

انتشارات
آگاه

موج؟ ۲۰

مرحله‌ای
و جامع

ویژه آمادگی شرکت در امتحان‌های نهایی و نیم‌سال

ریاضی و آمار دوازدهم

(انسانی)

شیدا شاداب



مرورنامه
شب امتحان

امتحان‌های
نیم‌سال اول و
دوم

امتحان‌های
درس به درس

پاسخ‌های
تشریحی +
کلید تصحیح

امتحان‌های
نهایی اخیر

امتحان‌های
شبیه‌ساز نهایی

پیشگفتار

در ابتدا باید یک خدایوت جانانه به شما دانش آموزان عزیز دوازدهمی بگویم که در حال عبور از یکی از سال‌های پرچالش زندگی‌تان هستید. در این مسیر، یکی از اهداف مهم شما کسب نمره مناسب در امتحان نهایی است. خوشحالم که این کتاب را انتخاب کرده‌اید و با اطمینان به شما می‌گویم که با مطالعه آن، کسب نمره ۲۰ برای شما آسان می‌شود.

این کتاب کاملاً در چارچوب کتاب درسی نوشته شده است و دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ درس‌نامه‌ای کارراه‌بینداز دارد که مطابق فصل‌ها و درس‌های کتاب دسته‌بندی شده است. در هر درس مفاهیم اصلی گفته شده و برای هر مفهوم یا مطلبی که در امتحانات از آن سؤال می‌دهند، مسئله‌ای نمونه حل شده است.

۲ آزمون‌محور است، تا برای هر آزمون در سطح مدرسه و امتحان نهایی آمادگی لازم را کسب کنید.

۳ پاسخنامه آزمون‌ها بر اساس پاسخنامه‌های امتحانات نهایی بارم‌بندی شده است. شما می‌توانید با مطالعه دقیق آن‌ها به این موضوع پی ببرید که قسمت‌های مهم در نوشتن پاسخ چیست؛

۴ همه مطالب کتاب درسی در آزمون‌ها پوشش داده شده‌اند. در این آزمون‌ها هر مطلب کتاب درسی را در قالب حداقل یک مسئله مشاهده می‌کنید؛

۵ این کتاب برای هر دانش آموز در هر سطحی مناسب است. دانش آموزان توانمند از این کتاب می‌توانند برای بهبود روش نوشتن خود استفاده کنند. همچنین دانش آموزانی که هنوز به هر دلیلی نتوانسته‌اند به مطالب کتاب درسی تسلط پیدا کنند، می‌توانند در زمان کوتاه نمره مناسبی کسب کنند.

علاوه بر درس‌نامه، این کتاب دارای ۲۸ آزمون، شامل آزمون‌های ۱۰ نمره‌ای و ۲۰ نمره‌ای است. آزمون‌های درس به درس ۱۰ نمره‌ای هستند و آزمون‌های نیم‌سال اول، نیم‌سال دوم و جامع (تألیفی و نهایی سال‌های اخیر) ۲۰ نمره‌ای.

نوع آزمون	تعداد آزمون‌ها	سرفصل
درس به درس	۱۱	هر درس ۱ یا ۲ آزمون
نیم‌سال اول	۴	فصل اول و فصل دوم (درس اول)
نیم‌سال دوم	۲	فصل دوم (درس دوم) و فصل سوم
جامع - شبیه‌ساز نهایی	۵	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۲	۳	تمام کتاب
نهایی ۱۴۰۳	۳	تمام کتاب

آزمون‌های جامع کاملاً تألیفی هستند و بودجه‌بندی آن‌ها بر اساس امتحان نهایی است. اما در سایر آزمون‌ها از سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته نیز استفاده شده است. این موضوع به ما و شما کمک می‌کند که به مهم‌ترین هدف کتاب برسیم و آن کسب نمره ۲۰ در امتحان نهایی ریاضی و آمار ۳ است.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، دکتر آریس آقانیانس برای مطالعه و ویراستاری علمی کتاب، خانم‌ها فاطمه احدی و مریم احمدی برای صفحه‌آرایی، خانم مرضیه کریمی برای رسم شکل‌ها و خانم ستین مختار مسئول واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

شیدا شاداب

فهرست مطالب

آزمون ۱۶: نیم‌سال دوم (۱) ۲۰

آزمون ۱۷: نیم‌سال دوم (۲) ۲۱

مرورنامه ۲۳

آزمون ۱۸: جامع (۱) - شبیه‌ساز نهایی ۴۰

آزمون ۱۹: جامع (۲) - شبیه‌ساز نهایی ۴۱

آزمون ۲۰: جامع (۳) - شبیه‌ساز نهایی ۴۳

آزمون ۲۱: جامع (۴) - شبیه‌ساز نهایی ۴۵

آزمون ۲۲: جامع (۵) - شبیه‌ساز نهایی ۴۷

آزمون ۲۳: جامع (۶) - نهایی خرداد ۱۴۰۲ ۴۹

آزمون ۲۴: جامع (۷) - نهایی شهریور ۱۴۰۲ ۵۰

آزمون ۲۵: جامع (۸) - نهایی دی ۱۴۰۲ ۵۲

آزمون ۲۶: جامع (۹) - نهایی خرداد ۱۴۰۳ ۵۳

آزمون ۲۷: جامع (۱۰) - نهایی شهریور ۱۴۰۳ ۵۵

آزمون ۲۸: جامع (۱۱) - نهایی دی ۱۴۰۳ ۵۷

پاسخ‌های تشریحی ۶۰

آزمون‌های مرحله‌ای و جامع

آزمون ۱: فصل اول - درس اول (۱) ۲

آزمون ۲: فصل اول - درس اول (۲) ۳

آزمون ۳: فصل اول - درس دوم (۱) ۴

آزمون ۴: فصل اول - درس دوم (۲) ۵

آزمون ۵: فصل اول - درس سوم (۱) ۶

آزمون ۶: فصل اول - درس سوم (۲) ۷

آزمون ۷: فصل دوم - درس اول ۸

آزمون ۸: نیم‌سال اول (۱) ۹

آزمون ۹: نیم‌سال اول (۲) ۱۰

آزمون ۱۰: نیم‌سال اول (۳) ۱۲

آزمون ۱۱: نیم‌سال اول (۴) ۱۴

آزمون ۱۲: فصل دوم - درس دوم ۱۶

آزمون ۱۳: فصل سوم - درس اول ۱۷

آزمون ۱۴: فصل سوم - درس دوم ۱۸

آزمون ۱۵: فصل سوم - درس سوم ۱۹

آزمون

۱

موضوع آزمون

صفحات پاسخ

فصل اول - درس اول (۱)

۶۰ تا ۶۱

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) تعداد اعداد سه رقمی با ارقام ۰، ۵ و ۲، با تکرار ارقام برابر ۳! است. ب) $P(7, 3) = 210$.	۰/۵
۲	در جاهای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید. الف) تعداد جایگشت‌های شیء متمایز برابر ۷۲۰ است. ب) $\binom{n}{n} = \dots\dots\dots$ و $\binom{n}{1} = \dots\dots\dots$ پ) مجموعه پنج عضوی $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ زیر مجموعه دوعضوی دارد. (دی ۹۸ با تغییر)	۱
۳	با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بی‌معنی): الف) چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت که حروف کلمه «خور» و حروف کلمه «شید» همواره کنار هم باشند؟ ب) چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت که با کلمه «دوش» شروع شود؟	۱/۲۵
۴	از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز و ۲ کتاب فیزیک متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز به چند طریق می‌توان: الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کرد؟ ب) یک کتاب ریاضی انتخاب کرد؟	۱ (شهریور ۱۴۰۰)
۵	الف) مقدار n را از تساوی $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ پیدا کنید. ب) حاصل عبارت $\frac{4!+3!}{2!}$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۶	در کیسه‌ای ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی داریم. به چند طریق می‌توان از بین این توپ‌ها: الف) ۳ توپ هم‌رنگ انتخاب کرد؟ ب) ۳ توپ قرمز و ۲ توپ آبی انتخاب کرد؟	۱/۵
۷	از جعبه‌ای که شامل ۶ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب است، ۳ لامپ به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی را بیابید که: الف) هر سه لامپ سالم یا هر سه لامپ معیوب باشند. ب) حداکثر یک لامپ معیوب باشد.	۲
۸	مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ را در نظر بگیرید. الف) چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟ ب) A چند زیرمجموعه ۴ عضوی شامل دو عضو b و c دارد؟ پ) A چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که شامل عضو f نیستند؟	۱/۵ (دی ۱۴۰۱ با تغییر)
جمع نمره	۱۰	پیروز و سربلند باشید

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ داده باشد. ب) تهی یک پیشامد حتمی است. پ) اگر داده دورافتاده نداشته باشیم، میانه معیار مناسبی برای گرایش به مرکز است. ت) در دنباله $1, -4, -9, \dots$ ضابطه دنباله به صورت $n-3$ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) فضای نمونه پرتاب یک تاس و دو سکه عضو دارد. ب) اگر در پرتاب یک تاس، A پیشامد رو شدن عدد بزرگتر از ۶ باشد، آن گاه $P(A) = \dots$ پ) داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن کمتر و نصف داده‌ها از آن بیشتر هستند. ت) با توجه به الگوی روبه‌رو، تعداد گوی‌ها در شکل دوازدهم برابر است. 	۱
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۵ چند رمز سه رقمی می‌توان ساخت؟ (۱) 4^3 (۲) 3^4 (۳) $4!$ (۴) 4^8 ب) در شکل مقابل، اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، کدام گزینه قسمت رنگی را نشان می‌دهد؟ (۱) $(A \cup B) - C$ (۲) $A - (B \cup C)$ (۳) $(B \cup C) - A$ (۴) $A - (B \cap C)$ پ) روش نمونه‌گیری مربوط به کدام گام از چرخه آمار است؟ (۱) بیان مسئله (۲) طرح و برنامه‌ریزی (۳) بحث و نتیجه‌گیری (۴) تحلیل داده‌ها ت) اگر $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$ و $b_n = n^2 + 1$ حاصل $4a_1 + \frac{b_3}{2}$ کدام است؟ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰	۲
۴	مقدار n را طوری بیابید که رابطه $C_4^n - 1 = P(n, 2)$ برقرار باشد.	۱
۵	یک گروه ۹ نفره می‌خواهند با هم عکس یادگاری بگیرند. اگر بخواهیم بین دو نفر مشخص از این گروه دقیقاً ۴ نفر قرار بگیرند، آن‌ها به چند حالت می‌توانند با هم عکس بگیرند؟	۱/۲۵
۶	پیشامدهای ناسازگار A و B را در فضای نمونه S در نظر بگیرید. اگر $P(A') = \frac{1}{6}$ و احتمال رخ دادن A یا B برابر $\frac{9}{10}$ باشد، احتمال رخ دادن B چقدر است؟	۱/۲۵

ردیف	سؤالات	نمره
۷	مطابق شکل، فردی می‌خواهد از شهر A به شهر D سفر کند. اگر تعداد کل راه‌های ممکن برابر ۳۶ باشد، تعداد مسیرها از B به C را به دست آورید.	۱
۸	عقربه دستگاه چرخنده مقابل، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد (عقربه روی مرز ناحیه‌ها نمی‌ایستد). چقدر احتمال دارد که عقربه روی عددی اول یا عددی کمتر از ۶ قرار بگیرد؟	۰/۷۵
۹	هفت پرچم با شماره‌های ۱ تا ۷ داریم. همچنین ۷ مکان برای قرارگیری پرچم‌ها وجود دارد. اگر این پرچم‌ها به طور تصادفی در این مکان‌ها قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد پرچم‌های با شماره غیراول در مکان‌های زوج قرار گرفته باشند؟	۱
۱۰	در یک پارک جنگلی محافظت شده، ۸ بز کوهی وجود دارد. کارشناسان ۳ تای آن‌ها را گرفته‌اند، نشان‌دار کرده‌اند و دوباره آزادشان کرده‌اند. ۵ بز کوهی به طور تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد حداکثر ۲ بز کوهی از آن‌ها نشان‌دار باشد؟	۲
۱۱	از زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ ، یک زیرمجموعه را به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این زیرمجموعه شامل عضو d باشد؟	۱/۲۵
۱۲	نمودارهای روبه‌رو نمرات دو دانش‌آموز A و B را طی یک سال در یک کلاس نشان می‌دهند. کدام دانش‌آموز عملکرد بهتری داشته است؟ چرا؟	۱/۲۵
۱۳	یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل را به طور خلاصه بیان کنید.	۱
۱۴	الف) جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \begin{cases} n^2 - 1 & 1 \leq n < 10 \\ \sqrt{n} & n \geq 10 \end{cases}$ است. حاصل عبارت $a_1 - a_{36}$ را به دست آورید. ب) جمله چهارم دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + n$, $a_1 = 2$ را بیابید.	۱/۵
۱۵	برای اعداد طبیعی فرد متوالی، الف) رابطه بازگشتی بنویسید. ب) ضابطه تابعی (جمله عمومی) بنویسید. پ) چندمین جمله از این دنباله برابر ۹۹ است؟	۱/۷۵
۱۶	اعداد مقابل شبیه یک مثلث کنار هم قرار گرفته‌اند که به آن مثلث خیام می‌گویند. الف) جمله عمومی (ضابطه تابعی) مربوط به مجموع اعداد هر سطر را بنویسید. ب) مجموع اعداد سطر بیستم را بیابید.	۱
	پیروز و سربلند باشید	جمع نمره ۲۰

صفحات پاسخ

موضوع آزمون

۱۶

آزمون

۷۷ تا ۷۹

نیمسال دوم (۱)

ردیف	سؤالات	نمره	امتحان نهایی: ریاضی و آمار ۳	رشته: ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی	تألیفی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) رابطه بازگشتی دنباله $1, -\frac{1}{3}, 9, -3, \dots$ به صورت $a_1 = 9$, $a_{n+1} = (-\frac{1}{3})a_n$ است. (ب) در تابع نمایی $y = 2^{-x}$, با افزایش مقدار x , مقدار y نیز افزایش می‌یابد. (پ) به ازای $x > 0$, نمودار تابع $y = 3^x$ همواره بالاتر از نمودار تابع $y = 2^x$ است. (ت) حاصل جمع ریشه‌های چهارم عدد $\frac{625}{81}$ برابر صفر است.	۱				
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (الف) رابطه بازگشتی دنباله $80, 90, 100, 110, \dots$ به صورت است. (ب) جمله عمومی دنباله $16, -8, 4, -2, \dots$ به صورت است. (پ) ریشه سوم عدد -27 برابر با است. (ت) اگر $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ یک تابع نمایی باشد، آن‌گاه $f(-2) = \dots\dots\dots$	۱				
۳	هشتمین جمله یک دنباله حسابی برابر ۶۵ و جمله شانزدهم آن برابر ۱۰۵ است. جمله بیست و نهم این دنباله حسابی را به دست آورید. (دی ۹۸)	۱/۵				
۴	در یک دنباله حسابی $a_1 + a_3 + a_5 = 120$. جمله هفتم دنباله چند است؟	۱/۲۵				
۵	سه عدد را به گونه‌ای میان دو عدد ۱۰ و ۲۲ قرار دهید که یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل شود. (شهریور ۱۴۰۱)	۱				
۶	با توجه به رابطه $\begin{cases} a_{n+1} = 3 + a_n \\ a_1 = -4 \end{cases}$, مطلوب است محاسبه S_{14} .	۱/۲۵				
۷	در یک دنباله هندسی، جمله چهارم برابر ۵ و جمله هفتم برابر ۱۳۵ است. جمله پانزدهم دنباله را بیابید.	۲				
۸	با توجه به دنباله هندسی $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, حاصل $\frac{a_{12}}{a_9}$ را به دست آورید.	۰/۷۵				
۹	x را طوری بیابید که دنباله $12x - 4, 5x, 2x + 1$ یک دنباله هندسی باشد.	۱				
۱۰	(الف) مجموع شانزده جمله اول دنباله اعداد طبیعی فرد را به دست آورید. (ب) مجموع ۱۰ جمله اول دنباله $1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \dots$ را حساب کنید.	۲				
۱۱	حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل بنویسید. (الف) $(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{m^2})^{-4}$ (ب) $x^{0/84} \times x^{0/16}$ (پ) $(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}})^2(a^3b^2)^{\frac{1}{2}}$	۲				
۱۲	با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{4}$ و $\sqrt[10]{250}$ با هم برابرند.	۰/۷۵				
۱۳	از تساوی مقابل مقدار x را بیابید. $\frac{\frac{1}{x^2} \times x^3}{x^{\frac{3}{4}}} = 2\sqrt[4]{4}$	۱/۲۵				
۱۴	نمودارهای توابع $y = (\frac{1}{4})^x$ و $y = 2^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم و تفاوت‌ها و شباهت‌های آن‌ها را بررسی کنید.	۲/۲۵				
۱۵	قیمت کالایی امسال ۴۰۰۰ تومان و نرخ تورم سالانه ۲۰ درصد است. سه سال دیگر قیمت این کالا چقدر خواهد شد؟	۱				
	پرویز و سربلند باشید	جمع نمره	۲۰			

دنباله‌های حسابی

فصل دوم
درس دوم

• **دنباله حسابی:** دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از اضافه شدن یک مقدار ثابت به جمله قبلی از خودش به دست می‌آید، دنباله حسابی هست. به آن مقدار ثابت **اختلاف مشترک** دنباله گفته می‌شود و آن را با d نشون می‌دیم. پس فرم کلی یک دنباله حسابی به صورت زیره:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \Rightarrow a_1 \xrightarrow{+d} a_1 + d \xrightarrow{+d} a_1 + 2d \xrightarrow{+d} a_1 + 3d, \dots$$

جمله عمومی این دنباله برابر با $a_n = a_1 + (n-1)d$.

پیدا کردن اختلاف مشترک دنباله

۱ اگر دو جمله متوالی از دنباله رو داشته باشیم $(\dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$:

$$d = a_{n+1} - a_n \Rightarrow \text{جمله قبلی} - \text{جمله بعدی} = \text{اختلاف مشترک}$$

۲ اگر دو جمله غیرمتوالی از دنباله رو داشته باشیم $(\dots, a_n, \dots, a_m, \dots)$:

$$\text{اختلاف مشترک} = \frac{\text{جمله قبلی} - \text{جمله بعدی}}{\text{شماره جمله قبلی} - \text{شماره جمله بعدی}} \Rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

مثال

به دنباله‌های حسابی زیر و اختلاف مشترک آن‌ها دقت کن:

الف) $-4, -1, 2, 5, \dots \Rightarrow d = -1 - (-4) = 3$ یا $d = 2 - (-1) = 3$ یا $d = 5 - 2 = 3$

ب) $14, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 2, \dots \Rightarrow d = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{2 - 14}{4} = \frac{-12}{4} = -3$

توجه در دنباله حسابی با اختلاف مشترک d :

الف) اگر $d > 0$ ، دنباله افزایشی هست، یعنی با زیاد شدن شماره جملات، مقدار جملات افزایش می‌یابد.

ب) اگر $d < 0$ ، دنباله کاهشی هست، یعنی با زیاد شدن شماره جملات، مقدار جملات کاهش می‌یابد.

پ) اگر $d = 0$ ، دنباله ثابت، یعنی همه جملات دنباله با هم برابرند.

مثال

الف) دنباله $5, 9, 13, 17, 21, \dots$ به دنباله حسابی افزایشی با اختلاف مشترک $d = 4$ هست.

ب) دنباله $3/1, 2/8, 2/5, 2/2, 1/9, \dots$ به دنباله حسابی کاهشی با اختلاف مشترک $d = -1/3$ هست.

پ) دنباله $-\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, \dots$ به دنباله حسابی ثابت با اختلاف مشترک $d = 0$ هست.

نکته

اگر a, b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، عدد b میانگین دو عدد a و c هست و داریم

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{یا} \quad 2b = a+c \quad \text{مجموع دو جمله کناری} = \text{جمله وسط}$$

مثال

اگر $3x, x-1$ و $2x+7$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آن وقت

$$x-1 = \frac{3x+2x+7}{2} \Rightarrow 2(x-1) = 3x+2x+7 \Rightarrow 2x-2 = 5x+7 \Rightarrow -3x = 9 \Rightarrow x = -3$$

درج k واسطه حسابی بین دو عدد

به دو روش می‌تونیم بین دو عدد a و b تعداد k جمله $(k$ واسطه) طوری قرار بدیم که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدن.

۱ با پیدا کردن اختلاف مشترک به روشی که در بالا گفته شد (قسمت ب) مثال قبل) می‌تونیم هر تعداد واسطه حسابی بین $a_1 = a$ و $a_n = b$ درج کنیم.

$$d = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{تعداد واسطه ها} + 1} = \frac{b - a}{k + 1}$$

۲ می‌تونیم اختلاف مشترک رو از فرمول مقابل به دست بیاریم:

مثال

می‌خواهیم بین دو عدد ۳ و $\frac{9}{2}$ دو عدد درج کنیم (قرار بدیم) تا با هم دنباله حسابی بسازن:

$$\text{روش اول: } 3, \bigcirc, \bigcirc, \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 = 3, a_4 = \frac{9}{2} \Rightarrow d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{\frac{9}{2} - 3}{3} = \frac{\frac{9-6}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}$$

$$\text{روش دوم: } a = 3, b = \frac{9}{2}, k = 2 \Rightarrow d = \frac{b - a}{k + 1} = \frac{\frac{9}{2} - 3}{2 + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

• رابطه بازگشتی دنباله حسابی: در دنباله حسابی، چون در دنباله حسابی هر جمله (a_{n+1}) با اضافه شدن به مقدار ثابت (d) به جمله قبل از خودش (a_n) به دست میاد، پس رابطه بازگشتی اون همواره به صورت مقابله:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad a_1 = \dots$$

مثال

رابطه بازگشتی دنباله حسابی $15, 20, 25, 30, \dots$ به صورت مقابله: $a_1 = 15, a_{n+1} = a_n + 5 \Rightarrow$ جمله فعلی = جمله بعدی + ۵

نکته

اگر به جمله عمومی دنباله حسابی دقت کنی، می‌بینی که به صورت معادله $y = mx + h$ خط هست. پس هر دنباله حسابی به تابع خطیه که شیب خط همون اختلاف مشترک دنباله (d) هست.

مجموع n جمله اول به دنباله حسابی

مجموع n جمله اول به دنباله حسابی رو به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$a_1, a_2, \dots, a_n \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

۱ اگر جمله اول و جمله آخر دنباله مشخص باشه:

$$a_1, a_2, a_3, \dots \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

۲ اگر جمله آخر دنباله مشخص نباشه و اختلاف مشترک برابر d باشه:

در هر فرمول، منظور از n تعداد جملاته!

مثال

الف) مجموع جملات دنباله حسابی مقابل رو حساب می‌کنیم:

$$-1, 4, 9, \dots, 199 \Rightarrow a_1 = -1, a_n = 199, d = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 199 = -1 + (n-1) \times 5 \Rightarrow 200 = (n-1) \times 5 \Rightarrow n-1 = 40 \Rightarrow n = 41$$

$$S_{41} = \frac{41}{2} (a_1 + a_{41}) = \frac{41}{2} (-1 + 199) = \frac{41}{2} \times 198 = 4059$$

$$a_{n+1} = 5 + a_n, \quad a_1 = -2$$

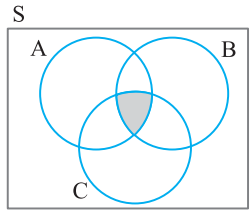
ب) مجموع ۱۰ جمله اول دنباله حسابی مقابل رو حساب می‌کنیم:

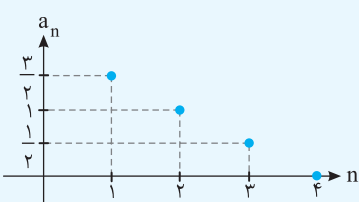
رابطه داده شده رابطه بازگشتی به دنباله حسابیه. پس اول به تعداد از جملات دنباله رو پیدا می‌کنیم:

$$\text{جمله دوم} \xrightarrow{n=1} a_{1+1} = 5 + a_1 \Rightarrow a_2 = 5 + (-2) = 3 \xrightarrow{\text{دنباله}} -2, 3, 8, \dots$$

$$\text{جمله سوم} \xrightarrow{n=2} a_{2+1} = 5 + a_2 \Rightarrow a_3 = 5 + 3 = 8$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} [2 \times (-2) + (10-1) \times 5] = 5(-4 + 45) = 5 \times 41 = 205$$

ردیف	سؤالات	نمره
امتحان نهایی: ریاضی و آمار ۳ رشته: ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی تألیفی مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) از بین ۵ کتاب به $P(۵, ۳)$ طریق می‌توان سه کتاب برای هدیه دادن و به C_3^5 طریق می‌توان سه کتاب برای چیدن در کتابخانه انتخاب کرد. ب) تابع $y = (\frac{1}{p})^{-x}$ افزایشی است.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید. الف) جملات ۷۷،، ۱۱۳ یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. ب) اگر احتمال قبولی در امتحان ریاضی $\frac{2}{5}$ باشد، آنگاه احتمال قبول نشدن در این امتحان است.	۰/۵
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) با ارقام ۸، ۲، ۵ و ۰ چند رمز چهاررقمی با رقم‌های متمایز می‌توان ساخت؟ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶ ب) با مصرف یک قرص، ۲۵۰ میلی گرم دارو به بدن شخصی وارد می‌شود و پس از هر ساعت، ۱۵ میلی گرم از سطح دارو در خونسر کاهش می‌یابد. چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش به ۱۳۰ میلی گرم می‌رسد؟ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰ پ) اگر جمعیت شهری با نرخ ۴ درصد در سال در حال افزایش باشد، جمعیت این شهر پس از ۲ سال چند برابر می‌شود؟ (۱) $1/0.816$ (۲) $1/0.82$ (۳) $1/0.821$ (۴) $1/0.824$	۰/۷۵
۴	الف) برای نمودار ون داده شده یک عبارت مناسب بنویسید و برای عبارت داده شده یک نمودار ون مناسب رسم کنید. (۱)  (۲) $(A \cap B)'$ ب) یک آزمایش قطعی و یک آزمایش تصادفی نام ببرید. پ) اگر $P(A) = \frac{1}{4}$، $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(B')$ را محاسبه کنید.	۱/۷۵
۵	با حروف کلمه «مهرسان» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمه شش حرفی می‌توان ساخت که حروف کلمه «ماه» همواره کنار هم باشند؟ ب) چند کلمه چهارحرفی می‌توان ساخت که با کلمه «سر» شروع شوند؟	۱
۶	دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال آنکه: الف) هر دو عدد روبرو شده زوج نباشند. ب) مجموع عددهای روبرو شده ۸ و یکی از این دو عدد مضرب ۲ باشد.	۱/۵

ردیف	سؤالات	نمره
۷	به پرسش‌های زیر پاسخ کوتاه دهید. الف) درصد قبولی دانش‌آموزان دو مدرسه A و B در کنکور به ترتیب ۴۵ درصد و ۶۰ درصد بوده است. تعداد قبولی دانش‌آموزان کدام مدرسه بیشتر است؟ چرا؟ ب) در یک مطالعه آماری برای اندازه‌گیری قد افراد از دو واحد متفاوت استفاده شده است. این مورد مربوط به اجرای نادرست کدام یک از گام‌های چرخه آمار در حل مسائل است؟ این اجرای نادرست بر کدام گام‌های این چرخه اثر می‌گذارد؟ پ) داده‌های زیر، متوسط ساعت‌های مطالعه تعدادی از کارکنان یک اداره در هفته است. کدام معیار پراکندگی و کدام معیار گرایش به مرکز برای توصیف این داده‌ها مناسب است؟ چرا؟ ۸, ۲, ۶, ۵, ۱, ۳, ۱۸, ۴, ۳, ۵, ۶, ۹	۱/۷۵
۸	الف) ضابطه تابعی دنباله $\frac{1}{4}, -1, 1, -1, \frac{3}{4}, -1, 2, -1, \frac{5}{4}, \dots$ را بنویسید. ب) جمله هفتم دنباله بازگشتی زیر را مشخص کنید. $a_{n+4} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = -2$	۱/۵
۹	نمودار یک دنباله خطی به صورت مقابل است. الف) مجموع ۱۰۰ جمله اول این دنباله را به دست آورید. ب) یک رابطه بازگشتی برای جملات این دنباله بنویسید. 	۱/۵
۱۰	در سالن اجتماعات یک مدرسه، ردیف اول ۱۲ صندلی، ردیف دوم ۱۸ صندلی و ردیف سوم ۲۴ صندلی دارد. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند: الف) این سالن با ۳۲۴ صندلی چند ردیف دارد؟ ب) در ردیف هفتم چند صندلی وجود دارد؟	۱/۲۵
۱۱	جمله سوم یک دنباله حسابی از جمله هفتم آن ۶ واحد بیشتر است. اگر جمله اول دنباله برابر ۷ باشد، جمله پانزدهم دنباله را به دست آورید.	۱
۱۲	الف) اگر $x-1$, $x+1$ و $x+4$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، نسبت مشترک دنباله را بیابید. ب) بین دو عدد $\frac{1}{8}$ و ۱ دو واسطه چنان قرار دهید که این چهار عدد یک دنباله هندسی افزایشی تشکیل دهند.	۱/۵
۱۳	ضابطه بازگشتی یک دنباله به صورت $a_{n+1} = -\frac{1}{3} a_n$ با جمله اول -6 است. نوع دنباله و جمله چهارم دنباله را مشخص کنید.	۱
۱۴	الف) در یک دنباله هندسی جمله دوم برابر ۱ و جمله پنجم برابر $\frac{1}{64}$ است. جمله اول دنباله را بیابید. ب) مجموع چند جمله اول دنباله $10, 30, 90, \dots$ برابر 3640 است؟	۱/۷۵
۱۵	الف) حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. ب) حاصل عبارت رادیکالی را به صورت یک عبارت توان‌دار و حاصل عبارت توان‌دار را به صورت یک عبارت رادیکالی نشان دهید. $\sqrt[4]{2m} \times \sqrt[4]{3m^2} \times \sqrt[4]{m^5} \quad (2)$ $(a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}})^3 (a^2 b^6)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$	۲
۱۶	الف) نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ را به طور تقریبی رسم کنید. ب) مقدار $f(-2)$ را به دست آورید.	۰/۷۵
	پیروز و سربلند باشید	جمع نمره ۲۰

(ب) توجه کنید که

$$\begin{cases} 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 2! = 2 \times 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4! + 3!}{2!} = \frac{24 + 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

۶ الف) یا باید از میان ۵ توپ قرمز ۳ توپ انتخاب کنیم یا باید از میان ۴ توپ آبی ۳ توپ انتخاب کنیم. بنابراین اصل جمع، تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} + \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} + \frac{4 \times 3!}{3! \times 1!} = \frac{5 \times 4}{2} + \frac{4 \times 3}{1} = 10 + 4 = 14$$

ب) باید از میان ۵ توپ قرمز ۳ توپ و از میان ۴ توپ آبی ۲ توپ انتخاب کنیم. بنابراین اصل ضرب، تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{2} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 10 \times 6 = 60$$

۷ الف) یا باید از میان ۶ لامپ سالم ۳ لامپ انتخاب کنیم یا باید از میان ۵ لامپ معیوب ۳ لامپ انتخاب کنیم. بنابراین اصل جمع، تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با

$$\binom{6}{3} + \binom{5}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} + \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{6!}{3! \times 3!} + \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} + \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 3} + \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 40 + 10 = 50$$

ب) یا باید هیچ لامپ معیوبی انتخاب نکنیم و ۳ لامپ سالم انتخاب کنیم یا باید یک لامپ معیوب و ۲ لامپ سالم انتخاب کنیم. تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با

$$\binom{5}{0} \times \binom{6}{3} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{2} = \frac{5!}{0!(5-0)!} \times \frac{6!}{3!(6-3)!} + \frac{5!}{1!(5-1)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{5!}{5!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} + \frac{5!}{4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{5!}{5!} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} + \frac{5!}{4!} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2! \times 4!} = 1 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 3} + \frac{5!}{4!} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{2 \times 4} = 1 \times 20 + 5 \times 15 = 20 + 75 = 95$$

۸ الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضو یک مجموعه n عضو برابر

$$\text{است با } \binom{n}{2} \text{ بنابراین}$$

تعداد زیرمجموعه سه عضو مجموعه شش عضو A

$$= \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 3} = 20$$

ب) برای ساختن یک زیرمجموعه چهارعضوی از A که شامل دو عضو b و c است، از میان سایر اعضای A، یعنی چهار عضو a، d، e و f دو عضو انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به همراه b و c در یک مجموعه قرار می‌دهیم (چون b و c باید داخل زیرمجموعه باشند، اجازه انتخاب فقط دو عضو دیگر را داریم). بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر است با

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2!} = 6$$

پاسخ تشریحی آزمون (۱)

۱ الف) نادرست. توجه کنید که

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3 \times 3}{5 \times 2 \times 5} = \frac{18}{25} \neq \frac{3}{5}$$

ب) درست.

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

۲ الف) ۶. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر n! است.

بنابراین باید معادله $n! = 720$ را حل کنیم. با محاسبه فاکتوریل اعداد حسابی از ابتدا می‌بینیم که $720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$. پس $n = 6$.

ب) $1 - n$.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \times 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

۱۰ ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضو یک مجموعه n عضو برابر است با

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 10$$

۳ الف) دو جعبه در نظر می‌گیریم. حروف کلمه «خور» را درون یک جعبه و حروف کلمه «شید» را درون جعبه دیگر قرار می‌دهیم. دقت کنید که حروف داخل هر جعبه و همچنین دو جعبه با هم می‌توانند جابه‌جا شوند.

$$\underbrace{\text{جایه جایی}}_{\text{جعبه ۲}} \underbrace{\text{ش ی د}}_{3!} \times \underbrace{\text{خ و ر}}_{3!} = 6 \times 6 \times 2 = 72$$

ب) دقت کنید که در این کلمات شش حرفی، سه جایگاه اول تنها یک انتخاب دارند.

$$\frac{1}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 1$$

اصل ضرب

۴ الف) روش اول: این کتاب، کتاب ریاضی یا کتاب فیزیک یا کتاب

ادبیات است. بنابراین طبق اصل جمع

$$\text{ادبیات فیزیک ریاضی} \\ 3 + 2 + 4 = 9$$

روش دوم: انتخاب یک کتاب از بین ۹ کتاب موجود برابر است با (ترتیب

$$\text{انتخاب مهم نیست}) = \binom{9}{1} = 9$$

ب) باید از بین کتاب‌های ریاضی، یک کتاب انتخاب کرد، یعنی انتخاب ۱ شیء

$$\text{از ۳ شیء (بدون ترتیب) که برابر است با ۳} = \binom{3}{1} = 3$$

۵ الف) می‌توان نوشت

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow n(n-1) = 30$$

$$n^2 - n = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+5) = 0$$

$$n = 6, \quad n = -5 \text{ (غ.ق.ق.)}$$

۲ الف) ۲۴. (۵/۵) بنابر اصل ضرب داریم $n(S) = 6 \times 2 \times 2 = 24$

ب) صفر. (۵/۵) چون $A = \emptyset$ ، پس $P(A) = 0$.

پ) میانه (۵/۵)

ت) ۱۴۴. (۵/۵) اگر a_n نشان دهنده تعداد گوی‌ها در شکل n ام الگو باشد،

آن‌گاه $a_n = n^2$. بنابراین تعداد گوی‌ها در شکل دوازدهم برابر است با

$$a_{12} = 12^2 = 144$$

۳ الف) گزینه (۱). (۵/۵) لزومی ندارد رقم اول از سمت چپ صفر نباشد. بنابراین

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 4 \times 4 \times 4 = 64$$

ب) گزینه (۲). (۵/۵) قسمت رنگی پیشامدی را نشان می‌دهد که در آن A رخ می‌دهد، ولی هیچ‌یک از B و C رخ نمی‌دهند، یعنی $A - (B \cup C)$.

پ) گزینه (۲). (۵/۵)

ت) گزینه (۱). (۵/۵)

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \xrightarrow{n=1} a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a_1 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$b_n = n^2 + 1 \xrightarrow{n=3} b_3 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow \frac{b_3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$4a_1 + \frac{b_3}{2} = 2 + 5 = 7 \text{ بنابراین}$$

۴ توجه کنید که

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) \quad (۵/۵)$$

$$C_4^5 = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5 \quad (۵/۵)$$

$$n(n-1) - 1 = 5 \Rightarrow n^2 - n - 1 - 5 = 0 \Rightarrow n^2 - n - 6 = 0 \quad (۵/۵)$$

$$(n-3)(n+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=3 \in \mathbb{N} \quad (\text{ق.ق.}) \\ n=-2 \notin \mathbb{N} \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases} \quad (۵/۵)$$

۵ اگر دو نفر مشخص را A و B بنامیم، این ۹ نفر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\frac{1}{A} \quad \frac{1}{B} \quad \frac{1}{C} \quad \frac{1}{D} \quad \frac{1}{E} \quad \frac{1}{F} \quad \frac{1}{G} \quad \frac{1}{H} \quad \frac{1}{I}$$

ابتدا از ۷ نفر دیگر ۴ نفر انتخاب می‌کنیم که بین دو نفر A و B قرار بگیرند:

$$\binom{7}{4} \quad (۵/۵) \quad \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = 35 \quad (۵/۵)$$

اکنون توجه کنید که دو نفر مشخص A و B به ۲! حالت، چهار نفر بین A و B به ۴! حالت و جعبه و افراد بیرون جعبه به ۴! حالت با هم جابه‌جا می‌شوند (جعبه را یک شخص در نظر می‌گیریم). بنابراین طبق اصل ضرب

$$35 \times 2! \times 4! \times 4! = 40320 \quad (۵/۵)$$

۶ چون A و B ناسازگار هستند، پس $A \cap B = \emptyset$ و در نتیجه

$$P(A \cap B) = 0. \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (۵/۵) \quad \text{همچنین چون } P(A') = \frac{1}{6} \text{ پس}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad (۵/۵)$$

احتمال رخ دادن A یا B ، یعنی $P(A \cup B)$ برابر است با

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (۵/۵)$$

$$\frac{9}{10} = \frac{5}{6} + P(B) + 0 \quad (۵/۵) \Rightarrow P(B) = \frac{9}{10} - \frac{5}{6} = \frac{27}{30} - \frac{25}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \quad (۵/۵)$$

۱۱ چون دور دایره 360° است، پس مجموع زاویه‌ها در نمودار دایره‌ای برابر

360° است. اگر α زاویه مربوط به گروه سنی بالای ۳۵ سال باشد، آن‌گاه

$$52^\circ + 80^\circ + \alpha = 360^\circ \quad (۵/۵) \Rightarrow 132^\circ + \alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 228^\circ \quad (۵/۵)$$

اکنون اگر تعداد تماشاچیان گروه سنی بالای ۳۵ سال برابر x باشد، آن‌گاه

$$\frac{x}{90} \times 360^\circ = 228^\circ \quad (۵/۵) \Rightarrow 4x = 228 \Rightarrow x = 57 \quad (۵/۵)$$

۱۲ الف) کافی است در جمله عمومی دنباله به جای a_n قرار دهیم $\frac{5}{7}$:

$$a_n = \frac{3n}{4n+1} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{3n}{4n+1} \quad (۵/۵) \Rightarrow 5(4n+1) = 7(3n) \Rightarrow 20n+5 = 21n \Rightarrow n=5$$

$$20n+5 = 21n \quad (۵/۵) \Rightarrow n=5 \Rightarrow a_5 = \frac{5}{7} \quad (۵/۵)$$

ب) برای پیدا کردن جمله مشترک دو دنباله، کافی است جمله عمومی آن‌ها را با هم برابر قرار دهیم.

$$a_n = b_n \Rightarrow 3n^2 - 2 = 2n - 1 \quad (۵/۵) \Rightarrow 3n^2 - 2 - 2n + 1 = 0$$

$$3n^2 - 2n - 1 = 0 \quad (۵/۵) \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(3)(-1) = 4 + 12 = 16 \quad (۵/۵)$$

$$n = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \quad (\text{غ.ق.ق.}) \end{cases} \Rightarrow a_1 = b_1 \quad (۵/۵)$$

۱۳ جمله دوم $\xrightarrow{n=1} a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (۵/۵) \Rightarrow a_{1+1} = 2a_1 + 1$

$$\xrightarrow{a_1=5} a_2 = 2(5) + 1 = 10 + 1 = 11 \quad (۵/۵)$$

جمله سوم $\xrightarrow{n=2} a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 1 \quad (۵/۵) \Rightarrow a_{2+1} = \frac{a_2}{2} - 1$

$$\xrightarrow{a_2=11} a_3 = \frac{11}{2} - 1 = \frac{11-2}{2} = \frac{9}{2} \quad (۵/۵)$$

۱۴ الف) در این دنباله هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب عدد ثابت $\frac{1}{3}$ در جمله قبلی به دست می‌آید. بنابراین

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\text{جمله بعدی}} = \frac{1}{3} \times \underbrace{a_n}_{\text{جمله فعلی}} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, \quad a_1 = 9 \quad (۵/۵)$$

ب) توجه کنید که دنباله داده شده به صورت زیر است:

$$3^2, 3^1, 3^0, 3^{-1}, 3^{-2}, \dots \quad (۱) \quad (۲) \quad (۳) \quad (۴) \quad (۵)$$

عدد ۳ ثابت است. پس رابطه شماره هر جمله را با توان آن جمله می‌توان

به دست آورد که به صورت 3^{3-n} است. بنابراین

$$a_n = 3^{3-n} \quad \text{یا} \quad a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \quad (۵/۵)$$

پ) جمله دهم دنباله را حساب می‌کنیم:

$$a_n = 3^{3-n}, \quad n=10 \Rightarrow a_{10} = 3^{3-10} = 3^{-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^7 \quad (۵/۵)$$

پاسخ تشریحی آزمون (۱۱)

۱ الف) درست. (۵/۵) ب) نادرست. (۵/۵) تهی یک پیشامد غیرممکن

(نشدنی) است. پ) نادرست. (۵/۵) اگر داده دورافتاده نداشته باشیم، میانگین

معیار مناسبی برای گرایش به مرکز است. ت) نادرست. (۵/۵) اگر

$a_1 = -1$ ، آن‌گاه $a_n = n - 3$ ، اما در دنباله مورد نظر $a_1 = -1$.

توجه کنید که جمله عمومی دنباله مورد نظر به صورت $a_n = -n^2$ است.

۱۱ تعداد اعضای فضای نمونه این آزمایش تصادفی برابر است با تعداد کل زیرمجموعه‌های سه‌عضوی از مجموعه پنج‌عضوی داده شده، یعنی

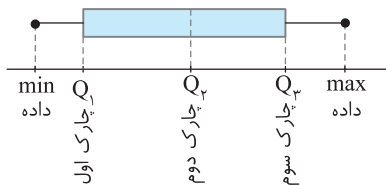
$$n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10 \quad (0/25)$$

برای ساختن یک زیرمجموعه سه‌عضوی از A که شامل عضو d است، از میان سایر اعضای A، یعنی چهار عضو a، b، c و e دو عضو انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به همراه d در یک مجموعه قرار می‌دهیم (چون d باید داخل زیرمجموعه باشد، پس اجازه انتخاب فقط دو عضو دیگر را داریم). بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6 \quad (0/25)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad (0/25) \quad \text{بنابراین}$$

۱۲ نموداری که پراکندگی کمتری داشته باشد، نشان‌دهنده عملکرد بهتر است. برای این منظور از شاخص‌های پراکندگی (دامنه تغییرات، دامنه میان‌چارکی و ...) استفاده می‌کنیم. هرچه میزان این شاخص‌ها کمتر باشد، پراکندگی نیز کمتر است. توجه کنید که در حالت کلی نمایش یک نمودار جعبه‌ای به صورت زیر است:



بنابراین

$$\begin{aligned} \text{دانش آموز A} \quad \left\{ \begin{aligned} \text{دامنه تغییرات} &= R = 14 - 6 = 8 \quad (0/25) \\ \text{دامنه میان‌چارکی} &= IQR = Q_3 - Q_1 = 12 - 7 = 5 \quad (0/25) \end{aligned} \right. \\ \text{دانش آموز B} \quad \left\{ \begin{aligned} \text{دامنه تغییرات} &= R = 14 - 2 = 12 \quad (0/25) \\ \text{دامنه میان‌چارکی} &= IQR = 10 - 4 = 6 \quad (0/25) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

در نتیجه دانش‌آموز A عملکرد بهتری داشته است. (0/25)

۱۳ در تمامی گام‌های حل مسئله مرتبط با آمار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آن‌ها را خوب بشناسیم. (0/25) این امر بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی ممکن نیست. (0/25) مثلاً اگر آمارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده‌ها را تحلیل می‌کند، ویژگی‌های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی نشناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. (0/25)

۱۴ الف) دقت کنید که

$$n=1 \xrightarrow{1 \leq n < \infty} a_n = n^2 - 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0 \quad (0/25)$$

$$n=36 \xrightarrow{n > 0} a_n = \sqrt{n} \Rightarrow a_{36} = \sqrt{36} = 6 \quad (0/25)$$

$$a_1 - a_{36} = 0 - 6 = -6 \quad (0/25) \quad \text{بنابراین}$$

ب) توجه کنید که

$$n=1 \Rightarrow a_{1+1} = \frac{1}{a_1} + 1 \xrightarrow{a_1=2} a_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \quad (0/25)$$

$$n=2 \Rightarrow a_{2+1} = \frac{1}{a_2} + 2 \xrightarrow{a_2=\frac{3}{2}} a_3 = \frac{1}{\frac{3}{2}} + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3} \quad (0/25)$$

$$\begin{aligned} n=3 \Rightarrow a_{3+1} = \frac{1}{a_3} + 3 \xrightarrow{a_3=\frac{8}{3}} a_4 &= \frac{1}{\frac{8}{3}} + 3 = \frac{3}{8} + 3 = \frac{3+24}{8} = \frac{27}{8} \quad (0/25) \\ &= \frac{3+24}{8} = \frac{27}{8} \end{aligned}$$

۷ تمام مسیرهای ممکن برای رفتن از A به D را مشخص می‌کنیم.

$$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{x} C \xrightarrow{3} D$$

$$\xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 2 \times x \times 3 = 6x \quad (0/25)$$

$$A \xrightarrow{3} E \xrightarrow{4} D \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 3 \times 4 = 12 \quad (0/25)$$

$$\text{تعداد کل مسیرها} = 6x + 12 = 36 \quad (0/25) \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4 \quad (0/25)$$

۸ توجه کنید که $n(S) = 8$ (چون دستگاه به 8 قسمت مساوی تقسیم شده است). (0/25) اگر پیشامد روی عددی اول یا روی عددی کمتر از 6

ایستادن عقربه را A بنامیم، آن‌گاه

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \quad (0/25) \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad (0/25)$$

۹ توجه کنید که تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = 7! = 5040 \quad (0/25)$$

می‌دانیم در میان اعداد طبیعی تا 7، عددهای 2، 3، 5 و 7 اول و عددهای 4، 6 و 8 غیراول هستند. اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه می‌توان نوشت

$$A = \left\{ \frac{4}{\text{اول}}, \frac{3}{\text{غیراول}}, \frac{3}{\text{اول}}, \frac{2}{\text{غیراول}}, \frac{2}{\text{غیراول}}, \frac{1}{\text{اول}}, \frac{1}{\text{غیراول}} \right\}$$

$$n(A) = 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144 \quad (0/25) \quad \text{بنابراین طبق اصل ضرب}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} = \frac{4! \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{35} \quad (0/25) \quad \text{در نتیجه}$$

۱۰ توجه کنید که تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با تعداد حالات

انتخاب 3 بز کوهی از بین 8 بز کوهی، یعنی

$$n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56 \quad (0/25)$$

روش اول: اگر بخواهیم حداکثر 2 بز کوهی نشان‌دار باشد، آن‌گاه یا باید 2 بز

کوهی نشان‌دار و 1 بز کوهی بی‌نشان باشد، یا 1 بز کوهی نشان‌دار و 2 بز کوهی

بی‌نشان باشد، یا صفر بز کوهی نشان‌دار و 3 بز کوهی بی‌نشان باشد. بنابراین

اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$n(A) = \binom{3}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{3}{1} \times \binom{5}{2} \quad (0/25)$$

$$\begin{aligned} &+ \binom{3}{0} \times \binom{5}{3} \quad (0/25) = 3 \times 5 + 3 \times \frac{5!}{2! \times 3!} + 1 \times \frac{5!}{3! \times 2!} \\ &= 15 + \frac{3 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} + \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 15 + 30 + 10 = 55 \quad (0/25) \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{55}{56} \quad (0/25) \quad \text{بنابراین}$$

روش دوم: اگر A پیشامد این باشد که حداکثر 2 بز کوهی نشان‌دار باشد،

آن‌گاه A' پیشامد این است که هر سه بز کوهی نشان‌دار باشد. (0/25) بنابراین

$$n(A') = \binom{3}{3} = 1 \quad (0/25)$$

در نتیجه

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{1}{56} \quad (0/25) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56} \quad (0/25)$$

(ب) توجه کنید که مجموع دو جمله کناری = دو برابر جمله وسط
 $2(2x) = 14 + 6 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$
 (پ) کاهشی.

(۳) جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است.
 بنابراین می توان نوشت

$$\begin{cases} a_{11} = 52 \Rightarrow a_1 + 10d = 52 \\ a_{19} = 92 \Rightarrow a_1 + 18d = 92 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} -a_1 - 10d = -52 \\ a_1 + 18d = 92 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 8d = 40 \Rightarrow d = 5$$

$a_1 + 10d = 52 \Rightarrow a_1 + 10(5) = 52 \Rightarrow a_1 + 50 = 52 \Rightarrow a_1 = 2$
 $a_7 = a_1 + 6d = 2 + 6 \times 5 = 32$
 (توجه کنید که مقدار اختلاف مشترک دنباله حسابی را به صورت
 $d = \frac{a_{19} - a_{11}}{19 - 11} = \frac{92 - 52}{8} = 5$ نیز می توان حساب کرد.)

(۴) دنباله ای که از قانون تابع خطی پیروی می کند، یک دنباله حسابی است که در آن اختلاف مشترک d با شیب خط برابر است. بنابراین ضابطه این دنباله را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$y = 3x - 1 \xrightarrow{\substack{y=a_n \\ x=n}} a_n = 3n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$
 (ب) با توجه ضابطه یا جمله عمومی دنباله، یعنی $a_n = 3n - 1$ می توان دنباله را مشخص کرد:

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow a_1 = 3(1) - 1 \Rightarrow a_1 = 2 \\ n=2 &\Rightarrow a_2 = 3(2) - 1 \Rightarrow a_2 = 5 \\ n=3 &\Rightarrow a_3 = 3(3) - 1 \Rightarrow a_3 = 8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{دنباله}} 2, 5, 8, \dots$ (با شیب $+3$)

دقت کنید در این دنباله حسابی، هر جمله (به جز جمله اول) از اضافه شدن مقدار ثابت ۳ به جمله قبلی به دست آمده است. پس

$$a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = 2$$

رابطه بازگشتی $\xrightarrow{+3}$ جمله فعلی $\xrightarrow{+3}$ جمله بعدی

(۵) چون جمله عمومی دنباله حسابی را می توان به صورت
 $a_n = a_1 + (n-1)d$ نوشت، بنابراین

$$a_6 + a_7 + a_8 = 90 \Rightarrow (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) = 90$$

$$3a_1 + 15d = 90 \xrightarrow{\div 3} a_1 + 5d = 30 \xrightarrow{a_1 + 5d = a_6} a_6 = 30$$

(۶) چون اختلاف مشترک مثبت است، پس جملات دنباله افزایش می یابند.
 $15, \dots, \dots, \dots, 23$
 کافی است اختلاف مشترک دنباله حسابی، یعنی d را به دست آوریم تا دنباله کامل شود. دقت کنید که

$$\text{جمله اول - جمله آخر} = \text{اختلاف مشترک} \times \text{تعداد واسطه ها} + 1$$

$$23 - 15 = 8 = d \times 4 \Rightarrow d = 2$$

بنابراین
 $15, 17, 19, 21, 23$

(۷) دنباله اعداد زوج به صورت $2, 4, 6, 8, \dots$ است. این دنباله یک دنباله حسابی است که در آن $a_1 = 2$ و $d = 2$. بنابراین خواسته سؤال مجموع ۱۶ جمله اول این دنباله حسابی است.

$$S_{16} = \frac{16}{2} [2 \times 2 + (16-1) \times 2] = 8(4 + 15 \times 2) = 8(4 + 30) = 8 \times 34 = 272$$

(۱۵) الف) دنباله اعداد طبیعی فرد متوالی به صورت $1, 3, 5, 7, \dots$ است. در این دنباله هر جمله (به جز جمله اول) از اضافه شدن مقدار ثابت ۲ به جمله قبلی به دست آمده است. بنابراین

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_1 = 1 \quad (0/5)$$

جمله بعدی $\xrightarrow{+2}$ جمله فعلی $\xrightarrow{+2}$ جمله بعدی

(ب) برای یافتن ضابطه تابعی یا همان جمله عمومی این دنباله، باید رابطه هر جمله با شماره آن جمله را بیابیم:

$$\begin{matrix} 1, 3, 5, 7, \dots \\ (1) (2) (3) (4) \end{matrix}$$

دو برابر منهای یک

هر شماره دو برابر و سپس یک واحد از آن کم شده است. پس $a_n = 2n - 1$.
 (پ) کافی است در جمله عمومی دنباله قرار دهیم $a_n = 99$.

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow 99 = 2n - 1 \quad (0/75) \Rightarrow 2n = 100 \quad (0/75) \Rightarrow n = 50$$

$$a_{50} = 99 \quad (0/75)$$

(۱۶) الف) ابتدا مجموع هر سطر را به دست می آوریم و به صورت یک دنباله می نویسیم.

$$1, 1+1, 1+2+1, 1+3+3+1, 1+4+6+4+1, \dots \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, \dots \quad (0/75)$$

بنابراین

$$a_1 = 1 = 2^0 = 2^{1-1}, \quad a_2 = 2 = 2^1 = 2^{2-1}, \quad a_3 = 4 = 2^2 = 2^{3-1}$$

$$a_4 = 8 = 2^3 = 2^{4-1}, \quad a_5 = 16 = 2^4 = 2^{5-1}$$

در نتیجه $a_n = 2^{n-1} \quad (0/5) \Rightarrow a_{10} = 2^{10-1} = 2^9$ (شماره سطر ۱۰ - جمله ۱۰ام)

$$a_{10} = 2^{10-1} = 2^9 \quad (0/75) \quad (ب)$$

پاسخ تشریحی آزمون (۱۲)

(۱) الف) نادرست. توجه کنید که رابطه داده شده خطی نیست. در واقع داریم

$$\text{جمله اول} \xrightarrow{n=1} a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{جمله دوم} \xrightarrow{n=2} a_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{جمله سوم} \xrightarrow{n=3} a_3 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

بنابراین

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2} \\ a_3 - a_2 = \frac{10}{3} - \frac{5}{2} = \frac{20-15}{6} = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$$

(ب) درست. توجه کنید که از جمله دوم به بعد، هر جمله از جمع عدد ثابت

$$-\frac{1}{p} \text{ با جمله قبلی اش به دست آمده است. بنابراین دنباله داده شده دنباله ای}$$

حسابی با جمله اول ۲ و اختلاف مشترک $-\frac{1}{p}$ است.

(پ) درست. اختلاف مشترک این دنباله برابر صفر است.

(۲) الف) شیب. توجه کنید که

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = a_1 + nd - n \Rightarrow a_n = nd + a_1 - n$$

$$\text{شیب} = d, \quad \text{عرض از مبدأ} = a_1 - n$$