xrightarrow{\times 4} d \mid 8a + 12b \\ d \mid 3a + 4b &\xrightarrow{\times 3} d \mid 9a + 12b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid a$$

در نتیجه d مقسوم‌علیه a و b است و با توجه به این که $(a, b) = 7$ می‌باشد، d نیز برابر ۷ است.**روش دوم:****نکته** اگر a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $(a, b) = d$ باشد، آن‌گاه اگر x, y, z, t اعداد صحیح باشند داریم:

$$(xa + yb, za + tb) \mid \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} d$$

حال برای حل این سؤال می‌دانیم $(a, b) = 7$ ، پس:

$$(2a + 3b, 3a + 4b) \mid \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times 7 \Rightarrow (2a + 3b, 3a + 4b) \mid -7$$

هم‌چنین:

$$(a, b) = 7 \Rightarrow \left. \begin{aligned} 7 \mid a &\xrightarrow{\times 2} 7 \mid 2a \\ 7 \mid b &\xrightarrow{\times 3} 7 \mid 3b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} 7 \mid 2a + 3b$$

به طور مشابه $7 \mid 3a + 4b$ پس: $(2a + 3b, 3a + 4b) = 7$ ۱۲۲-۲ **نکته** یک نکته خیلی مهمی که باید بدانید این است که اگر $(a, b) = d$ باشد، d نه تنها ب.م.م دو عدد a و b است، بلکه بر بقیه مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b نیز بخش پذیر است. به بیانی دیگر اگر $(a, b) = d$ و x یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد باشد، یعنی $x \mid a$ و $x \mid b$ می‌توان نتیجه گرفت $x \mid d$.**نکته** هم‌چنین می‌دانیم اگر $(a, b) = d$ باشد، داریم: $(a^n, b^n) = d^n$

$$(ax, bx) = |x| d$$

$$\Rightarrow (a^2, b^2) - (20a, 20b) + 100 = 0 \Rightarrow d^2 - 20d + 100 = 0$$

$$\Rightarrow (d - 10)^2 = 0 \Rightarrow d = 10$$

حال طبق نکته اول: $x \mid a, x \mid b \Rightarrow x \mid d \Rightarrow x \mid 10$ یعنی x یک مقسوم‌علیه ۱۰ است:

$$10 = \{1, 2, 5, 10\} = \text{مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت } 10$$

۱۲۳-۲ x عددی است که هم ۲۱ آن را عاد می‌کند و هم ۲۸. حالکوچک‌ترین عدد x همان ک.م.م دو عدد ۲۱ و ۲۸ است:

$$[21, 28] = [3 \times 7, 2^3 \times 7] = 2^3 \times 3 \times 7 = 84$$

که مقسوم‌علیه‌های غیر اول آن به صورت زیر است:

$$\{1, 4, 6, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$$

یعنی ۹ مقسوم‌علیه غیر اول دارد.

روش دوم: برای شمارش مقسوم‌علیه‌های غیر اول ۸۴، ابتدا دقت کنیدتعداد کل مقسوم‌علیه‌های ۸۴ برابر است با: $84 = 2^3 \times 3^1 \times 7^1$

$$\xrightarrow{\text{مقسوم‌علیه‌های طبیعی}} (2+1)(1+1)(1+1) = 12$$

که از این ۱۲ مقسوم‌علیه، ۲، ۳ و ۷ مقسوم‌علیه‌های اول هستند، پس ۹

مقسوم‌علیه غیر اول باقی می‌ماند.





$$m = 36 \Rightarrow [6, m] = [6, 36] = [2 \times 3, 2^2 \times 3^2] = 36$$

$$m = 45 \Rightarrow [6, m] = [6, 45] = [2 \times 3, 3^2 \times 5] = 90$$

۱۳۱- نکته ۳ برای به دست آوردن ک.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان بزرگتر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

عددها را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$[m, 180] = 900 \Rightarrow [m, 2^2 \times 3^2 \times 5] = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

m فقط می‌تواند عوامل $2, 3$ و 5 داشته باشد و عامل‌های دیگری ندارد. (پهن آله برای مثال m عامل 7 هم داشت باید جواب ک.م.م هم عامل 7 داشته باشد).

پس فرم کلی m به صورت $m = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\theta$ است.

θ حتماً برابر 2 است چون در تجزیه 180 توان 5 برابر 1 است ولی در ک.م.م توان عدد 5 برابر 2 است، پس $\theta = 2$.

β می‌تواند صفر یا 1 یا 2 باشد چون در تجزیه 180 و جواب ک.م.م 2 عامل 3 داریم، پس m نیز دارای حداکثر 2 عامل 3 است.

α نیز می‌تواند صفر یا 1 یا 2 باشد چون در تجزیه 180 و جواب ک.م.م 2 عامل 2 داریم، پس m نیز دارای حداکثر 2 عامل 2 است.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \theta \\ 2 \times 2 \times 1 & = & 9 \\ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} & \end{array}$$

پس به ازای 9 مقدار m رابطه برقرار می‌شود. برای درک بهتر، این 9 حالت را می‌نویسیم:

$$m = 5^2, 5^2 \times 2, 5^2 \times 2^2, 5^2 \times 3, 5^2 \times 3^2, 5^2 \times 2 \times 3, 5^2 \times 2^2 \times 3, 5^2 \times 2 \times 3^2, 5^2 \times 2^2 \times 3^2$$

۱۳۲- نکته ۳ در درس نامه گفتیم، اگر $(a, b) = d$ باشد، داریم:

$$a = da', b = db', (a', b') = 1$$

$$[a, b] = da'b'$$

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) = 7 \Rightarrow d = 7 \\ ab = 1764 \Rightarrow a'b'd^2 = 1764 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} a'b' = 36$$

a'	b'
۱	$36 \Rightarrow a + b = da' + db' = d(a' + b') = 7 \times 37 = 259$
۲	غیر قابل قبول زیرا $(2, 18) = 2$
۳	غیر قابل قبول زیرا $(3, 12) = 3$
۴	$9 \Rightarrow a + b = da' + db' = d(a' + b') = 7 \times 13 = 91$
۶	غیر قابل قبول زیرا $(6, 6) = 6$

$$\Rightarrow 259 + 91 = 350$$

۱۳۳- نکته ۳ با توجه به نکته گفته شده در تست قبل:

$$[a^2, b^2] = [d^2 a'^2, d^2 b'^2] = d^2 [a'^2, b'^2] = d^2 a'^2 b'^2$$

$$\left(\frac{a^2 b^2}{d^2}, [a^2, b^2] \right) = \left(\frac{d^4 a'^2 b'^2}{d^2}, d^2 a'^2 b'^2 \right)$$

$$(d^2 a'^2 b'^2, d^2 a'^2 b'^2) = d^2 a'^2 b'^2 = [a^2, b^2]$$

۱۳۴- نکته ۴ دو رابطه را بر حسب a' و b' می‌نویسیم:

$$(a, b) = 11 \Rightarrow d = 11$$

$$[a, b] = 330 \Rightarrow a'b'd = 330 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} a'b' = 30$$

$$\begin{aligned} [385, 186] &= [5 \times 7 \times 11, 2 \times 3 \times 31] \\ ([385, 186], 341) &= (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 31, 11 \times 31) \\ &= 11 \times 31 = 341 \end{aligned}$$

۱۲۵- نکته ۴ خیلی ساده می‌توانید ثابت کنید که اگر ب.م.م و ک.م.م دو عدد a و b مساوی باشند، (یعنی $(a, b) = [a, b]$) نتیجه می‌گیریم $|a| = |b|$.

$$|n^2 - 7n + 9| = 3 \Rightarrow \begin{cases} n^2 - 7n + 9 = 3 \\ \Rightarrow n^2 - 7n + 6 = 0 \Rightarrow n = 1, 6 \\ n^2 - 7n + 9 = -3 \\ \Rightarrow n^2 - 7n + 12 = 0 \Rightarrow n = 3, 4 \end{cases}$$

$$m | m^2 \Rightarrow (m, m^2) = |m| \quad \text{۱۲۶- نکته ۳}$$

$$m | m^3 \Rightarrow [m, m^3] = |m^3|$$

به بیان دیگر:

$$[(m, m^2), m^2] = |m^2| = 64 \Rightarrow m = \pm 8$$

$$ra^2 | ea^4 \Rightarrow (ra^2, ea^4) = |ra^2| = ra^2 \quad \text{۱۲۷- نکته ۱}$$

$$fa | 12a^3 \Rightarrow [fa, 12a^3] = |12a^3|$$

$$ra^2 | 12a^3 \Rightarrow (ra^2, 12a^3) = ra^2$$

به بیان دیگر:

$$\left(\underbrace{(ra^2, ea^4)}_{ra^2}, \underbrace{[12a^3, fa]}_{12a^3} \right) = ra^2$$

۱۲۸- یادآوری ۲ اگر $(a, b) = d$ باشد، $(a^n, b^n) = d^n$ است.

پس: $(a, b) = d \Rightarrow (a^2, b^2) = d^2 \Rightarrow (a^2, b^2) = (a, b)^2$
هم‌چنین می‌دانیم:

$$(a, b) | [a, b] \xrightarrow{\times(a, b) \text{ طرف}} (a, b)^2 | (a, b)[a, b]$$

$$(a, b)^2 = (a^2, b^2) \Rightarrow (a^2, b^2) | (a, b)[a, b]$$

$$\Rightarrow ((a, b)[a, b], (a^2, b^2)) = (a^2, b^2)$$

۱۲۹- نکته ۳ اگر $[a, b] = m$ باشد، $[ax, bx] = m | x$ است.

$$\begin{aligned} [18!, 17! - 16! - 15!] &= [15! \times 16 \times 17 \times 18, 15! (17 \times 16 - 16 - 1)] \\ &= 15! [16 \times 17 \times 18, 17 \times 16 - 16 - 1] = 15! [16 \times 17 \times 18, 255] \\ &= 15! [2^5 \times 3^2 \times 17, 3 \times 5 \times 17] = 15! \times 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 17 \\ &= 15! \times 2^4 \times 17 \times 3^1 \times 3^2 \times 5 = 15! \times 16 \times 17 \times 18 \times 5 = 18! \times 5 \end{aligned}$$

$$(24, 18) = (2^3 \times 3, 2 \times 3^2) = 6 \quad \text{۱۳۰- نکته ۴}$$

$$\Rightarrow [(24, 18), m] = 90 \Rightarrow [6, m] = 90$$

$$\Rightarrow [2 \times 3, m] = 2 \times 3^2 \times 5$$

یعنی m دارای حداکثر 1 عامل 2 ، دقیقاً 2 عامل 3 و دقیقاً یک عامل 5 است، در نتیجه m یکی از اعداد $m = 90$ یا $m = 45$ است که در میان گزینه‌ها $m = 45$ وجود دارد.

روش دوم: گزینه‌ها را تک‌تک امتحان می‌کنیم:

$$[6, m] = 90$$

$$m = 40 \Rightarrow [6, m] = [6, 40] = [2 \times 3, 2^3 \times 5] = 120$$

$$m = 60 \Rightarrow [6, m] = [6, 60] = [2 \times 3, 2^2 \times 3 \times 5] = 60$$





$$2a = 7b \Rightarrow 2da' = 7db' \Rightarrow 2a' = 7b' \Rightarrow \begin{cases} a' = 7 \\ b' = 2 \end{cases} \quad \text{۱۳۹-۲}$$

$$[a', b'] = [d^2 a'^2, d^2 b'^2] = d^2 a'^2 b'^2 \quad \text{به علاوه:}$$

$$2ab + \frac{[a', b']}{14} = 504 \Rightarrow 2d^2 a' b' + \frac{d^2 a'^2 b'^2}{14} = 504$$

به جای $a' = 7$ و $b' = 2$ قرار می‌دهیم:

$$42d^2 + 14d^2 = 504 \Rightarrow 56d^2 = 504 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = 3$$

$$[a, b] = 42 \Rightarrow da'b' = 42 \Rightarrow d \mid 42 \quad \text{۱۴۰-۲}$$

$$2a + 3b = 91 \Rightarrow 2da' + 3db' = 91 \Rightarrow d(2a' + 3b') = 91 \Rightarrow d \mid 91$$

بنابراین $d \mid 42$ و $d \mid 91$ پس d ب.م.م 42 و 91 یعنی $(42, 91) = (2 \times 3 \times 7, 7 \times 13) = 7$

$$d \mid 7 \Rightarrow d = 7 \xrightarrow{(a, b) > 1} d = 7$$

در نتیجه:

$$da'b' = 42 \Rightarrow 7a'b' = 42 \Rightarrow a'b' = 6$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} a' & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline b' & 6 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$d(2a' + 3b') = 91 \Rightarrow 2a' + 3b' = 13 \quad \text{به علاوه:}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c} a' & 2 & 5 \\ \hline b' & 3 & 1 \end{array}$$

که تنها جوابی که هم در $a'b' = 6$ و $2a' + 3b' = 13$ صدق می‌کند، $a' = 2$ و $b' = 3$ است، پس:

$$2a + 3b = 2da' + 3db' = 42 + 84 = 126 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 9$$

$$10k + 5 \text{ مضرب } 5 \text{ است و نمی‌تواند اول باشد.} \quad \text{۱۴۱-۳}$$

$$308 = 2^2 \times 7 \times 11 \quad \text{۱۴۲-۲}$$

بنابراین رابطه $308 \mid p$ به ازای $p = 2$ و $p = 7$ و $p = 11$ برقرار است.

$$\frac{9}{13} = \frac{2a - 4p}{a} \Rightarrow 9a = 26a - 52p \Rightarrow 52p = 17a \quad \text{۱۴۳-۲}$$

سمت راست عبارت مضرب 17 است پس $52p$ نیز باید مضرب 17 باشد، پس $a = 52$ و $p = 17$ که مضرب 23 است.

$$144-2 \quad \text{شخص است که اگر } n \text{ عدد اول باشد } 80! \text{ بر آن بخش پذیر}$$

نیست. بنابراین $80!$ بر $83, 89, 97$ بخش پذیر نیست. (دقت کنید که $80!$

بر عددهای مرکب بخش پذیر است؛ برای مثال $91 = 7 \times 13$ که در تفرقه $80!$

هم عامل 7 و 13 دارد هم 13 .)

$$145-3 \quad \text{نکته فقط عددهای اول دارای ۲ مقسوم علیه طبیعی هستند.}$$

پس a عددی اول است.

همچنین اگر عددی به صورت حاصل ضرب 2 عدد متفاوت یا بیشتر از 2 عدد متفاوت باشد تعداد مقسوم علیه‌های طبیعی آن دست کم 4 است.

(برای مثال عدد $6 = 2 \times 3$ دارای چهار مقسوم علیه $1, 2, 3, 6$ است.) بنابراین عددهایی به فرم p^2 دارای سه مقسوم علیه طبیعی هستند: $1, p, p^2$

(یعنی عددهایی مثل $4, 9, 25, 49, \dots$)

حالا می‌خواهیم تعداد مقسوم علیه‌های ab را پیدا کنیم:

$$ab = ap^2 \Rightarrow ab \text{ مجموعه مقسوم علیه‌های } \{1, a, p, ap, p^2, ap^2\}$$

a'	b'	
۱	۳۰	$\Rightarrow a + b = da' + db' = d(a' + b') = 11 \times 31 = 341$
۲	۱۵	$\Rightarrow a + b = da' + db' = d(a' + b') = 11 \times 17 = 187$
۳	۱۰	$\Rightarrow a + b = da' + db' = d(a' + b') = 11 \times 13 = 143$
۵	۶	$\Rightarrow a + b = da' + db' = d(a' + b') = 11 \times 11 = 121$

بنابراین $a + b$ نمی‌تواند 352 باشد.

$$(a, b) = 9 \Rightarrow \begin{cases} a = 9a' \\ b = 9b' \end{cases} \quad \text{۱۳۵-۲}$$

$$a + b = 126 \Rightarrow da' + db' = 9a' + 9b' = 126$$

$$\Rightarrow a' + b' = 14$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 13 \\ \hline 2 & 12 \end{array} \Rightarrow [a, b] = da'b' = 9 \times 1 \times 13 = 117$$

غیر قابل قبول زیرا $(2, 12) = 2$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 11 \\ \hline 4 & 10 \end{array} \Rightarrow [a, b] = da'b' = 9 \times 3 \times 11 = 297$$

غیر قابل قبول زیرا $(4, 10) = 2$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 9 \\ \hline 6 & 8 \end{array} \Rightarrow [a, b] = da'b' = 9 \times 5 \times 9 = 405$$

غیر قابل قبول زیرا $(6, 8) = 2$

$$\begin{array}{c|c} 7 & 7 \\ \hline \end{array} \Rightarrow [a, b] = da'b' = 9 \times 7 \times 7 = 441$$

در نتیجه بزرگ‌ترین مقدار $[a, b]$ برابر 405 می‌باشد.

$$2ab = 2(a, b)^2 + 1 \Rightarrow 2d^2 a'b' = 2d^2 + 1 \quad \text{۱۳۶-۲}$$

$$\Rightarrow 2d^2 a'b' - 2d^2 = 1 \Rightarrow d^2 (2a'b' - 2) = 1$$

ضرب دو عدد d^2 و $2a'b' - 2$ برابر 1 شده و $0 \leq d^2$ است، پس هر دو برابر 1 هستند:

$$d^2 = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 2 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$a^2 + b^2 = d^2 a'^2 + d^2 b'^2 = d^2 (a'^2 + b'^2) = 1 \times 5 = 5$$

$$2[a, b] = 41(a, b) + 13 \Rightarrow 2da'b' = 41d + 13 \quad \text{۱۳۷-۲}$$

$$\Rightarrow 2da'b' - 41d = 13 \Rightarrow d(2a'b' - 41) = 13$$

حال با توجه به این که $(a, b) \neq 1$ و d مثبت است، پس:

$$d = 13 \Rightarrow 2a'b' - 41 = 1 \Rightarrow 2a'b' = 42 \Rightarrow a'b' = 21$$

$$a' = 1, b' = 21 \Rightarrow a + b = da' + db' = d(a' + b') = 13 \times 22 = 286$$

$$a' = 3, b' = 7 \Rightarrow a + b = da' + db' = d(a' + b') = 13 \times 10 = 130$$

که در بین گزینه‌ها 130 موجود است.

$$a + b = 42 \Rightarrow da' + db' = 42 \Rightarrow d(a' + b') = 42 \quad \text{۱۳۸-۲}$$

$$\Rightarrow a' + b' \mid 42$$

$$\frac{[a, b]}{(a, b)} = 12 \Rightarrow \frac{da'b'}{d} = 12 \Rightarrow a'b' = 12$$

$$\begin{array}{c|c} a' & b' \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 12 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \quad \times \quad 13 \mid 42 \quad a' + b' = 13 \text{ زیرا } a' + b' = 13 \text{ مضرب } 13 \text{ نیست}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 6 \\ \hline 6 & 2 \end{array} \quad \times \quad (2, 6) = 2 \text{ زیرا } (2, 6) = 2$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 4 & 3 \end{array} \quad \checkmark \Rightarrow a' + b' = 7 \Rightarrow d = 6 \Rightarrow a = 18, b = 24$$

$$\begin{array}{c|c} 4 & 3 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \quad \checkmark \Rightarrow a' + b' = 7 \Rightarrow d = 6 \Rightarrow a = 24, b = 18$$

بنابراین 2 زوج طبیعی a و b وجود دارد.



۱۵۲- ۲ اگر بخواهیم $5^0! | p^3$ با توجه به این که کسر $\frac{5^0!}{p \times p \times p}$ عددی

صحیح باشد، $5^0!$ باید دست کم سه عامل p داشته باشد؛ بنابراین $2p \leq 5^0!$ و در نتیجه بیشترین مقدار p عدد ۱۳ است. (توجه کنید که در تجزیه $5^0!$ عددهای

۱۳ و ۲۶ و ۳۹ هر کدام یک عامل ۱۳ دارند و در نتیجه $5^0! | 13^3$).

اما رابطه $5^0! | 17^3$ برقرار نیست چون در تجزیه $5^0!$ فقط دو عدد ۱۷ و ۳۴ عامل ۱۷ دارند.

۱۵۳- ۳ اگر a فرد باشد $7a$ و a^2 هر دو فردند بنابراین $a^2 - 7a + 12$ همواره زوج می شود.

اگر هم a زوج باشد، a^2 و $7a$ هر دو زوج اند و باز هم $a^2 - 7a + 12$ همواره زوج می شود.

حالا فقط باید بررسی کنیم آیا مقداری از a وجود دارد که به ازای آن $a^2 - 7a + 12 = 2$ شود. داریم:

$$a^2 - 7a + 12 = 2 \Rightarrow a^2 - 7a + 10 = 0$$

$$(a-5)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ a=2 \end{cases}$$

پس به ازای ۲ مقدار صحیح a ، $a^2 - 7a + 12$ می تواند برابر ۲ شود.

۱۵۴- ۳ a, b, c سه عدد اول اند که مجموع آن ها عددی زوج شده؛ بنابراین این امکان وجود ندارد که هر سه آن ها فرد باشد؛ بنابراین یکی از آن ها برابر ۲ و مجموع دو عدد دیگر برابر ۱۲ است که تنها حالت قابل قبول برای آن عددهای ۵ و ۷ است.

$$2^2 + 5^2 + 7^2 = 4 + 25 + 49 = 78 = 2 \times 3 \times 13 \quad \text{حالا:}$$

بنابراین بر ۱۱ بخش پذیر نیست.

۱۵۵- ۳ می دانیم عدد مربع کامل به صورت a^2 است؛ بنابراین:

$$11p + 16 = a^2 \Rightarrow 11p = a^2 - 16 \Rightarrow 11p = (a-4)(a+4)$$

حالت های ممکن عبارت است از:

$$\begin{cases} a-4=11 \\ a+4=p \end{cases} \Rightarrow a=15 \Rightarrow p=19 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} a-4=p \\ a+4=11 \end{cases} \Rightarrow a=7 \Rightarrow p=3 \quad \checkmark$$

۱۵۶- ۲ مکعب کامل را a^3 فرض می کنیم. داریم:

$$p + 27 = a^3 \Rightarrow a^3 - 27 = p \Rightarrow (a-3)(a^2 + 9 + 3a) = p$$

حاصل ضرب دو عدد، برابر با عددی اول شده، پس:

$$\begin{cases} a-3=1 \\ a^2 + 3a + 9 = p \end{cases} \Rightarrow a=4$$

$$a^2 + 3a + 9 = p \Rightarrow p=37$$

$$x = y^2 - z^2 \Rightarrow x = (y-z)(y+z) \quad \text{۱۵۷- ۱}$$

حاصل ضرب دو عدد برابر عددی اول شده پس یکی برابر ۱ و دیگری برابر آن عدد اول است:

$$\begin{cases} y-z=1 \\ y+z=x \end{cases}$$

یعنی دو عدد اولی که متوالی اند. تنها دو عدد اول پشت سر هم ۲ و ۳ هستند. بنابراین $x=5$ و $z=2$ ، $y=3$ است.

پس عدد XYZ ما ۵۳۲ است و باقی مانده آن بر ۷ صفر می شود.

۱۵۸- ۱ اگر b و c هر دو فرد باشند، a زوج می شود و تنها عدد اول زوج ۲ است، پس $4 = b^2 + c^2$ که اعداد اول b و c نداریم که در این رابطه صدق کنند. پس یکی از b و c حتماً ۲ است، فرض کنید $b=2$ باشد، داریم:

$$a = 4 + c^2$$

۱۴۶- ۱ نکته مربع هر عدد اول بزرگ تر از ۳ را می توان به صورت $24k+1$ نوشت.

بنابراین چون $24k$ بر ۶ بخش پذیر است باقی مانده p^2 بر ۶ همواره برابر ۱ است.

۱۴۷- ۴ می دانیم باقی مانده یک عدد صحیح در تقسیم به ۱۸ می تواند از صفر تا ۱۷ تغییر کند و آن ها را می توان به صورت $18k+1, 18k+2, \dots, 18k+17$ نوشت. از این میان ۹ تا از عددها زوج اند و بنابراین نمی توانند اول باشند. بقیه حالت ها را بررسی می کنیم:

$$18k+1$$

$$18k+11$$

$$18k+3 \rightarrow \text{مضرب } 3$$

$$18k+5$$

$$18k+13$$

$$18k+7$$

$$18k+15 \rightarrow \text{مضرب } 3$$

$$18k+9 \rightarrow \text{مضرب } 3$$

$$18k+17$$

بنابراین باقی مانده p بر ۱۸ می تواند برابر ۱ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ یا ۱۳ یا ۱۷ باشد؛ یعنی ۶ مقدار.

۱۴۸- ۳ یادآوری مربع هر عدد اول بزرگ تر از ۳ را می توان به صورت $p^2 = 24k+1$ نوشت.

بنابراین:

$$\frac{p^2+1}{2} = \frac{24k+2}{2} = 12k+1$$

ممکن است مرکب یا اول باشد.

$$\frac{p^2+3}{2} = \frac{24k+4}{2} = 12k+2$$

چون زوج است پس همواره مرکب است.

$$\frac{p^2+5}{2} = \frac{24k+6}{2} = 12k+3$$

مضرب ۳ است پس همواره مرکب است.

$$\frac{p^2+7}{2} = \frac{24k+8}{2} = 12k+4$$

زوج است پس حتماً مرکب است.

۱۴۹- ۳ یادآوری $a^n + b^n$ اگر n فرد باشد همواره بر $a+b$ بخش پذیر است.

بنابراین $2^p + 1 = 3$ بر ۳ بخش پذیر است و بنابراین همواره مرکب است. $p=5$ مثال نقض ۱ و $p=3$ مثال نقض ۴ است.

$$150- ۱ \quad n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 97 + 1$$

باقی مانده های ۹۷، ۷، ۵، ۳، ۲ به تک تک عددهای $k = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times 97$ باشد، واضح است که k بر ۹۸ و ۹۹ هم بخش پذیر است، پس باقی مانده تقسیم n بر ۹۸ و ۹۹ هم برابر ۱ می شود، بنابراین n بر هیچ عدد دورقمی نمی تواند بخش پذیر باشد. (دقت کنید این عدد ممکنه بر ۱۰۱ بخش پذیر باشه اما زیر ۱۰۰ به پیزی نمی تونه بخش پذیر شه).

۱۵۱- ۲ یکی از این عددها همواره بر ۵ بخش پذیر است و بنابراین امکان این که هر ۵ تایی آن ها اول باشند وجود ندارد.

$$n = 5k \Rightarrow \text{خود } n \text{ بر } 5 \text{ بخش پذیر است.}$$

$$n = 5k+1 \Rightarrow n+14 \Rightarrow \text{مضرب } 5 \text{ است.}$$

$$n = 5k+2 \Rightarrow n+8 \Rightarrow \text{مضرب } 5 \text{ است.}$$

$$n = 5k+3 \Rightarrow n+2 \Rightarrow \text{مضرب } 5 \text{ است.}$$

$$n = 5k+4 \Rightarrow n+6 \Rightarrow \text{مضرب } 5 \text{ است.}$$

ولی خود ۵ عدد اول است و اگر یکی از این اعداد خود ۵ باشند، ممکن است همه اعداد اول شوند، پس باید بررسی کنیم:

$$n = 5 \Rightarrow \text{اعداد: } 5, 7, 11, 13, 19 \quad \checkmark$$

$$n+2=5 \Rightarrow \text{اول نیست } \times \quad \text{اعداد: } 3, 5, 9, 11, 17$$





$$a = 12q + 7 \quad (I) \quad \text{۱۶۵-۲}$$

با اضافه کردن 70 واحد به مقسوم داریم:

$$a + 70 = 12(q + m) + 7 - n \quad (II), \quad 0 \leq 7 - n < 12$$

رابطه (I) را در (II) جای گذاری می کنیم:

$$12q + 7 + 70 = 12q + 12m + 7 - n \Rightarrow 70 = 12m - n$$

$$\Rightarrow m = \frac{70 + n}{12}$$

اما دقت کنید n حداکثر می تواند برابر 7 باشد، چون باقی مانده منفی نمی شود. حالا دور و بر 70 ضرب 12 چه عددی را داریم؟ بله، 72 . بنابراین:

$$n = 2 \Rightarrow 72 = 12m \Rightarrow m = 6 \Rightarrow m + n = 8$$

$$a = 31b + 24, 24 < b$$

می خواهیم a مضرب 5 باشد، بنابراین:

$$a = 30b + b + 24 - 1 = \underbrace{(6b + 5)}_{\text{مضرب } 5} + b - 1$$

اگر بخواهیم a مضرب 5 باشد، $b - 1$ باید مضرب 5 باشد:

$$b - 1 = 5k \Rightarrow b = 5k + 1 \Rightarrow a = 31(5k + 1) + 24$$

$$a = 155k + 55$$

a طبیعی و سه رقمی است، بنابراین:

$$100 \leq a < 1000 \Rightarrow 100 \leq 155k + 55 < 1000$$

$$\Rightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

اما دقت کنید گفتیم $24 < b$ ، پس $24 < 5k + 1$ است که در این صورت فقط $k = 5, 6$ قابل قبول است.

۱۶۷-۴ عدد a فرض می کنیم. چون خارج قسمت مضرب 5 است

آن را $5q$ فرض می کنیم. داریم:

$$a \mid 11 \quad 5q \Rightarrow a = 55q + r, 0 \leq r < 11$$

باقی مانده مضرب 7 است، پس باقی مانده یا صفر است یا 7 :

$$a = 55q \quad \text{یا} \quad a = 55q + 7$$

$$100 \leq 55q \leq 999 \quad 100 \leq 55q + 7 \leq 999$$

$$1/8 \leq q \leq 18/1 \quad 93 \leq 55q < 992$$

$$\Rightarrow q = \underbrace{2, 3, \dots, 18}_{\text{مقدار } 17} \quad \Rightarrow q = \underbrace{2, 3, 4, \dots, 18}_{\text{مقدار } 17}$$

بنابراین جواب $17 + 17 = 34$ می شود.

$$a = 117q + 28 \quad \text{۱۶۸-۱}$$

حالا می خواهیم باقی مانده a را بر 13 به دست آوریم. دقت کنید در این مدل سؤال ها اگر قسمت q مضرب عددی باشد که می خواهیم باقی مانده را به دست بیاوریم، سؤال خیلی راحت حل می شود اما اگر قسمت q مضرب آن عدد نباشد، سؤال داستان دار! خواهد شد که بعداً یاد می گیریم. آن مدل سؤال ها را چه طور حل کنیم.

$$a = 117q + 28 = \underbrace{13 \times 9q}_{\text{مضرب } 13} + 28$$

$117q$ خوشبختانه مضرب 13 است و باقی مانده آن بر 13 برابر صفر است پس فقط می ماند پیدا کردن باقی مانده 28 بر 13 که 2 می شود.

۱۶۹-۳ با توجه به این که $a = 91k + 23$ است، اول باقی مانده a را

بر 7 به دست می آوریم:

$$a = 91k + 23 = \underbrace{7 \times 13k + 21}_{\text{مضرب } 7} + 2$$

اگر c زوج باشد، a زوج می شود و اول نیست پس مقادیر فرد c را در نظر می گیریم. با توجه به این شرط که a باید دورقمی باشد:

$$c = 3 \Rightarrow a = 9 + 4 = 13 \quad \checkmark$$

$$c = 5 \Rightarrow a = 25 + 4 = 29 \quad \checkmark$$

$$c = 7 \Rightarrow a = 49 + 4 = 53 \quad \checkmark$$

پس سه مقدار برای a وجود دارد.

۱۵۹-۱ اگر c و b هر دو فرد باشند a زوج می شود که قابل قبول نیست. پس b یا c برابر 2 است. فرض کنید $b = 2$ باشد، داریم:

$$a^2 = 4 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = 4 \Rightarrow (a - c)(a + c) = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c = 1 \\ a + c = 4 \end{cases} \times$$

دستگاه جواب ندارد بنابراین هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

$$a = 7q + 2 \quad \text{۱۶۰-۲}$$

می خواهیم عدد سه رقمی باشد، پس:

$$100 \leq a \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 7q + 2 \leq 999 \Rightarrow \frac{98}{7} \leq q \leq \frac{997}{7}$$

$$\Rightarrow 14 \leq q \leq 142/7$$

پس q از 14 تا 142 می تواند باشد، می دانیم تعداد عددهای بزرگتر مساوی a و کوچکتر مساوی b برابر است با $1 + a - b$ ، بنابراین:

$$142 - 14 + 1 = 129$$

$$a = bq + r \quad (I)$$

به مقسوم 50 و به مقسوم علیه 6 واحد اضافه شده. خارج قسمت تغییری نکرده و باقی مانده 4 واحد کم شده است. بنابراین:

$$a + 50 = (b + 6)q + r - 4 \quad (II)$$

با جای گذاری (I) در (II) داریم:

$$bq + r + 50 = bq + 6q + r - 4 \Rightarrow 6q = 54 \Rightarrow q = 9$$

$$a = 17q + r, 0 \leq r < 17 \quad \text{۱۶۲-۳}$$

مجموع باقی مانده و خارج قسمت برابر 9 است یعنی $9 = r + q$ ، بنابراین:

$$a = 16q + q + r \Rightarrow a = 16q + 9 \xrightarrow{+7} a + 7 = 16(q + 1)$$

$$a = 17q + 7 \quad (I)$$

در حالت اول داریم:

فرض کنید x واحد از مقسوم کم کرده ایم و باقی مانده 13 شده است؛

$$a - x = 17q' + 13 \quad (II)$$

بنابراین:

اگر دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$(I) - (II) \Rightarrow x = 17(q - q') - 6$$

می خواهیم x کمترین مقدار خود را داشته باشد، بنابراین $q - q'$ را یک فرض می کنیم و در نتیجه:

$$x = 17 - 6 = 11$$

۱۶۴-۲ $q = 5$ و $r = 24$ است، داریم: $a = 5b + 24, b > 24$ می خواهیم مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند، بنابراین:

$$a = 5(b + x) + r, 0 \leq r < b + x$$

اگر دو رابطه را برابر قرار دهیم، داریم:

$$5b + 24 = 5b + 5x + r \Rightarrow 5x + r = 24$$

حالا اگر بخواهیم x بیشترین مقدار خود را داشته باشد، با توجه به این که $0 \leq r$ است b حداکثر برابر 4 است.

$$a = 5b + 24$$

روش دوم:

باید 24 را یک جوری باز کنیم که بشود با $5b$ فاکتور گرفت.

$$a = 5b + 20 + 4 = 5(b + 4) + 4$$

پس مقسوم علیه حداکثر 4 واحد اضافه می شود.



۱۷۴-۳ اول باقی مانده ۵۵ را بر ۱۲ به دست می آوریم. همان طور که در درس نامه گفتیم باقی مانده ۵۵ را بر ۱۲ به دست می آوریم و بعد باقی مانده ۵۵ را با استفاده از فرمول $r = b - r'$ پیدا می کنیم:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 55 \\ \hline 48 \\ \hline 7 \end{array} \Rightarrow r = 12 - 7 = 5$$

حالا اگر از مقسوم ۵ واحد کم و به مقسوم علیه ۵ واحد اضافه کنیم، باید باقی مانده ۰-۶ را بر ۱۷ به دست آوریم. دوباره مثل قبلی عمل می کنیم:

$$\begin{array}{r} 17 \\ 60 \\ \hline 51 \\ \hline 9 \end{array} \Rightarrow r = 17 - 9 = 8$$

بنابراین باقی مانده ۳ واحد اضافه می شود.

۱۷۵-۴ $7a - 97 = 7(15q + 7) - 97 = 105q - 48$
 $105q$ بر ۲۱ بخش پذیر است بنابراین فقط کافی است باقی مانده ۴۸- را بر ۲۱ به دست آوریم. چون عدد منفی است، اول باقی مانده ۴۸ را به ۲۱ به دست می آوریم و بعد از رابطه $b - r$ استفاده می کنیم:

$$\begin{array}{r} 21 \\ 48 \\ \hline 42 \\ \hline 6 \end{array} \Rightarrow r = 21 - 6 = 15$$

حالا خارج قسمت عبارت را پیدا می کنیم:

$$\left[\frac{105q - 48}{21} \right] = [5q - 2 \frac{2}{3}] = [5q] + [-2 \frac{2}{3}] = 5q - 3$$

۱۷۶-۳ عدد را a فرض می کنیم. داریم:

$$\begin{array}{r} 26 \\ a \\ \hline 4q \end{array} \Rightarrow a = 26q + 4q, 0 \leq 4q < 26 \Rightarrow q_{\max} = 6$$

دقت کنید $r = 4q$ است و باقی مانده از مقسوم علیه کوچک تر است.
 $\Rightarrow a_{\max} = 30 \times 6 = 180$

۱۷۷-۲ باقی مانده یک سوم خارج قسمت است؛ یعنی $r = \frac{q}{3}$ یا $3r = q$. داریم:

$$\begin{array}{r} 7 \\ a \\ \hline 3r \end{array} \Rightarrow a = 7r + r, 0 \leq r < 7$$

r حداکثر برابر ۶ است؛ بنابراین:

$$a = 22 \times 6 = 132 \quad \text{۱۷۸-۳}$$

$$a = 17q + 7 \quad (I)$$

$$a + m = 17q' + 7 \quad (II)$$

$$a - n = 17q + r \quad (III), 0 \leq r < 17$$

با جای گذاری (I) در (II) داریم:

$$17q + 7 + m = 17q' + 7 \Rightarrow m = 17(q' - q)$$

چون m طبیعی است پس حداقل مقدار m برابر ۱۷ است.

با جای گذاری (I) در (III) داریم: $17q + 7 - n = 17q + r \Rightarrow r + n = 7$
 r دست کم برابر صفر است پس n حداکثر می تواند برابر ۷ باشد، بنابراین:
 $7 + 17 = 24$

$$a = bq + 12, 12 < b \quad \text{۱۷۹-۲}$$

$$a \leq 26 \Rightarrow bq + 12 \leq 26 \Rightarrow bq \leq 14$$

می دانیم $q_{\min} = 1$ و $b_{\min} = 13$ است، بنابراین تنها حالت های قابل قبول برای برقراری رابطه $bq \leq 14$ دو حالت $b = 13$ و $q = 1$ و $b = 14$ و $q = 1$ است.

همان طور که می بینید باقی مانده a بر ۷ برابر ۲ است. حالا برای پیدا کردن باقی مانده $9 - 2a^2 - a^2$ بر ۷ سرراست به جای a خود ۲ را قرار می دهیم و باقی مانده را پیدا می کنیم:

$$2^3 - 2 \times 2^2 - 9 = 8 - 8 - 9 = -9$$

باید باقی مانده ۹- را بر ۷ به دست آوریم. راحت ترین کار آن است که طبق آن چه در درس نامه گفتیم اول باقی مانده ۹ را بر ۷ به دست آوریم و از رابطه $r = b - r'$ باقی مانده ۹- بر ۷ را پیدا کنیم:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 9 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \end{array} \Rightarrow r' = 2 \Rightarrow r = 7 - 2 = 5$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 170 \\ \hline 17q + 3 \end{array} \xrightarrow{\times 2} 2a = 34q + 6 \quad \text{روش اول:}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ b = 17q' + 5 \end{array} \xrightarrow{\times 3} 3b = 51q' + 15$$

حالا $2a + 3b + ab$ را بر حسب q و q' بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} 2a + 3b + ab &= 34q + 6 + 51q' + 15 + (17q + 3)(17q' + 5) \\ &= 34q + 6 + 51q' + 15 + 289qq' + 51q' + 85q + 15 \\ &= \underbrace{119q + 102q' + 289qq'}_{\text{مضرب ۱۷}} + 36 \end{aligned}$$

قسمت های q و q' دار همگی بر ۱۷ بخش پذیرند پس فقط کافی است باقی مانده ۳۶ را بر ۱۷ به دست آوریم که برابر ۲ می شود.

روش دوم: در این مدل سؤال ها می توان به جای a و b سرراست باقی مانده ها را جایگزین کنیم. یعنی $a = 3$ و $b = 5$ داریم:

$$2a + 3b + ab = 6 + 15 + 15 = 36$$

و باقی مانده ۳۶ بر ۱۷ برابر ۲ است.

۱۷۱-۲ خارج قسمت ها را به ترتیب q و q' فرض می کنیم، داریم:

$$2a = xq + 5, 5 < x \Rightarrow 2a - 5 = xq \Rightarrow x \mid 2a - 5 \quad (I)$$

$$3a = xq' + 23, 23 < x \Rightarrow 3a - 23 = xq' \Rightarrow x \mid 3a - 23 \quad (II)$$

با توجه به (I) و (II) داریم:

$$\begin{array}{l} x \mid 2a - 5 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} x \mid 6a - 15 \xrightarrow{(-)} x \mid 31 \\ x \mid 3a - 23 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 2} x \mid 6a - 46 \end{array}$$

$$x > 1 \Rightarrow x = 31$$

۱۷۲-۴ a زوج است پس آن را برابر با $2k$ می گیریم، باقی مانده a بر ۱۷ برابر ۳ است؛ بنابراین:

$$\begin{array}{r} 17 \\ 2k \\ \hline q \end{array} \Rightarrow 2k = 17q + 3 \Rightarrow 2k - 3 = 17q$$

$2k - 3$ عددی فرد است پس $17q$ نیز باید فرد باشد و در نتیجه q نیز فرد است، پس $1 + 2q' = 2k$ ؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} 2k - 3 &= 17(2q' + 1) \Rightarrow 2k - 3 = 34q' + 17 \\ \Rightarrow 2k &= 34q' + 20 \xrightarrow{\div 2} k = 17q' + 10 \end{aligned}$$

پس باقی مانده $\frac{a}{4}$ یا همان k بر ۱۷ برابر ۱۰ است.

۱۷۳-۴ نکته می دانیم برای به دست آوردن خارج قسمت تقسیم a بر b باید $\left[\frac{a}{b} \right]$ را پیدا کنیم.

بنابراین: $\left[\frac{13! - 7}{13} \right] = [12! - 0 / 13] = [12!] + [-0 / 13] = 12! - 1$
 بنابراین $a = 12$ و $b = -1$ است و در نتیجه $a + b = 11$.





۱۸۷-۲ باقی مانده ۶ واحد کمتر از مقسوم علیه است یعنی $r = b - 6$ داریم:

$$\begin{array}{r|l} b & \\ \hline -36 & \\ \hline q & \Rightarrow -36 = bq + b - 6, 0 \leq b - 6 \\ \hline b - 6 & \end{array}$$

$$\Rightarrow -30 = b(q+1) \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} a' & 6 & 10 & 15 & 30 \\ \hline q+1 & -5 & -3 & -2 & -1 \end{array}$$

(دقت کنید که b باید بزرگ تر مساوی ۶ باشد.)

چون گفته b کمترین مقدار قابل قبول است پس $b = 6$ و $q+1 = -5$ در نتیجه: $q = -6$.

۱۸۸-۲ باقی مانده مجذور خارج قسمت است یعنی $r = q^2$ داریم:

$$231 = bq + q^2, q^2 < b$$

$$\Rightarrow 231 = q(b+q) \Rightarrow 3 \times 7 \times 11 = q(b+q)$$

حالا دسته بندی می کنیم:

q	b+q	
۱	۲۳۱	$\Rightarrow b = 230$
۳	۷۷	$\Rightarrow b = 74$
۷	۳۳	$\Rightarrow b = 26$ غرق
۱۱	۲۱	$\Rightarrow b = 10$ غرق

دقت کنید این دو حالت در شرط $q^2 < b$ صدق نمی کند.

پس فقط دو مقدار $b = 74$ و $b = 230$ قابل قبول است.

۱۸۹-۱ می دانیم $a = 52$ و $b + q + r = 32$ داریم:

$$52 = bq + r, 0 \leq r < b$$

$$\Rightarrow 52 = bq + 32 - b - q$$

$$\Rightarrow 20 = bq - b - q \Rightarrow 21 = bq - b - q + 1$$

$$\Rightarrow 21 = (b-1)(q-1)$$

حالا حالت بندی می کنیم:

(b-1)	(q-1)	
۲۱	۱	$\Rightarrow b = 22, q = 2, r = 8 \checkmark$
۷	۳	$\Rightarrow b = 8, q = 4, r = 20$ غرق
۳	۷	$\Rightarrow b = 4, q = 8, r = 20$ غرق
۱	۲۱	$\Rightarrow b = 2, q = 22, r = 8$ غرق

پس فقط یک مقدار قابل قبول برای r وجود دارد.

۱۹۰-۳ باقی مانده و خارج قسمت را در تقسیم به ۷ برابر q و باقی مانده و خارج قسمت را در تقسیم به ۱۱ برابر q' فرض می کنیم، داریم:

$$a = 7q + q = 8q, 0 \leq q < 7$$

$$a = 11q' + q' = 12q', 0 \leq q' < 11$$

اگر دو رابطه را برابر قرار دهیم، داریم: $8q = 12q' \Rightarrow 2q = 3q'$
 q باید مضرب ۳ باشد؛ از طرفی بنا به شرط باقی مانده کوچک تر از ۷ است؛ بنابراین مقادیر قابل قبول برای q این ها هستند:

$$q = 0 \Rightarrow q' = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$q = 3 \Rightarrow q' = 2 \Rightarrow a = 24$$

$$q = 6 \Rightarrow q' = 4 \Rightarrow a = 48$$

بنابراین مجموع مقادیر a عبارت است از: $0 + 24 + 48 = 72$

۱۸۰-۲ عدد b را می نامیم، بنابراین: $451 = vb + r, 0 \leq r < b$

$$r = 451 - vb$$

حالا با توجه به شرط باقی مانده داریم:

$$0 \leq r \Rightarrow 451 - vb \geq 0 \Rightarrow vb \leq 451 \Rightarrow b \leq 64$$

$$r < b \Rightarrow 451 - vb < b \Rightarrow 4b > 451 \Rightarrow b > 56/3$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای b عبارت اند از:

$$57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64$$

یعنی ۸ عدد.

۱۸۱-۲ عدد b را می نامیم، داریم:

$$67 = bq + 7, b > 7 \quad (I)$$

$$\Rightarrow 60 = bq \Rightarrow b | 60 \quad (II)$$

با توجه به (I) و (II) باید مقسوم علیه های بزرگ تر از ۷ عدد ۶۰ را پیدا کنیم:

$$10, 12, 15, 20, 30, 60$$

یعنی ۶ عدد.

۱۸۲-۳ $r > q^3$ بنابراین:

$$a = 13q + r, 0 \leq r < 13$$

$$q^3 < r < 13 \Rightarrow q = 0, 1, 2$$

$$q = 0 \Rightarrow r = 1, 2, \dots, 12 \rightarrow 12 \text{ عدد}$$

$$q = 1 \Rightarrow r = 2, \dots, 12 \rightarrow 11 \text{ عدد}$$

$$q = 2 \Rightarrow r = 9, \dots, 12 \rightarrow 12 - 9 + 1 = 4 \text{ عدد}$$

$$\Rightarrow 4 + 11 + 12 = 27$$

۱۸۳-۴ باقی مانده بیشترین مقدار خود را دارد، یعنی $r = b - 1$ داریم:

$$\begin{array}{r|l} b & \\ \hline q & \Rightarrow a = bq + b - 1 \Rightarrow a + 1 = b(q+1) \\ \hline b - 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow b | a + 1 \quad (I)$$

از طرفی می دانیم $b | 15 + 4a$ بنابراین:

$$b | a + 1 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 4} b | 4a + 4 \xrightarrow{(-)} b | 11$$

$$b | 4a + 15 \Rightarrow b | 4a + 15$$

$$\Rightarrow b = 11$$

دقت کنید که گفته $b > 1$ است پس فقط یک مقدار برای b وجود دارد.

۱۸۴-۳ با توجه به اطلاعات داده شده، $a = b + 70$ و $r = 10$ است، بنابراین:

$$b + 70 = bq + 10, b > 10$$

$$\Rightarrow 60 = bq - b \Rightarrow 60 = b(q-1) \quad (II)$$

می خواهیم خارج قسمت حداکثر شود؛ بنابراین باید b کمترین مقدار خود را داشته باشد و با توجه به این که $b > 10$ است، $b_{\min} = 12$ در نتیجه:

$$60 = 12(q-1) \Rightarrow q-1 = 5 \Rightarrow q = 6$$

$$a = bq + 5 \quad (I), b > 5$$

$$a + 90 = bq' + 15 \quad (II), b > 15$$

با قراردادن (I) در (II) داریم:

$$bq + 5 + 90 = bq' + 15 \Rightarrow 80 = b(q' - q)$$

با توجه به این که $b > 15$ است پس $b_{\min} = 20$ و $b_{\max} = 80$ در نتیجه اختلاف حداکثر و حداقل مقدار b برابر ۶۰ است.

۱۸۶-۱ عدد a فرض می کنیم. $r = \frac{4}{5}q^2$ ، بنابراین:

$$a = 200q + \frac{4}{5}q^2, 0 \leq \frac{4}{5}q^2 < 200$$

$$\Rightarrow 0 \leq 4q^2 < 1000 \Rightarrow 0 \leq q^2 < 250 \Rightarrow 0 \leq q < 15/...$$

دقت کنید که به ازای $q = 0$ عدد a طبیعی نمی شود، همچنین حواستان باشد که q حتماً باید مضرب ۵ باشد وگرنه عدد a طبیعی نمی شود. پس مقادیر قابل قبول q عبارت اند از:

$$q = 5, 10, 15$$



پس این مجموعه، مجموعه اعداد صحیح فرد است. یعنی:

$$A = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$3 \mid k+1 \Rightarrow k+1=3q \Rightarrow k=3q-1$$

این مجموعه، مجموعه عددهایی است که در تقسیم به ۳ باقی مانده‌ای برابر ۲ دارد. یعنی:

$$B = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$$

فقط همین چند عضوی که نوشتیم $A \cap B$ شامل چه عددهایی است؟

این یعنی عددهایی که هم فرد باشند و هم در تقسیم به ۳ باقی مانده‌ای برابر ۲ داشته باشند. اما این مجموعه را به چه صورتی می‌توان نوشت؟
دقت کنید که در $A \cap B$ ، $k+1$ هم باید بر ۲ بخش پذیر باشد و هم بر ۳، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} 2 \mid k+1 \\ 3 \mid k+1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6 \mid k+1 \Rightarrow k+1=6q \Rightarrow \begin{cases} k=6q-1 \\ \text{یا} \\ k=6q+5 \end{cases}$$

یا به عبارت دیگر:

$$A \cap B = \{6q+5 : q \in \mathbb{Z}\}$$

۱۹۵-۳ دو عدد را $7q+3$ و $7q'+3$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$(7q+3)(7q'+3) = 49qq' + 21q + 21q' + 9$$

$$= 7(7qq' + 3q + 3q' + 1) + 2 = 7k + 2$$

پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که در تقسیم به ۷ باقی مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد که در میان گزینه‌ها ۹۳ این ویژگی را دارد.

۱۹۶-۲ اگر a فرد باشد، با توجه به این که ۱۲ زوج است، پس r حتماً باید فرد باشد.

$$a \mid 12$$

$$q \Rightarrow a=12q+r, 0 \leq r < 12$$

عددهای فرد $0 \leq r < 12$ عبارت‌اند از:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11$$

یعنی r ، ۶ حالت می‌تواند داشته باشد.

۱۹۷-۳ a بر ۷ بخش پذیر است، پس:

$$a=7q$$

اما a باید فرد باشد پس q نمی‌تواند زوج باشد و در نتیجه q نیز فرد است:

$$q=2k+1 \Rightarrow a=7(2k+1)=14k+7$$

۱۹۸-۳ باقی مانده a بر ۷ برابر ۲ است، یعنی:

$$a=7q+2$$

حالا اگر بخواهیم باقی مانده a را بر ۳۵ پیدا کنیم، باید q یک عامل ۵ داشته باشد تا قسمت $7q$ عبارت مضرب ۳۵ شود و فقط یک عدد ثابت بماند که باقی مانده آن را بر ۳۵ به دست می‌آوریم.

اما از طرفی می‌دانیم باقی مانده هر عدد در تقسیم به ۵، پنج حالت دارد. بنابراین q را باید در هر کدام از این ۵ حالت در نظر بگیریم و باقی مانده را پیدا کنیم.

خب تا این جا سؤال حل شد ولی برای محکم کاری شما هر ۵ حالت را ببینید:

$$q=5k \Rightarrow a=35k+2 \Rightarrow r=2$$

$$q=5k+1 \Rightarrow a=7(5k+1)+2 \Rightarrow a=35k+9$$

$$\Rightarrow r=9$$

$$q=5k+2 \Rightarrow a=7(5k+2)+2 \Rightarrow a=35k+16$$

$$\Rightarrow r=16$$

$$q=5k+3 \Rightarrow a=7(5k+3)+2 \Rightarrow a=35k+23$$

$$\Rightarrow r=23$$

$$q=5k+4 \Rightarrow a=7(5k+4)+2 \Rightarrow a=35k+30$$

$$\Rightarrow r=30$$

۱۹۱-۳

$$a=11q+4 \xrightarrow{\times 12} 12a=132q+48$$

$$a=12q'+7 \xrightarrow{\times 11} 11a=132q'+77$$

$$\xrightarrow{(-)} a=132(q-q')-29$$

خب $132(q-q')$ که بر ۱۳۲ بخش پذیر است فقط باید باقی مانده -29 را بر ۱۳۲ پیدا کنیم. راه پیدا کردن باقی مانده یک عدد منفی را که بلدید:

$$29 \mid 132$$

$$\frac{0}{29} \Rightarrow r=132-29=103$$

$$29$$

توجه

یک سری هم دوست دارند این جوری باقی مانده را پیدا کنند که هیچ ایرادی ندارد.

$$a=132(q-q')-\underbrace{29+132}_{\text{این دورا با هم جمع می‌کنیم}}-\underbrace{132}_{\text{از 132 فاکتور می‌گیریم}}$$

$$a=132(q-q'-1)+103$$

۱۹۲-۳ داریم:

$$a=13a+5 \xrightarrow{\times 11} 11a=143q+55$$

$$a=11q'+3 \xrightarrow{\times 12} 12a=132q'+36$$

$$\xrightarrow{(-)} 2a=143(q'-q)-16 \Rightarrow \underbrace{2a+16}_{\text{زوج}}=143(q'-q)$$

$2a+16$ زوج است پس $143(q-q')$ نیز باید زوج باشد، در نتیجه $q-q'$ زوج است.

$$q-q'=2k \Rightarrow 2a=143 \times 2k-16$$

$$\Rightarrow a=143k-8$$

حالا چون گفته $a < 200$ است پس $k=1$ و در نتیجه:

$$\Rightarrow a=135$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 1+3+5=9$$

۱۹۳-۳ می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت

$$8q+1$$
 نوشت.

$$a^2=8q+1 \quad (I)$$

بنابراین:

از طرفی باقی مانده a^2 بر ۹ برابر ۴ است، در نتیجه:

$$a^2=9q'+4 \quad (II)$$

حالا برای این که باقی مانده را بر ۷۲ پیدا کنیم، رابطه (I) را در ۹ و (II) را در ۸ ضرب می‌کنیم:

$$a^2=8q+1 \xrightarrow{\times 9} 9a^2=72q+9$$

$$a^2=9q'+4 \xrightarrow{\times 8} 8a^2=72q'+32$$

$$\xrightarrow{(-)} a^2=\underbrace{72 \times (q-q')}_{\text{مضرب 72}}-23$$

حالا باید باقی مانده -23 را بر ۷۲ پیدا کنیم. طبق معمول باقی مانده -23 را بر ۷۲ پیدا می‌کنیم بعد از $b-r$ می‌رویم:

$$23 \mid 72$$

$$\frac{0}{72} \Rightarrow r=72-23=49$$

$$49$$

۱۹۴-۴ مجموعه‌های $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid 2 \mid k+1\}$ و

$$B = \{k \in \mathbb{Z} \mid 3 \mid k+1\}$$

را پیدا می‌کنیم:

$$2 \mid k+1 \Rightarrow k+1=2q \Rightarrow k=2q-1$$



۱۹۹-۱ باقی‌مانده a بر 3^0 برابر ۸ است، پس:

$$a \equiv 3^0 \pmod{8} \Rightarrow a = 3^0 q + 8$$

حالا می‌خواهیم باقی‌مانده a را بر 2^0 به دست آوریم. در سؤال قبل دیدیم که قسمت q دار مضرب عدد داده‌شده بود اما این‌جا $3^0 q$ مضرب 2^0 نیست، بنابراین باید q را طوری حالت‌بندی کنیم که $3^0 q$ بر 2^0 بخش‌پذیر شود. خوب $3^0 = 3 \times 1^0$ یعنی 1^0 را توی خودش دارد.

پس q باید یک جوری باشد که یک عامل 2 توی خودش داشته باشد که قسمت q دار ماجرا مضرب 2^0 شود. بنابراین q را در دو حالت فرد و زوج در نظر می‌گیریم: $a = 3^0 k + 8 \Rightarrow q = 2k \Rightarrow q = 2k$ زوج باشد مضرب 2^0

در این حالت باقی‌مانده a بر 2^0 برابر ۸ است.

$$\begin{aligned} q = 2k \Rightarrow q = 2k + 1 \Rightarrow a = 3^0(2k + 1) + 8 \\ = 3^0 k + 3^0 + 8 \end{aligned}$$

باقی‌مانده 3^0 بر 2^0 برابر ۱۸ است؛ پس باقی‌مانده a بر 2^0 یا ۸ است یا ۱۸ و دو حالت دارد.

۲۰۰-۱ یادآوری می‌دانیم به ازای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ می‌توان p^2 را به صورت $24k + 1$ نوشت.

$$p^2 = 24k + 1$$

حالا اگر بخواهیم باقی‌مانده p^2 را بر ۳۶ پیدا کنیم، باید کاری کنیم که $24k$ مضرب ۳۶ باشد، بنابراین اگر k یک عامل ۳ داشته باشد، با توجه به این‌که $72 = 24 \times 3$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است، $24k$ بر ۳۶ بخش‌پذیر می‌شود. بنابراین باید k را در سه حالت در نظر گرفت:

$$k = 3q \Rightarrow p^2 = 72q + 1 \Rightarrow r = 1$$

$$k = 3q + 1 \Rightarrow p^2 = 24(3q + 1) + 1 = 72q + 25 \Rightarrow r = 25$$

$$k = 3q + 2 \Rightarrow p^2 = 24(3q + 2) + 1 = 72q + 49 \Rightarrow r = 13$$

پس باقی‌مانده p^2 بر ۳۶ سه حالت دارد.

$$201-3 \text{ در تقسیم یک عدد بر } 4, \text{ باقی‌مانده } 4 \text{ حالت دارد:}$$

عددهای بخش‌پذیر بر ۴ یا $4k$.

عددهایی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند یا $4k + 1$.

عددهایی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند یا $4k + 2$.

و بالاخره عددهایی که در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارند یا $4k + 3$. از طرفی می‌دانیم باقی‌مانده ۸۱ در تقسیم به ۴ برابر ۱، باقی‌مانده ۲۸ در تقسیم به ۴ برابر صفر و باقی‌مانده ۱۲۲ در تقسیم به ۴ برابر ۲ است، بنابراین اگر ما بخواهیم هر ۴ نوع باقی‌مانده را داشته باشیم، باید k یا $a + x$ طوری باشد که باقی‌مانده x در تقسیم به ۴ برابر ۳ شود که در میان گزینه‌ها $a + 75$ این ویژگی را دارد. برای درک بهتر:

$$a + 81 \text{ هم باقی‌مانده است با: } a + 1$$

$$a + 28 \text{ هم باقی‌مانده است با: } a$$

$$a + 122 \text{ هم باقی‌مانده است با: } a + 2$$

$$a + 75 \text{ هم باقی‌مانده است با: } a + 3$$

حالا اگر a به هر کدام از فرم‌های $4k$ یا $4k + 1$ یا $4k + 2$ یا $4k + 3$ باشد، یکی از a یا $a + 1$ یا $a + 2$ یا $a + 3$ حتماً مضرب ۴ می‌شود:

$$a = 4k \rightarrow \text{خود } a \text{ مضرب } 4 \text{ است.}$$

$$a = 4k + 1 \rightarrow a + 3 \text{ مضرب } 4 \text{ است.}$$

$$a = 4k + 2 \rightarrow a + 2 \text{ مضرب } 4 \text{ است.}$$

$$a = 4k + 3 \rightarrow a + 1 \text{ مضرب } 4 \text{ است.}$$

۲۰۲-۳ هر عدد صحیحی مثل a در تقسیم به ۳، سه حالت دارد:

$$a = 3k \quad a = 3k + 1 \quad a = 3k + 2$$

اگر $a = 3k$ باشد چون یکی از عبارات حاصل‌ضرب $4a$ است، پس حاصل‌ضرب مضرب ۳ می‌شود.

اگر $a = 3k + 1$ باشد، $a + 1 = 3k + 2$ مضرب ۳ می‌شود.

پس اگر بخواهیم این عبارت همواره مضرب ۳ باشد، اگر $a = 3k + 2$ باشد نیز $a + b = 7a$ باید مضرب ۳ بشود. $7(3k + 2) + b = 21k + 14 + b$

که در میان گزینه‌ها به ازای $b = 43$ عبارت مضرب ۳ می‌شود.

۲۰۳-۴ می‌دانیم در تقسیم بر ۳ عددها سه جور باقی‌مانده ممکن است داشته باشند و چون عدد ما اول و بزرگ‌تر از ۳ است، پس نمی‌تواند مضرب ۳ باشد، در دو حالت دیگر مربع عدد را پیدا می‌کنیم:

$$n = 3k + 1 \text{ بر باقی‌مانده‌ای برابر } 1 \text{ داشته باشند.}$$

$$n^2 = 9k^2 + 6k + 1 \Rightarrow n^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3$$

مضرب ۳

$$n = 3k + 2 \text{ بر باقی‌مانده‌ای برابر } 2 \text{ داشته باشند.}$$

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \Rightarrow n^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6$$

مضرب ۳

بنابراین $n^2 + 2$ همواره مضرب ۳ است و این گزینه مثال نقض ندارد.

۲۰۴-۱ اگر x و y بر ۳ بخش‌پذیر نباشد یعنی ممکن است باقی‌مانده‌های آن‌ها در تقسیم به ۳ برابر ۱ یا ۲ باشد که در هر دو حالت باقی‌مانده مربع آن‌ها در تقسیم به ۳ برابر ۱ است.

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 \Rightarrow 1 = 3$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 \Rightarrow 1 = 3$$

پس باقی‌مانده هر دوی x^2 و y^2 در تقسیم به ۳ برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$x^2 + y^2 + 7 = 3k + 1 + 3k' + 1 + 7 = 3(k + k' + 3)$$

که همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲۰۵-۳ باقی‌مانده a در تقسیم به ۳ برابر صفر یا ۱ یا ۲ است. بنابراین باقی‌مانده a^2 در تقسیم بر ۳ برابر ۰ یا ۱ است.

$$a = 3k \Rightarrow a^2 = 9k^2$$

$$\Rightarrow r = 0 \rightarrow \text{باقی‌مانده بر } 3 \text{ برابر صفر است.}$$

$$a = 3k + 1 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 6k + 1$$

$$\Rightarrow r = 1 \rightarrow \text{باقی‌مانده بر } 3 \text{ برابر } 1 \text{ است.}$$

$$a = 3k + 2 \Rightarrow a^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

$$\Rightarrow r = 1 \rightarrow \text{باقی‌مانده بر } 3 \text{ برابر } 1 \text{ است.}$$

برای b^2 نیز همین‌طور است یعنی باقی‌مانده b^2 در تقسیم به ۳ برابر صفر یا ۱ است، بنابراین $a^2 + b^2$ زمانی بر ۳ بخش‌پذیر است که هم a و هم b بر ۳ بخش‌پذیر باشند بنابراین $a - b = 2a$ نیز حتماً مضرب ۳ است که در میان گزینه‌ها ۱۵ ویژگی را دارد.

۲۰۶-۴ اگر عددی به ۴ بخش‌پذیر نباشد یعنی در تقسیم به ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۲ یا ۳ دارد. در هر کدام از قسمت‌ها عدد را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4k + 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 16k^2 + 8k + 1 = 8k(2k + 1) + 1 = 8q + 1$$

$$4k + 2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1) = 4q$$

$$4k + 3 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 16k^2 + 24k + 9$$

۸+۱

$$= 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8q_1$$

بنابراین عدد یا $4q$ است یا $8q_1 + 1$.



۲۰۷-۲ نکته گفتیم برای پیدا کردن باقی مانده مربع کامل بر یک عدد، می توان خود باقی مانده ها را به توان ۲ رساند.

در تقسیم یک عدد بر ۵ باقی مانده ها از صفر تا ۴ می توانند تغییر کنند. در هر کدام از این پنج حالت، باقی مانده های مربع کامل را بر ۵ پیدا می کنیم:

$$r=0 \Rightarrow r^2=0, \quad r=1 \Rightarrow r^2=1, \quad r=2 \Rightarrow r^2=4$$

$$r=3 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow \text{باقی مانده به } 5=4$$

$$r=4 \Rightarrow r^2=16 \Rightarrow \text{باقی مانده به } 5=1$$

پس باقی مانده یک مربع کامل در تقسیم به ۵ برابر صفر یا ۱ یا ۴ است و چون در دو حالت $r=2$ و $r=3$ باقی مانده مربع کامل در تقسیم به ۵ برابر ۴ می شود، بنابراین احتمال این که یک مربع کامل در تقسیم به ۵ باقی مانده ای برابر ۴ داشته باشد، برابر است با:

۲۰۸-۳ هر عدد طبیعی را در تقسیم به ۶ به یکی از صورت های زیر می توان نوشت. اگر هر کدام از آن ها را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$\begin{aligned} \text{صفر} &\rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 36k^2 \rightarrow \text{به توان } 2 \rightarrow 6k \\ 1 &\rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 36k^2 + 12k + 1 \rightarrow \text{به توان } 2 \rightarrow 6k + 1 \\ 4 &\rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 36k^2 + 24k + 4 \rightarrow \text{به توان } 2 \rightarrow 6k + 2 \\ 3 &\rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 36k^2 + 36k + 9 \rightarrow \text{به توان } 2 \rightarrow 6k + 3 \\ 4 &\rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 36k^2 + 48k + 16 \rightarrow \text{به توان } 2 \rightarrow 6k + 4 \\ 1 &\rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 36k^2 + 60k + 25 \rightarrow \text{به توان } 2 \rightarrow 6k + 5 \end{aligned}$$

یعنی باقی مانده یک مربع کامل در تقسیم به ۶ برابر صفر یا ۱ یا ۳ یا ۴ است و نمی تواند برابر ۲ باشد.

توجه برای راحتی کار می شد فقط خود باقی مانده ها را به توان رساند.

$$6k \rightarrow \text{صفر}, \quad 6k+1 \rightarrow 1, \quad 6k+2 \rightarrow 4$$

$$6k+3 \rightarrow 9 \rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 3$$

$$6k+4 \rightarrow 16 \rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 4$$

$$6k+5 \rightarrow 25 \rightarrow \text{باقی مانده به } 6 \rightarrow 1$$

۲۰۹-۱ می دانیم باقی مانده هر عدد در تقسیم بر ۵ برابر است با صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴، بنابراین باقی مانده مربع یک عدد در تقسیم به ۵ برابر است با: (برای راحتی کار می توان خود باقی مانده ها را به توان ۲ رساند.)

$$r=0 \Rightarrow r^2=0, \quad r=1 \Rightarrow r^2=1, \quad r=2 \Rightarrow r^2=4$$

$$r=3 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow \text{باقی مانده به } 5=4$$

$$r=4 \Rightarrow r^2=16 \Rightarrow \text{باقی مانده به } 5=1$$

بنابراین باقی مانده یک مربع کامل در تقسیم به ۵ برابر است با صفر یا ۱ یا ۴ اما باقی مانده $5^n + 2$ در تقسیم به ۵ برابر ۲ است، بنابراین به ازای هیچ مقداری از n این عبارت مربع کامل نیست.

