



مقدمه^۳ ناشر

آمار و احتمال علم خیلی جالبیه و تقریباً همه جا کاربرد داره. شک ندارم که درس آمار و احتمال می‌تونه ماجراهای کار و زندگیتون رو هیجان‌انگیزتر بکنه. حتی برای ازدواج هم باید آمار طرف رو بگیرید ولی این‌که اونم موافق باشه یا نه خودش یه احتمالیه! خلاصه این‌که ما هرچی آمار و احتمالاتمون دقیق‌تر باشه موفق‌تریم. پس خوبه که این درس به دردبخور رو جدی بگیریم. یه سایت با حال هم بهتون معرفی می‌کنم که اگه قبلن ندیده باشین، حتمن براتون جذابه:

www.worldometers.info/fa

این سایت آمار لحظه به لحظه بعضی از شاخص‌های انسانی کل دنیا رو می‌ده. مثلاً همین الان که من این مقدمه رو می‌نویسم، جمعیت جهان ۸,۰۵۰,۴۱۳,۱۷۰ نفره که ۵,۸۰۶,۰۶۳,۳۵۰ نفرشون کاربر اینترنتی‌اند. در سال ۲۰۲۳ تا این لحظه (ساعت ۱۱:۲۳ روز ۴ مردادماه ۱۴۰۲)، ۳۸,۳۱۹,۳۱۵ تا خودرو تولید شده، در حالی‌که فقط ۱,۵۷۵,۵۴۸ تا کتاب جدید منتشر شده. تحلیل این داده‌ها با خودتون.

خدا کنه احتمال خوشحالیاتون صددرصد باشه.



این کتاب شامل محتوای تکمیلی است.

توی بعضی از صفحه‌های این کتاب آیکون  رو می‌بینی. هر کدوم از این آیکون‌های شماره‌دار ممکنه کلید یه گنج باشن، فقط کافیه دستورالعمل ساده زیر رو اجرا کنی تا به گنج برسی.

۱ QR CODE پشت جلد کتاب رو اسکن کن.

۲ شماره آیکون رو در باکس «جستجوی کُد» وارد کن و دکمه جستجو رو بزنی و محتوای تکمیلی رو ببین. محتوای تکمیلی این کتاب شامل آزمون‌های جمع‌بندی برای هر فصل کتاب است.

سلام بچه‌ها

اون قدیما که مدرسه می‌رفتیم، همیشه خوندن بعضی از درس‌ها برامون خیلی لذت داشت و آسون بود، اما از خوندن بعضی از درس‌ها فراری بودیم و فکر می‌کردیم اصلاً برای خوندن اون درس‌ها ساخته نشدیم و هر دقیقه از کلاس برامون به اندازه یک سال می‌گذشت. اما بعضی وقت‌ها هم بود که یک معلم دوست‌داشتنی و مهربون باعث می‌شد همه بچه‌ها عاشق همون درس بشن که از خوندنش فرار می‌کردن و همه بهترین نمره‌هاشون رو تو همون درس می‌گرفتن!!! ما هم سعی کردیم یک کتاب دوست‌داشتنی بنویسیم که مثل یه «معلم خوب» در کنارتون باشه و قدم‌به‌قدم شما را همراهی کنه تا بتونید از یاد گرفتن این درس لذت ببرید و بهترین نتیجه رو، انشاءالله در امتحان نهایی آمار و احتمال بگیرید. هر فصل کتاب رو به بخش‌های کوچکتر تقسیم کردیم تا طولانی‌بودن فصل‌ها خسته‌تون نکنه و بتونید هر بخش رو در یک یا دو جلسه بخونید و خودتون رو پله‌پله به قله موفقیت برسونید و به نمره بیست، نزدیک و نزدیک‌تر بشید.

کتاب ماجرای بیست چند قسمت مختلف داره که برای آشنایی شما به هر کدوم یه اشاره کوتاه می‌کنیم:

۱ درس‌نامه: هر بخش یک درس‌نامه روان، کامل و کاربردی داره که تمام مفاهیم، تعاریف و فرمول‌های کتاب درسی رو شامل می‌شه و مثال‌های خوب و متنوعی داره که همه نکات رو در بر می‌گیره و در یادگیری و فهم بهتر درس به شما کمک می‌کنه.

توجه کنید که حل مثال‌های درس‌نامه خیلی روی یادگیری مطالب اصلی درس تأثیر داره، پس اون‌ها را با دقت حل کنید و کادرهایی که تعریف‌ها، فرمول‌ها و نکات مهم در آن‌ها قرار دارند رو حتماً حفظ کنید.

۲ در امتحان چه خبر: در این بخش، سؤالات امتحانی پایان هر بخش رو براتون دسته‌بندی کردیم تا سؤالات مربوط به موضوعات اصلی فصل رو راحت‌تر پیدا کنید و حل کنید.

۳ سؤال‌های امتحانی: بعد از «درس‌نامه» و بخش «در امتحان چه خبر» سؤال‌های امتحانی درس قرار گرفته که شامل سؤالات کتاب درسی (مثل کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و تمرین‌های پایانی فصل)، امتحانات نهایی و تعدادی سؤال تألیفی خیلی خفن است. سؤالات در سطوح مختلف طراحی و دسته‌بندی شده تا بتونید با حل سؤالات آسان‌تر به فرمول‌ها و تعاریف و نکات درسی مسلط بشید و با حل سؤالات سخت‌تر، ورزیده‌تر بشید. سعی کنید اول سؤالات جای خالی و درست - نادرست، بعد سؤالاتی که بر چسب «کتاب درسی» دارند رو حل کنید و در آخر به حل بقیه سؤالات بپردازید. یک تعداد سوال با نماد  هم داریم که سؤالات سخت‌تر هستند و به تسلط بیشتر شما به مطالب کتاب درسی کمک می‌کنند. و مخصوص بچه‌هایی هستن که می‌خوان حتماً ۲۰ بگیرن.

۴ پاسخ تشریحی: تمام سؤالات کتاب پاسخ تشریحی دارند تا اگر در حل سؤال به مشکل برخوردید به اون‌ها مراجعه کنید و با خوندن جواب سؤالات یاد بگیرید که در امتحان نهایی چه‌طور باید پاسخ‌ها را کامل و دقیق بنویسید.

۵ امتحانات جمع‌بندی: در پایان هر فصل یک آزمون جمع‌بندی به صورت QRcode داریم که با داندلود کردن و پاسخ دادن به اون‌ها می‌تونید میزان تسلط خودتون رو در اون فصل بسنجید.

۶ امتحان‌های نوبت اول و دوم: در انتهای کتاب هم دو نمونه سؤال نوبت اول و سه نمونه سؤال جامع از نوبت دوم داریم که دو تا از آزمون‌های جامع تألیفی و سخت‌تر و یکی هم امتحان نهایی ۱۴۰۳ است که همه با پاسخ‌نامه تشریحی هستند. مطمئناً حل کردن این آزمون‌ها قبل از امتحان پایانی می‌تونه براتون خیلی مفید باشه و حسابی برای امتحان نهایی آماده‌تون کند.

امیدواریم این کتاب بتونه در کنار معلم‌های خوبتون، دوست خوبی براتون باشه و در یادگیری این درس کمکتون کنه. در آخر از همه دوستان خیلی سبزی به‌خصوص جناب آقای هاشمی، سرکار خانم جالینوس و ... که با صبر و محبت و تلاش وصف‌ناپذیر، ما را همراهی کردند و همچنین از ویراستان محترم آقایان مهران جعفری، فرامرز سلطان کریمی، علیرضا کاظمی بقا و منصور زرکش و خانم‌ها ملیحه حاجی‌بابا و لیلا سمیعی عارف کمال تشکر و قدردانی را داریم. برای همه شما دانش‌آموزان عزیز و دوست‌داشتنی که آینده‌سازان این مرز و بوم هستید، آرزوی موفقیت، سلامتی و شادابی داریم.

تیر ماه ۱۴۰۴

فهرست

فصل چهارم: آمار استنباطی

بخش ۱: گردآوری داده‌ها ۹۰

بخش ۲: برآورد ۱۰۰

پاسخ‌نامه تشریحی

پاسخ سؤال‌های امتحانی فصل اول ۱۱۱

پاسخ سؤال‌های امتحانی فصل دوم ۱۲۶

پاسخ سؤال‌های امتحانی فصل سوم ۱۴۱

پاسخ سؤال‌های امتحانی فصل چهارم ۱۵۳

امتحانات

امتحان‌های نوبت اول (امتحان شماره ۱) ۱۶۰

امتحان‌های نوبت اول (امتحان شماره ۲) ۱۶۱

امتحان‌های نوبت دوم (امتحان شماره ۳) ۱۶۲

امتحان‌های نوبت دوم (امتحان شماره ۴) ۱۶۴

امتحان‌های نوبت دوم (امتحان شماره ۵) (نهایی ۱۴۰۳) ۱۶۶

پاسخ‌نامه امتحان شماره ۱ ۱۶۸

پاسخ‌نامه امتحان شماره ۲ ۱۶۹

پاسخ‌نامه امتحان شماره ۳ ۱۷۱

پاسخ‌نامه امتحان شماره ۴ ۱۷۳

پاسخ‌نامه امتحان شماره ۵ ۱۷۵

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

بخش ۱: آشنایی با منطق ریاضی ۸

بخش ۲: ترکیب گزاره‌ها ۱۱

بخش ۳: سورها ۱۹

بخش ۴: مجموعه‌ها ۲۲

بخش ۵: جبر مجموعه‌ها ۲۶

بخش ۶: قوانین بین مجموعه‌ها ۳۰

بخش ۷: حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها ۳۴

فصل دوم: احتمال

بخش ۱: مبانی احتمال ۳۹

بخش ۲: اصول و قضایای احتمال ۴۲

بخش ۳: احتمال غیرهم‌شانس ۴۶

بخش ۴: احتمال شرطی ۴۹

بخش ۵: قانون کل احتمال ۵۳

بخش ۶: پیشامدهای مستقل و وابسته ۵۹

فصل سوم: آمار توصیفی

بخش ۱: توصیف و نمایش داده‌ها ۶۵

بخش ۲: معیارهای گرایش به مرکز ۷۳

بخش ۳: معیارهای پراکندگی ۷۹

فصل ۱: آشنایی با مبانی ریاضیات

بخش ۱: آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی یا منطق نمادین، دستور زبان ریاضی است که به مطالعه ساختار جمله‌هایی که در ریاضیات به کار برده می‌شوند، می‌پردازد. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها پرداخته و اعتبار یک استدلال، یعنی درست یا نادرست بودن آن را مشخص می‌کند.

گزاره

به هر جمله خبری یک گزاره می‌گوییم. هر گزاره فقط می‌تواند درست یا فقط نادرست باشد. به جملات زیر دقت کنید:

۱۵ بر ۳ بخش‌پذیر است. ۲ سعدی شاعر نیست. ۳ ریاضی درسی دوست‌داشتنی است.

جمله ۱ یک جمله خبری درست و جمله ۲ یک جمله خبری نادرست است پس جمله‌های ۱ و ۲ گزاره هستند اما جمله ۳ گزاره نیست، زیرا لزوماً درست یا لزوماً نادرست نمی‌باشد.

هر گزاره را معمولاً با حروف کوچک $p, q, r, s, \dots$ نمایش می‌دهیم.

تذکره: جملات استفهامی (پرسشی)، عاطفی (بیان‌کننده احساسات و آرزو)، امری، تعجبی و خواهشی چون خبری را بیان نمی‌کنند، گزاره نیستند. مثلاً هیچ‌کدام از جملات زیر گزاره نیستند:

۱ آیا عدد π عددی گنگ است؟ (پرسشی) ۲ چه صبح زیبایی! (عاطفی) ۳ «صد بار اگر توبه شکستی باز آ» (امری)

ارزش یک گزاره درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش آن گزاره می‌گوییم.

ارزش گزاره درست را با «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

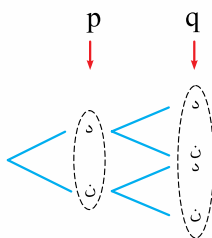
اگر دو گزاره p و q ارزش یکسان داشته باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌گوییم گزاره‌های p و q معادل یا هم‌ارز هستند.

جدول ارزش گزاره‌ها ارزش هر گزاره مانند p می‌تواند درست یا نادرست باشد.

این مطلب را در جدول ارزش گزاره‌ها به شکل روبه‌رو نشان می‌دهیم:

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن



اگر بخواهیم حالت‌های مختلف برای درست یا نادرست بودن دو گزاره p و q را بنویسیم، با توجه به این‌که برای هر کدام از این گزاره‌ها ۲ حالت «د» یا «ن» را داریم؛ پس طبق اصل ضرب برای ارزش ۲ گزاره p و q در کنار هم، $2 \times 2 = 4$ حالت مختلف وجود دارد. این ۴ حالت را در جدول ارزش گزاره‌ها به شکل روبه‌رو نمایش می‌دهیم:

هم‌چنین برای ارزش ۳ گزاره طبق اصل ضرب $2^3 = 8$ حالت مختلف وجود دارد.

$$\text{ارزش } p \times \text{ارزش } q \times \text{ارزش } r = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

جدول ارزش گزاره‌ها برای ۳ گزاره به شکل روبه‌رو است:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

نتیجه: جدول ارزش گزاره‌ها برای n گزاره طبق اصل ضرب 2^n سطر مختلف دارد.

$$2^n = 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$$

گزاره p_1 گزاره p_2 گزاره p_3 گزاره p_n

نقیض یک گزاره ($\sim P$) نقیض گزاره p را به صورت « $\sim p$ » نوشته و آن را به صورت «چنین نیست که p » می‌خوانیم. ارزش گزاره « $\sim p$ » مخالف

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

ارزش گزاره p است. به علامت « $\sim$ » ناقض گفته می‌شود.

جدول ارزش گزاره $\sim p$ به صورت مقابل است:

بنابراین اگر p درست باشد، $\sim p$ نادرست و اگر p نادرست باشد، $\sim p$ درست است.

مثال: نقیض گزاره « p : باران می بارد.» و « $q: x \geq 3$ » را بنویسید.

پاسخ: $\sim p$: چنین نیست که باران ببارد $\equiv$ باران نمی بارد.
 $\sim q$: چنین نیست که $x \geq 3$ باشد $\equiv x < 3$

تذکر: نقیض نقیض یک گزاره با خود گزاره هم ارز است. یعنی: $\sim(\sim p) \equiv p$

گزاره‌نما

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

۱ x عددی اول است. $2x^2 + 3x - 2 = 0$

۲ دو برابر یک عدد طبیعی به علاوه ۳ برابر عدد طبیعی دیگر از ۱۰ کم تر است. $(2x + 3y < 10)$.

همان‌طور که می‌بینید درستی یا نادرستی جملات بالا را نمی‌توانیم مشخص کنیم و درستی یا نادرستی آن‌ها بستگی به مقداری دارد که به جای متغیرهای آن‌ها یعنی x و y قرار داده می‌شود. مثلاً اگر در جمله اول به جای x عدد ۵ بگذاریم، یک گزاره درست به دست می‌آید؛ اما اگر به جای x عدد ۶ را قرار دهیم، یک گزاره نادرست خواهیم داشت.

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای‌گذاری مقادیر مختلف به جای متغیرهای آن به یک گزاره تبدیل شود را گزاره‌نما می‌گوییم.

دامنه متغیر گزاره‌نما

به مجموعه مقادیری که می‌توانیم به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار دهیم تا گزاره‌نما به یک گزاره درست یا غلط تبدیل شود، «دامنه متغیر گزاره‌نما» می‌گوییم و آن را با D نمایش می‌دهیم.

مجموعه جواب گزاره‌نما

به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها گزاره‌نما به یک گزاره درست تبدیل می‌شود، «مجموعه جواب گزاره‌نما» می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم $(S \subseteq D)$.

نمونه: گزاره‌نمای $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ با قراردادن هر عدد حقیقی به جای x به یک گزاره درست یا غلط تبدیل می‌شود، بنابراین دامنه متغیر این گزاره‌نما مجموعه اعداد حقیقی است. $(D = \mathbb{R})$ حالا برای این که مجموعه جواب این گزاره‌نما را به دست آوریم، باید معادله را حل کنیم:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow (x=1) \text{ یا } (x=2) \text{ یا } (x=-2)$$

بنابراین گزاره‌نما به ازای $x \in \{1, 2, -2\}$ به یک گزاره درست تبدیل می‌شود؛ پس مجموعه جواب گزاره‌نما $S = \{1, 2, -2\}$ است.

مثال: اگر دامنه متغیر گزاره‌نمای $1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq -1$ مجموعه اعداد صحیح باشد، مجموعه جواب آن را بیابید.

پاسخ: گزاره‌نمای $1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq -1$ را ساده می‌کنیم:

$$-1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 2x+1 \leq 3 \xrightarrow{-1} -4 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{\div 2} -2 \leq x \leq 1$$

$$S = \{-2, -1, 0, 1\}$$

دامنه متغیر مجموعه اعداد صحیح است، پس مجموعه جواب برابر است با:

در امتحان چه خبر؟

در اولین بخش از فصل اول کتاب آمار و احتمال معمولاً سؤالاتی با انواع زیر در آزمون‌ها مطرح می‌شوند:

تیپ ۱ سؤالات جای خالی، درست - نادرست و چندگزینه‌ای و ... که معمولاً از مفاهیم اولیه و نکات اصلی درس مطرح می‌شوند.

حالاتو حل کن: سؤالات ۱ تا ۷

تیپ ۲ سؤالات تعریفی که معمولاً در آن‌ها تعریف عبارت‌هایی مثل «منطق ریاضی»، «گزاره»، «گزاره‌نما»، «دامنه» یا مجموعه جواب گزاره‌نما و یا حتی نقیض یک گزاره از شما خواسته می‌شود. **حالاتو حل کن:** سؤال ۸

تیپ ۳ سؤالاتی که در آن‌ها باید گزاره بودن یا نبودن یک عبارت را مشخص کنید و یا ارزش گزاره داده شده را تعیین کنید. گاهی هم باید با قراردادن یک عبارت، عدد یا علامت مناسب در جاهای خالی گزاره‌های داده شده را به یک گزاره درست تبدیل کنیم. **حالاتو حل کن:** سؤالات ۹ تا ۲۴

تیپ ۴ سؤالاتی که در آن‌ها باید نقیض یک گزاره را به دست آورید. **حالاتو حل کن:** سؤالات ۲۵ و ۲۶

تیپ ۵ سؤالاتی که در آن‌ها باید مجموعه جواب یک گزاره‌نما را با توجه به دامنه متغیر آن به دست آورید. **حالاتو حل کن:** سؤالات ۲۷ تا ۳۹

؟ سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۱- دستور زبان ریاضی است.

۲- جمله‌ای خبری است که راست است یا دروغ.

۳- هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای گذاری‌ها مقادیر مختلف به جای متغیرهای آن به یک تبدیل شود را می‌گوییم.

۴- منطق ریاضی یا اعتبار یک را مشخص می‌کند.

از میان عبارت‌های داخل پرانتز گزینه مناسب را انتخاب کنید.

۵- به مجموعه مقادیری که می‌توانیم به جای متغیرهای گزاره‌ها قرار دهیم تا گزاره‌ها به یک گزاره تبدیل شود (دامنه متغیر گزاره‌ها) [] - مجموعه جواب گزاره‌ها [] می‌گویند.

۶- درستی یا نادرستی یک جمله خبری را نمی‌دانیم اما می‌دانیم این عبارت حتماً درست یا حتماً نادرست است این عبارت یک (گزاره [] - گزاره‌ها []) است. گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۷- 🔥 تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها برای ۵ گزاره چند برابر تعداد سطرهایی از آن است که دارای حداقل ۳ گزاره درست می‌باشند؟

$$\frac{16}{5} (1) \quad 2 (2) \quad \frac{32}{5} (3) \quad 4 (4)$$

۸- عبارت‌های زیر را تعریف کنید.

الف) گزاره: (ب) گزاره‌ها: (پ) مجموعه جواب گزاره‌ها:

۹- در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند. (مشابه کتاب درسی)

$$\text{الف) } 7(3 - \square) = 35 \quad \text{ب) } (0/2)^4 \square (0/2)^2 \quad \text{پ) اگر } 0^\circ < \alpha < 45^\circ, \sin \alpha \square \cos \alpha \quad \text{ت) } -x^2 + 4x - 4 \square 0$$

از میان جملات زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید.

۱۰- معادله $x^2 + 3x + 2 = 0$ دارای ۲ ریشه صحیح است.

۱۱- چه صبح زیبایی!

۱۲- آیا باقی‌مانده مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است؟

۱۳- چاه مکن بهر کسی.

۱۴- چه برف شدیدی می‌آید.

۱۵- او یک بازیکن فوتبال است.

۱۶- هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

۱۷- حاصل جمع ۳ برابر عددی با ۲ برابر عدد دیگر برابر ۸ است.

۱۸- عدد اول x می‌توان یافت که حاصل ضرب آن در هر عدد اول دیگر زوج و حاصل جمع آن با هر عدد اول دیگر فرد است.

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱۹- مجموع هر دو عدد اول، زوج است.

۲۰- حاصل ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است.

۲۱- 🔥 عدد $2^9 + 8$ عددی اول است.

۲۲- 🔥 عبارت $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ تابع است.

۲۳- برای هر عدد طبیعی n عدد $2^n + 1$ یک عدد اول است.

۲۴- 🔥 نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید، سپس ارزش هر یک از گزاره‌های جدید را مشخص کنید.

الف) $8 \leq 10$ (ب) عددی اول است.

۲۵- نشان دهید که نقیض نقیض هر گزاره با خود گزاره اولیه هم‌ارز است.

دامنه متغیر گزاره‌های زیر داده شده است. مجموعه جواب هر یک را مشخص کنید.

۲۶- x مضرب ۷ است. $(D = \mathbb{Z})$ ۲۷- x سه واحد از مضارب ۷ بیشتر است. $(D = \mathbb{Z})$

۲۸- 🔥 $\frac{6x+1}{2x-5} \in \mathbb{Z}$ ۲۹- $\frac{5}{2+x} \in \mathbb{N}$ $(D = \mathbb{Z})$

۳۰- $2x^2 + x - 1 = 0$ $(D = \mathbb{R})$ ۳۱- a مربع کامل است. $(D = \mathbb{Z})$

۳۲- $3^x = 0$ $(D = \mathbb{R})$ ۳۳- $2x^2 + x - 1 = 0$ $(D = \mathbb{Z})$

۳۴- 🔥 $\sqrt{x+2} = -x$ $(D = \mathbb{Z})$ ۳۵- 🔥 $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3}$ $(D = \mathbb{R})$

۳۶- مجموعه جواب گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس احتمال آن که پیشامد A رخ دهد، برابر با $\frac{1}{4}$ است.» چند عضو دارد؟

۳۷- 🔥 دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر a را عدد تاس اول و b را عدد تاس دوم در نظر بگیریم، دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره‌های زیر چند عضو دارد؟

الف) $a + b$ زوج است. (ب) $a < b$ است.

ت) معادله درجه دوم $x^2 - ax + b = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز است.

۳۸- 🔥 ابتدا مشخص کنید دامنه متغیر گزاره‌نمای $6 \leq \sqrt{60 - 3x^2}$ شامل چند عدد صحیح است؟ و سپس تعداد عضوهای طبیعی مجموعه جواب این گزاره‌ها را به دست آورید.

اگر دو یا چند گزاره را با استفاده از رابط‌های گزاره‌ای مثل «یا»، «و»، «اگر... آن‌گاه...»، «اگر و فقط اگر» و... به هم وصل کنیم، یک گزاره مرکب ساخته می‌شود. مثلاً گزاره‌های: ۱ «مجید درس نمی‌خواند» و «حسین شاگرد اول است» و ۲ «۵ عددی زوج است» یا «۵ عددی اول است»، با ترکیب دو گزاره به وسیله رابط‌های «و» و «یا» ساخته شده‌اند.

ترکیب عطفی دو گزاره ($p \wedge q$)

ترکیب « p و q » که به صورت « $p \wedge q$ » نمایش می‌دهیم را ترکیب عطفی دو گزاره p و q می‌گوییم. رابط منطقی «و» که به صورت « $\wedge$ » نوشته می‌شود را «عطف» می‌گوییم.

مثال: p : ایران به جام جهانی فوتبال صعود کرد.
 q : علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شد.

$p \wedge q$: ایران به جام جهانی فوتبال صعود کرد و علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شد.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

تنها زمانی که ایران به جام جهانی صعود کند و علی از دانشگاه فارغ‌التحصیل شود، عبارت $p \wedge q$ درست است و اگر یکی از این گزاره‌ها یا هر دوی آن‌ها نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

نتیجه: ارزش گزاره مرکب « $p \wedge q$ » تنها زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند. جدول ارزش گزاره‌ها برای $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

تذکر: ترکیب عطفی n گزاره یعنی $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n$ تنها زمانی درست است که همه گزاره‌ها درست باشند و اگر تنها یکی از آن‌ها نادرست باشد این گزاره مرکب نادرست خواهد بود.

ترکیب فصلی دو گزاره ($p \vee q$)

ترکیب « p یا q » که به صورت « $p \vee q$ » نمایش داده می‌شود را ترکیب فصلی دو گزاره p و q می‌گوییم. رابط منطقی «یا» که به صورت « $\vee$ » نوشته می‌شود را «فصل» می‌گوییم.

مثال: p : علی معلم است.
 q : علی مغازه دارد.

$p \vee q$: علی معلم است یا علی مغازه دارد.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

اگر «علی معلم باشد»، یا «مغازه داشته باشد» یا «هم معلم باشد و هم مغازه داشته باشد»، عبارت $p \vee q$ درست است و ارزش گزاره $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که علی معلم نباشد و مغازه هم نداشته باشد. یعنی هر دو گزاره p و q نادرست باشند.

نتیجه: بنابراین ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ تنها زمانی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند. جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است:

تذکر: ممکن است چند گزاره به وسیله ترکیب فصلی به هم وصل شوند، در این صورت گزاره $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ زمانی درست است که لایق یکی از گزاره‌ها درست باشند؛ این گزاره تنها زمانی نادرست است که همه گزاره‌ها نادرست باشند.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(-3 \leq -2) \wedge (3 + 4 = 12)$

ب) عدد ۹۱ عددی اول است و ۲۵ مربع کامل است.

پ) $(-3 \in \mathbb{N}) \vee (2 \in \mathbb{Q})$

پاسخ: الف)

$$\underbrace{(-3 \leq -2)}_T \wedge \underbrace{(3 + 4 = 12)}_F \equiv T \wedge F \equiv F$$

$$\underbrace{\text{عدد ۹۱ عددی اول است}}_T \wedge \underbrace{\text{۲۵ مربع کامل است}}_F \equiv T \wedge F \equiv F$$

ب)

$$\underbrace{(-3 \in \mathbb{N})}_F \vee \underbrace{(2 \in \mathbb{Q})}_T \equiv F \vee T \equiv T$$

پ)

الف قوانین و هم‌ارزی‌های زیر را که به راحتی با جدول ارزش گزاره‌ها قابل اثبات هستند را حتماً حفظ کنید.

- ۱ { $p \wedge q \equiv q \wedge p$
 $p \vee q \equiv q \vee p$ (قوانین جابه‌جایی)

۲ { $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (قوانین شرکت‌پذیری)

۳ { $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (قوانین توزیع‌پذیری یا پخش)

۴ { $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
 $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (قوانین جذب یا هم‌پوشانی)

۵ { $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$
 $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ (قوانین شبه جذب)

۶ { $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
 $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (قوانین دمورگان)

مثال: خواص زیر را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

- ۱) توزیع‌پذیری { $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

۳) دمورگان { $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
 $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

۲) شبه جذب { $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$
 $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

پاسخ: ۱ اثبات قانون توزیع‌پذیری: چون با سه گزاره p , q و r سر و کار داریم، پس طبق اصل ضرب ۸ حالت برای درستی یا نادرستی این سه گزاره وجود دارد:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$\equiv$

چون دو ستون آخر یکسان شده‌اند، پس: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

رابطه دوم در توزیع‌پذیری هم به همین ترتیب اثبات می‌شود.

۲ اثبات قانون شبه جذب: ابتدا ارزش گزاره‌های p و q را نوشته، سپس ارزش گزاره‌هایی که مورد نیاز است را در جدول به دست می‌آوریم:

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim p \vee q$	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$	$p \wedge (\sim p \vee q)$
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	T	F	F	F

$\equiv$

ستون‌های مربوط به $p \vee (\sim p \wedge q)$ و $p \vee q$ با هم برابر شده‌اند؛ پس:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

ستون‌های مربوط به $p \wedge (\sim p \vee q)$ و $p \wedge q$ با هم برابر شده‌اند؛ پس:

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

۳ اثبات قانون دمورگان: ابتدا ارزش گزاره‌های p و q را می‌نویسیم و سپس ارزش گزاره‌هایی که مورد نیاز است را در جدول به دست می‌آوریم: (کتاب درسی)

p	q	~p	~q	p ∧ q	p ∨ q	~(p ∧ q)	~(p ∨ q)	~p ∨ ~q	~p ∧ ~q
T	T	F	F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

ستون‌های مربوط به $\sim(p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ با هم برابر شده‌اند. پس:

ستون‌های مربوط به $\sim(p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ با هم برابر شده‌اند پس:

ب اگر ارزش گزاره درست را با T و ارزش گزاره نادرست را با F نمایش دهیم، هم‌ارزی‌های زیر که تقریباً بدیهی هستند را نیز به خاطر بسپارید.

۱ $\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$

۲ $\begin{cases} p \wedge F \equiv F \\ p \vee F \equiv p \end{cases}$

۳ $\begin{cases} p \wedge T \equiv p \\ p \vee T \equiv T \end{cases}$

۴ $\begin{cases} p \wedge \sim p \equiv F \\ p \vee \sim p \equiv T \end{cases}$

مثال: با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید ترکیب عطفی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست و ترکیب فصلی یک گزاره با نقیضش همواره درست است.

p	~p	p ∧ ~p	p ∨ ~p
T	F	F	T
F	T	F	T

پاسخ: گزاره دلخواه p را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهیم:

$$p \wedge \sim p \equiv F \text{ و } p \vee \sim p \equiv T$$

در ستون $p \wedge \sim p$ همه حالت‌ها F هستند، پس $p \wedge \sim p \equiv F$. در ستون $p \vee \sim p$ همه حالت‌ها T هستند، پس:

تذکره: اگر گزاره‌ای مانند $p \vee \sim p$ در همه حالت‌های ممکن دارای ارزش درست باشد، آن را گزاره‌ای همیشه درست و اگر گزاره‌ای مثل $p \wedge \sim p$ در همه حالت‌های ممکن دارای ارزش نادرست باشد، آن را گزاره‌ای همیشه نادرست می‌نامیم. برای اثبات هم‌ارزی‌ها یا تعیین ارزش گزاره‌های مرکب، علاوه بر استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها می‌توانیم از قوانین موجود در گزاره‌ها مانند دمورگان، جذب، شرکت‌پذیری و ... استفاده می‌کنیم.

مثال: نشان دهید گزاره $(p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee [\sim p \wedge (\sim q \wedge r)]$ هم‌ارز گزاره r است.

پاسخ: با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها داریم:

$$[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \wedge r] \vee [(q \vee p) \wedge r]$$

شرکت‌پذیری

$$\equiv [\sim(p \vee q) \wedge r] \vee [(q \vee p) \wedge r] \equiv [\sim(p \vee q) \vee (q \vee p)] \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$$

دمورگان

پخش

ترکیب شرطی گزاره‌ها

گزاره «اگر هوا بارانی باشد، آنگاه آسمان ابری است» را در نظر بگیرید. گزاره‌هایی به این شکل را «گزاره‌های شرطی» می‌گوییم. در حالت کلی اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «اگر p آنگاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت « $p \Rightarrow q$ » می‌نویسیم. این گزاره را به صورت «p شرط کافی برای q است» یا «q شرط لازم برای p است» نیز می‌خوانیم. در این ترکیب شرطی گزاره p را «فرض یا مقدم» و q را «حکم یا تالی» می‌گوییم.

نمونه: گزاره شرطی روبه‌رو را در نظر بگیرید:
 $p \Rightarrow q$: «آسمان ابری است» $\Rightarrow$ «هوا بارانی است»
 فرض یا مقدم حکم یا تالی

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

گزاره شرطی بالا تنها زمانی نادرست است که «هوا بارانی باشد» اما «آسمان ابری نباشد».

نمونه: گزاره شرطی «اگر حسن خوب درس بخواند، آنگاه نمره خوبی می‌گیرد» را در نظر بگیرید. این گزاره شرطی نیز تنها زمانی نادرست است که حسن خوب درس بخواند اما نمره خوبی نگیرد.

نتیجه: گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p درست اما q نادرست باشد.

جدول ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ به صورت مقابل است.

همان‌طور که در جدول ارزش $p \Rightarrow q$ می‌بینید، اگر ارزش p (مقدم) نادرست باشد، بدون توجه به این که

q (تالی) درست یا نادرست است، ارزش $p \Rightarrow q$ همواره درست است. در این حالت می‌گویند ارزش گزاره

شرطی « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.

نمونه: ارزش گزاره «اگر ۴ عددی فرد باشد، آن گاه ۹ مربع کامل نیست.» با توجه به این که مقدم یعنی گزاره «۴ عددی فرد است.» نادرست است، به انتفای مقدم درست می‌باشد.

مثال: اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف $\sim p \wedge (q \vee r) \wedge r$ ب $p \vee (\sim p \wedge (\sim p \vee q))$ پ $\sim p \vee (q \wedge (r \vee q))$ ت $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$

پاسخ: ارزش گزاره‌های p و q مشخص است. آن‌ها را می‌نویسیم و حالت‌های مختلف را برای r در نظر می‌گیریم:

الف $\sim p \wedge (q \vee r) \wedge r \equiv \sim T \wedge (F \vee r) \wedge r \equiv F \wedge r \wedge r \equiv F \wedge r \equiv F$

ب $p \vee (\sim p \wedge (\sim p \vee q)) \equiv T \vee (\sim T \wedge (\sim T \vee F)) \equiv T \vee (F \wedge (F \vee F)) \equiv T \vee (F \wedge F) \equiv T \vee F \equiv T$

حواستان باشد در $T \vee (\sim T \wedge (\sim T \vee F))$ هم می‌توانستیم بگوییم ارزش گزاره برابر T است، چون داریم:

پ $\sim p \vee (q \wedge (r \vee q)) \equiv \sim T \vee (F \wedge (r \vee F)) \equiv F \vee (F \wedge r) \equiv F \vee F \equiv F$

ت $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv (r \Rightarrow T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F$

تذکر: در قسمت «ت» گزاره $T \Rightarrow r$ همواره درست است؛ زیرا گزاره شرطی تنها در حالت $T \Rightarrow F$ نادرست می‌شود.

تذکر: ارزش گزاره‌های داده‌شده به ارزش r بستگی نداشته و موارد «الف»، «پ» و «ت» گزاره‌های همواره نادرست و مورد «ب» گزاره همواره درست بودند.

عکس گزاره شرطی گزاره شرطی « $q \Rightarrow p$ » را عکس گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » می‌گوییم.

ارزش این دو گزاره ربطی به هم ندارند و هر کدام می‌توانند درست یا نادرست باشند.

مثال: عکس گزاره شرطی « $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ » گزاره شرطی « $x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ » است.

ارزش گزاره شرطی « $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ » درست است اما ارزش گزاره شرطی « $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ » نادرست است؛ زیرا مثال نقض دارد. مثلاً اگر $x = -2$ باشد، $x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 0$ است، اما $x - 2 = (-2) - 2 = -4 \neq 0$ می‌باشد.

عکس نقیض گزاره شرطی گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ را عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ می‌گوییم. هر گزاره شرطی با عکس نقیض آن خود، هم‌ارز است.

قانون عکس نقیض: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

مثال: عکس نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید.

الف اگر در کوهستان باران ببارد، آن گاه در آن گیاه می‌روید. ب $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$

پاسخ: الف برای نوشتن عکس نقیض یک گزاره شرطی باید جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض کنیم. عکس نقیض گزاره (۱) به شکل زیر است:

(در کوهستان باران می‌بارد) $\Rightarrow \sim$ (اگر در کوهستان گیاه بروید) $\equiv \sim$ (در کوهستان گیاه می‌روید) $\Rightarrow$ (اگر در کوهستان باران ببارد)

در کوهستان باران نباریده است $\Rightarrow$ اگر در کوهستان گیاه نرویده باشد $\equiv$

عکس نقیض ۱: اگر در کوهستان گیاه نرویده باشد، آن گاه در کوهستان باران نباریده است.

ب $(x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2) \equiv (\sim(x > 2 \vee x < -2) \Rightarrow \sim(x^2 > 4)) \equiv (x \leq 2 \wedge x \geq -2 \Rightarrow x^2 \leq 4) \equiv (-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4)$

عبارت آخر عکس نقیض عبارت اولیه است و با آن هم‌ارز است.

اثبات با عکس نقیض می‌توانیم به جای اثبات مستقیم یک قضیه، از اثبات عکس نقیض آن استفاده کنیم. برای این کار نقیض فرض و نقیض حکم را نوشته و با استفاده از نقیض حکم، نقیض فرض را اثبات می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۲ باشد، آن گاه n مضرب ۲ است.

پاسخ: به جای اثبات مستقیم حکم مسئله، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:

$(n^2 \text{ مضرب } 2 \text{ نیست} \Rightarrow n \text{ مضرب } 2 \text{ نباشد}) \equiv (n \text{ مضرب } 2 \text{ است} \Rightarrow n^2 \text{ مضرب } 2 \text{ است})$

$n \text{ مضرب } 2 \text{ است} \Rightarrow n = 2k \pm 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 \pm 4k + 1 = 2(2k^2 \pm 2k) + 1 = 2k' + 1$

بنابراین n^2 مضرب ۲ نیست؛ پس عبارت عکس نقیض اثبات شد.

تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی برای تبدیل گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به ترکیب فصلی می‌توان آن را به صورت $\sim p \vee q$ نوشت:

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$$p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

(کتاب درسی) (نویس فرداد ۱۴۰۳)

مثال: هم‌ارزی‌های مقابل را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

پاسخ:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

چون ستون‌های مربوط به گزاره‌های $\sim p \vee q$ ، $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ هر سه یکسان هستند، پس این سه گزاره هم‌ارزند.

مثال: هم‌ارزی‌های زیر را بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها اثبات کنید.

الف $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$

ب $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

پاسخ: الف با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها داریم:

$$p \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv T \vee q \equiv T$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 تبدیل شرطی به فصلی شرکت‌پذیری

ب با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها داریم:

$$(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (\sim q \wedge q) \equiv p \vee F \equiv p$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 تبدیل شرطی به فصلی پخشی

بررسی هم‌ارزی‌ها با کمک استدلال

گاهی اوقات می‌توانیم با کمک استدلال، خیلی سریع‌تر هم‌ارزی‌ها را بررسی کنیم. به عنوان مثال هم‌ارزی $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ را در نظر بگیرید. برای این که نشان دهیم $p \Rightarrow p \vee q$ همواره درست است یکی از راه‌ها استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها است. راه دیگر استفاده از استدلال است. به این صورت که می‌دانیم گزاره p دو حالت دارد. اگر p نادرست باشد، آن‌گاه گزاره شرطی $p \Rightarrow p \vee q$ به انتقای مقدم درست است. اگر p درست باشد، گزاره $p \vee q$ هم درست می‌شود و چون هم مقدم و هم تالی درست هستند، گزاره شرطی $p \Rightarrow p \vee q$ درست است. بنابراین همواره $p \Rightarrow p \vee q \equiv T$ است.

(کتاب درسی)

$$(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$$

مثال: با کمک استدلال نشان دهید:

پاسخ: اگر ارزش گزاره $p \wedge q$ نادرست باشد، آن‌گاه گزاره $p \wedge q \Rightarrow p$ به انتقای مقدم درست است. اگر ارزش گزاره $p \wedge q$ درست باشد، یعنی هم p و هم q درست بوده، پس هم مقدم و هم تالی درست هستند و $p \wedge q \Rightarrow p \equiv T$ درست است. بنابراین همواره $p \wedge q \Rightarrow p \equiv T$ است.

ترکیب دوشروطی

ترکیب دوشروطی دو گزاره p و q را با نماد « $\Leftrightarrow$ » نمایش می‌دهیم و به صورت $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ تعریف می‌کنیم و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

۱ «اگر p آن‌گاه q و برعکس»

۲ « p شرط لازم و کافی برای q است.»

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

جدول ارزش گزاره‌ها برای $p \Leftrightarrow q$ به صورت مقابل است:
با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها ارزش $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q هم‌ارزش باشند یعنی p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.
در واقع $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که هم $p \Rightarrow q$ و هم $q \Rightarrow p$ درست باشند.

مثال: گزاره‌های زیر را به صورت شرطی بنویسید و در صورت امکان آن‌ها را به صورت شرط لازم و کافی بیان کنید.

$$\left. \begin{aligned} b &= 0 \vee a = 0 : p \\ ab &= 0 : q \end{aligned} \right\} \text{ ب}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= b : p \\ a^2 &= b^2 : q \end{aligned} \right\} \text{ الف}$$

پاسخ: الف عبارت شرطی « $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ » درست است؛ اما عکس آن یعنی « $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ » نادرست است؛ زیرا $1^2 = (-1)^2$ است، اما $1 \neq -1$ نیست، پس عبارت داده‌شده دوشروطی نیست و ترکیب شرطی داده‌شده را به صورت‌های زیر می‌توانیم بخوانیم:
($a = b \Rightarrow a^2 = b^2$) شرط لازم برای $a = b$ است. ($a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$) شرط کافی برای $a = b$ است.

پ اگر $ab = 0$ باشد، a یا b یا هر دوی آن‌ها صفر هستند و برعکس اگر a یا b یا هر دوی آن‌ها صفر باشند، حتماً $ab = 0$ خواهد بود، پس این گزاره‌ها با هم یک ترکیب دوشروطی درست می‌سازند، پس داریم:

این ترکیب دوشروطی را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱ شرط لازم و کافی برای آن‌که $ab = 0$ باشد، این است که $a = 0$ یا $b = 0$ باشد.

۲ $ab = 0$ است، اگر و تنها اگر $a = 0$ یا $b = 0$ باشد.

۳ اگر $ab = 0$ باشد، $a = 0$ یا $b = 0$ است و برعکس.

مثال: با رسم جدول ارزش گزاره‌ها، درستی یا نادرستی هم‌ارزی مقابل را بررسی کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

پاسخ: ستون‌های مربوط به $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ و q با هم برابر هستند؛ پس این دو گزاره با هم هم‌ارز هستند.

نقیض گزاره‌های شرطی و دوشروطی

نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت روبه‌رو به دست می‌آید: (نوشتن ترکیب شرطی به صورت فصلی)

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$

$\equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q$ (دمورگان)

$\equiv p \wedge \sim q$ ($\sim(\sim p) \equiv p$)

نتیجه: نقیض گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » به صورت « $p \wedge \sim q$ » است:

نقیض گزاره دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

(دمورگان) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)$ (تعریف)

(توزیع‌پذیری) $\equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim p]$ (نقیض گزاره شرطی)

(تبدیل فصلی به شرطی) $\equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)$ (شبه جذب)

(تعریف دوشروطی) $\equiv \sim p \Leftrightarrow q$

نتیجه: نقیض گزاره دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

در امتحان چه خبر؟

در این بخش از فصل یک با سؤالاتی با انواع زیر روبه‌رو خواهید شد:

تیپ ۱ سؤالات به صورت جای خالی، تستی، درست - غلط که معمولاً از تعاریف اولیه ترکیب گزاره‌ها طرح می‌شوند.

حالاتو حل کن: سؤالات ۴۰ تا ۵۴

تیپ ۲ سؤالاتی که در آن‌ها برای تعیین ارزش یک گزاره مرکب یا اثبات یک هم‌ارزی باید جدول ارزش گزاره‌ها را رسم کنید.

حالاتو حل کن: سؤالات ۵۷، ۵۸، ۷۴، ۸۶ و ۸۹

تیپ ۳ سؤالاتی که در آن‌ها جمع چند عبارت نامنفی و یا ضرب چند عبارت صفر شده و شما باید مقادیر مجهول را به دست آورید.

حالاتو حل کن: سؤال ۶۰

تیپ ۴ سؤالاتی که در آن‌ها باید نقیض یک گزاره مرکب، عکس یا عکس نقیض یک گزاره شرطی را بنویسید.

حالاتو حل کن: سؤالات ۶۱ تا ۶۸ و ۸۷

تیپ ۵ سؤالاتی که در آن‌ها برای اثبات درستی یک گزاره شرطی، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم. **حالاتو حل کن:** سؤالات ۷۰ و ۷۱

تیپ ۶ باید بتوانید یک گزاره شرطی را به صورت شرط لازم و کافی بنویسید. **حالاتو حل کن:** سؤال ۸۸

تیپ ۷ سؤالاتی که در آن‌ها باید ارزش گزاره‌ها را تعیین کنید یا با قراردادن عبارت مناسب در جای خالی جملات داده‌شده را به گزاره‌های درست تبدیل کنید.

حالاتو حل کن: سؤالات ۷۵ تا ۸۵، ۷۳، ۹۸ و ۹۹

تیپ ۸ سؤالاتی که در آن‌ها باید ارزش گزاره‌های مرکب را با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها تعیین کنید.

حالاتو حل کن: سؤالات ۹۲ تا ۹۷، ۵۵، ۵۶، ۵۹، ۶۹، ۷۲، ۹۰ و ۹۱

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۴۰- گزاره مرکب $p \vee q$ زمانی درست است که

۴۱- گزاره مرکب $p \wedge q$ زمانی نادرست است که

۴۲- در ترکیب $p \Rightarrow q$ ، گزاره p شرط برای q و گزاره q شرط برای p است.

۴۳- گزاره $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که باشد.

۴۴- در گزاره $p \Rightarrow q$ گزاره p را و گزاره q را گویند.

۴۵- عکس گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ گزاره و عکس نقیض آن گزاره می‌باشد.

۴۶- گزاره $p \Rightarrow q$ با گزاره شرطی و گزاره فصلی هم‌ارز می‌باشد.

۴۷- نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ گزاره می‌باشد.

۴۸- گزاره $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که

۴۹- نقیض گزاره $p \Leftrightarrow q$ عبارت است از گزاره

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۵۰- دو گزاره $p \wedge T$ و $p \vee F$ هم‌ارزند.

۵۱- در هر گزاره شرطی اگر ارزش مقدم نادرست باشد، گزاره شرطی همواره درست است.

۵۲- اگر n^2 مضرب ۱۲ باشد، n نیز مضرب ۱۲ است.

۵۳- اگر گزاره $(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r$ نادرست باشد، ارزش گزاره $(p \vee r) \Rightarrow \sim q$ همواره درست است.

در سؤالات زیر گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۵۴- گزاره $(p \vee (p \Rightarrow \sim p)) \Rightarrow [(p \Rightarrow p) \wedge (\sim p \Leftrightarrow p)]$ هم‌ارز با کدام گزاره زیر است؟

$T \Rightarrow p$ (۱) $p \vee T$ (۲) $\sim(p \Leftrightarrow p)$ (۳) $p \Rightarrow F$ (۴)

۵۵- کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی گزاره $q \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ است؟

p (۱) $p \vee q$ (۲) q (۳) $\sim p \Leftrightarrow q$ (۴)

۵۶- در خصوص گزاره مرکب $(p \vee \sim q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$ کدام مورد صحیح است؟

(۱) فقط در حالتی که p و q نادرست باشند، گزاره نادرست است. (۲) همواره نادرست است.

(۳) فقط در حالتی که p و q درست باشند، گزاره درست است. (۴) همواره درست است.

۵۷- قوانین جابجایی و جذب را به وسیله جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کنید.

۵۸- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\sim(p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$ ب) $(p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim q)) \equiv p$
پ) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ کتاب (درسی) ت) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$
ث) $p \Rightarrow p \equiv T$ کتاب (درسی) ج) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$
چ) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ کتاب (درسی) ح) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$ کتاب (درسی)

$p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$

۵۹- با کمک استدلال نشان دهید:

۶۰- مقادیر x و y را بیابید به طوری که داشته باشیم:

الف) $(2y + z)^2 + (x - y)^2 + \sqrt{2x + 6} = 0$ ب) $(2y + x)(x + 1)(y - 1) = 0$ پ) $|x^2 - y^2| = 2x^2 - x^4 - 1$

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۶۱- $x \geq -6 \vee x < 5$

۶۲- 3 عددی فرد است یا $\sqrt{2}$ گویاست.

۶۳- $(p \vee q) \wedge \sim p$ ۶۴- $(p \vee q) \wedge \sim p$ ۶۵- $(p \vee q) \wedge \sim p$

۶۵- اگر دو عدد حقیقی با هم برابر باشند، آن‌گاه مجذور آن دو عدد مساوی هستند.

عکس نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۶۶- $x \geq 2 \Rightarrow x^2 > 4$

۶۷- اگر حسن در تمرینات شرکت کند، برای تیم فوتبال مدرسه انتخاب می‌شود.

۶۸- با توجه به گزاره شرطی «اگر عددی مثبت نباشد، آن‌گاه منفی یا صفر است.» موارد زیر را بنویسید.

الف) عکس گزاره ب) نقیض گزاره پ) عکس نقیض گزاره

۶۹- وقتی می‌گوییم «ارزش یک گزاره شرطی به انتقای مقدم درست است» به چه معنی است؟

۷۰- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح a ثابت کنید اگر a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a نیز عددی فرد است. کتاب (درسی)

۷۱- با استفاده از عکس نقیض یک گزاره برای هر عدد صحیح a ثابت کنید اگر a^2 مضرب ۳ باشد، a نیز مضرب ۳ است. کتاب (درسی)

۷۲- ارزش p و q را به گونه‌ای مشخص کنید که گزاره $(\sim p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow p$ نادرست باشد.

۷۳- با توجه به گزاره‌های زیر، ارزش گزاره‌های $\sim p \Rightarrow (p \wedge r)$ و $(p \vee q) \Rightarrow \sim p$ را مشخص کنید.

p : صفر عددی زوج است. q : عدد ۲ بر ۶ بخش پذیر است. r : عدد ۱ اول نیست.

۷۴- جدول ارزش گزاره‌ها را برای گزاره مرکب زیر رسم کنید و سپس ارزش این گزاره را با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها نیز به دست آورید.
 $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

۷۵- شرط لازم و کافی برای این که دو ضلع مثلثی با هم برابر باشند، این است که دو زاویه مجاور اضلاع با هم برابر باشند.

(کتاب درسی)

۷۶- شرط لازم و کافی برای این که احتمال پیشامدی صفر باشد، این است که پیشامد تهی باشد.

(کتاب درسی)

۷۷- شرط لازم و کافی برای این که نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط باشد، این است که فاصله نقطه از دو سر پاره خط یکی باشد.

$$a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0 \quad -78$$

$$-80 \quad \text{«هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.»} \vee \text{«عبارت } \sqrt{x} - 1 \text{ یک چند جمله‌ای است.»} \Leftrightarrow \text{«} \sqrt[5]{-32} = -2 \text{»} \wedge \text{«} x = 1 \text{ تابع نیست.»}$$

در هر یک از موارد زیر به جای $\square$ چه تعداد از علامت‌های « $\vee$ » یا « $\wedge$ » یا « $\Rightarrow$ » یا « $\Leftrightarrow$ » را می‌توان قرار داد تا یک هم‌ارزی درست داشته باشیم؟ (T درست و F نادرست است.)

$$-81 \quad \left(\frac{2}{5} \neq \frac{1}{4}\right) \square (1 \in \{2, 3, 4\}) \equiv T$$

$$-82 \quad (x^2 + 1 \neq 0) \square (-2 > 3) \equiv T$$

$$-83 \quad \equiv F \quad (\text{دو قطر متوازی الاضلاع با هم برابرند.}) \square (a \in \{b\} \Leftrightarrow a = b) \quad -84 \quad \sqrt[5]{0/1} > \sqrt[5]{0/1} \equiv F \quad (0/1)^{-1} > (0/1)^{-2}$$

$$-85 \quad T \equiv \text{برای هر عدد طبیعی } n, n! \text{ گویاست} \square \text{در آمار هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است.}$$

۸۶- جدول ارزش گزاره‌های زیر را کامل کنید.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
	مجموع هر ۲ عدد اول بزرگ‌تر از ۲ همواره زوج است.								F
$ab < 0 \Rightarrow a > 0 \vee b > 0$				F					
-۷ عددی اول است					T				
	$(a+b) \Leftrightarrow (a) \wedge (b)$ زوج فرد فرد							F	

۸۷- عکس گزاره و نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید. سپس عکس نقیض گزاره درست را بنویسید.

الف) اگر p عددی اول باشد، $p = 6k \pm 1$ است. (ب) اگر عددی بر ۶ بخش پذیر باشد، آن گاه بر ۳ و بر ۲ بخش پذیر است.

پ) اگر $0 < x < 1$ باشد، آن گاه $x^2 < x$

۸۸- گزاره‌های زیر را به صورت یک ترکیب شرطی یا دوشروطی درست بنویسید و آن‌ها را به صورت شرط لازم و کافی بیان کنید.

الف) $\left. \begin{array}{l} p: \text{چهارضلعی } ABCD \text{ مستطیل است.} \\ \text{الف) } \left. \begin{array}{l} p: \text{چهارضلعی } ABCD \text{ مستطیل است.} \\ \text{الف) } \left. \begin{array}{l} p: \text{چهارضلعی } ABCD \text{ مستطیل است.} \\ \text{الف) } \left. \begin{array}{l} p: \text{چهارضلعی } ABCD \text{ مستطیل است.} \end{array} \right\} \text{ب) } \left. \begin{array}{l} a \times b: p \text{ زوج است.} \\ a: q \text{ زوج هستند.} \end{array} \right\} \text{پ) } \left. \begin{array}{l} a: p \text{ زوج است.} \\ a+1: q \text{ فرد است.} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$

ت) $\left. \begin{array}{l} a: p \text{ و } b \text{ گنگ و مثبت هستند.} \\ ab: q \text{ گنگ است.} \end{array} \right\}$ ث) $\left. \begin{array}{l} ABCD: p \text{ مربع است.} \\ q: \text{دو قطر } ABCD \text{ عمود و برابرند.} \end{array} \right\}$

۸۹- جدول ارزش گزاره‌های زیر را با توجه به اطلاعات داده شده تکمیل کنید. (اطلاعات هر سطر فقط مربوط به همان سطر است.)

p	q	r	$(p \vee r) \Rightarrow q$	$\sim p \wedge ((\sim p \vee \sim r) \Leftrightarrow q)$	$(p \vee q) \Rightarrow \sim r$	$[r \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow \sim q$
	F		T				
		F		T			
						F	

۹۰- الف) آیا از این که $p \wedge q \equiv p \wedge r$ می‌توان نتیجه گرفت $q \equiv r$ ؟ ب) آیا از این که $p \vee q \equiv p \vee r$ می‌توان نتیجه گرفت $q \equiv r$ ؟

پ) آیا از این که $p \Rightarrow r$ درست و $q \Rightarrow r$ نادرست هستند، می‌توان نتیجه گرفت $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

۹۱- x را چنان تعیین کنید که هم‌ارزی روبه‌رو همواره برقرار باشد:
 $(x \wedge \sim p) \vee (\sim x \wedge p) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q \vee x)$

بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

$$-92 \quad p \wedge (q \Rightarrow \sim r) \Rightarrow p \equiv T \quad -93 \quad \sim p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \equiv T \quad -94 \quad (p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$$

$$-95 \quad ((p \wedge q) \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv q \quad -96 \quad [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \Rightarrow p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad -97 \quad p \Rightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$$

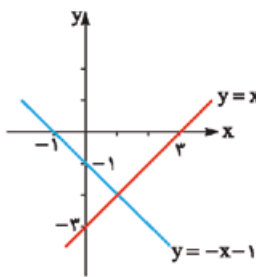
۹۸- اگر ارزش گزاره $[\sim q \Leftrightarrow (p \wedge s)] \wedge [\sim (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))]$ درست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $s \Leftrightarrow (p \wedge \sim r)$ ب) $[\sim q \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim q)] \Rightarrow r$

۹۹- اگر ارزش گزاره $\sim p \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد، آن گاه ارزش گزاره $(q \vee \sim r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \Rightarrow r))$ را تعیین کنید.

پاسخ نامہ





با توجه به نمودار مقابل، عبارت داده شده تابع نیست، چون خط موازی محور y ها نمودار را در ۲ نقطه (به جز در نقطه تقاطع دو خط) قطع می کند.

روش دوم: مقدار x را برابر با صفر می گذاریم؛ پس داریم:

$$x = 0 \Rightarrow 0 - y^2 - 0 - 4y - 3 = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (y+1)(y+3) = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ یا } y = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (0, -1) \in f \\ (0, -3) \in f \end{cases} \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

۲۵ الف $8 > 10$ - ارزش نادرست

ب ۲۹ عددی اول نیست. - ارزش نادرست

۲۶. از جدول ارزش گزاره استفاده می کنیم: ستون مربوط به p و $(\sim p)$ برابر شدند.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

پس این دو گزاره هم ارز هستند.

۲۷. $x = 7k \Rightarrow S = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$: مجموعه جواب $x \Rightarrow x$ مضرب ۷ است.
 $= \{\dots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, \dots\}$

۲۸. $x = 7k + 3 \Rightarrow x$ واحد از مضارب ۷ بیشتر است.
 $\Rightarrow S = \{7k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$: مجموعه جواب
 $= \{\dots, -18, -11, -4, 3, 10, 17, 24, \dots\}$

۲۹. عبارت $\frac{5}{2+x}$ باید عدد طبیعی باشد، پس $2+x$ باید مقسوم علیه عدد ۵ باشد:

$$\frac{5}{2+x} \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} 2+x=1 \Rightarrow x=-1 \\ 2+x=5 \Rightarrow x=3 \end{cases} \Rightarrow S = \{-1, 3\}$$

$$\frac{6x+1}{2x-5} = \frac{(6x-15)+16}{2x-5} = \frac{2(2x-5)+16}{2x-5} = 2 + \frac{16}{2x-5} \in \mathbb{Z}$$

پس $2x-5$ مقسوم علیه عدد ۱۶ باید باشد:

$$2x-5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$$

$$\Rightarrow 2x \in \{-11, -3, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 13, 21\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{-11}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, 3, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{21}{2} \right\}$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{2, 3\} \Rightarrow S = \{2, 3\}$$

۳۱. $a = k^2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{k^2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ مربع کامل است
 $= \{\dots, (-3)^2, (-2)^2, (-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$
 $= \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{یا } x = -1 \xrightarrow{D=\mathbb{R}} S = \{-1, \frac{1}{2}\}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{یا } x = -1 \Rightarrow S = \{-1\}$$

با توجه به این که دامنه متغیر گزاره نما مجموعه اعداد صحیح است $\frac{1}{2}$ جزء مجموعه جواب نمی باشد.

۳۴. هیچ مقدار حقیقی برای x نمی توانیم پیدا کنیم که $3^x = 0$ شود، بنابراین مجموعه جواب تهی است. ($S = \emptyset$)

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^3} \leq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1$$

بنابراین مجموعه جواب $S = (0, 1]$ می باشد.

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

۱. منطق ریاضی یا منطق نمادین **۲.** گزاره

۳. گزاره - گزاره نما **۴.** منطق نمادین - استدلال

۵. دامنه متغیر گزاره نما **۶.** گزاره

۷. **۲** تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره ها برای ۵ گزاره $2^5 = 32$ و

$$\text{تعداد سطرهای دارای حداقل ۳ گزاره درست} = 16 = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

پس نسبت آن ها $2 = \frac{32}{16}$ می باشد. پس گزینه (۲) صحیح است.

۸ الف گزاره: جمله ای خبری است که یا راست است یا دروغ.

ب گزاره نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود.

پ مجموعه جواب گزاره نما: در هر گزاره نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن ها، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویند.

۹ الف -2 **ب** $>$ **پ** $<$ **ت** $\leq$

$$-x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2 \leq 0$$

۱۰. گزاره درست $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+1) = 0$
 دارای ۲ ریشه صحیح است. $\Rightarrow x = -2$ یا $x = -1$

۱۱. گزاره نیست؛ چون جمله عاطفی است و خبری را بیان نمی کند.

۱۲. گزاره نیست؛ چون پرسشی است و خبری را بیان نمی کند.

۱۳. گزاره نیست؛ زیرا جمله امری است و خبری را بیان نمی کند.

۱۴. گزاره نیست؛ «شدید» تعریف شده نیست.

۱۵. گزاره نیست؛ زیرا ضمیر «او» مشخص نیست که کیست.

۱۶. گزاره است؛ هر چند ارزش آن را نمی دانیم اما می دانیم این جمله خبری یا راست است یا دروغ.

۱۷. گزاره نیست؛ زیرا $3x + 2y = 8$ یک گزاره نماست که گاهی درست و گاهی نادرست است.

۱۸. گزاره است؛ عدد اول ۲ دارای خاصیت مورد نظر است.

۱۹. ارزش گزاره نادرست است. مثلاً $2 + 5 = 7$ عددی فرد است.

۲۰. ارزش گزاره درست است.

۲۱. ارزش گزاره نادرست است.

نکته: باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۳ با باقی مانده مجموع ارقامش در تقسیم بر عدد ۳ برابر است، پس اگر مجموع ارقام عددی بر ۳ بخش پذیر باشد آن عدد بر ۳ بخش پذیر است، مجموع ارقام عدد 2635921431 عدد ۳۶ است، پس این عدد بر ۳ بخش پذیر است و نمی تواند یک عدد اول باشد.

۲۲. ارزش گزاره نادرست است، زیرا عبارت $5^9 + 8$ به صورت زیر به ضرب ۲ عدد بزرگ تر از یک تجزیه می شود: $5^9 + 8 = (5^3)^3 + 2^3 = 125^3 + 2^3 = (125+2)(125^2 - 125 \times 2 + 2^2)$

۲۳. ارزش گزاره نادرست است. به ازای $n=5$ داریم $3^5 + 1 = 32 + 1 = 33$ که اول نیست.

$$x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$$

۲۴. روش اول:

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - y^2 - 4y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = y^2 + 4y + 4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = (y+2)^2 \Rightarrow y+2 = \pm(x-1)$$

$$\xrightarrow{\text{حالت ۱}} y+2 = x-1 \Rightarrow y = x-3$$

$$\xrightarrow{\text{حالت ۲}} y+2 = -(x-1) \Rightarrow y = -x-1$$

آزمون‌های نوبت اوّل دوم 9

ردیف	نمونه امتحان نوبت اول	رشته ریاضی و فیزیک	آمار و احتمال یازدهم	نمره
۱	امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموعه A دارای ۵۱۱ زیرمجموعه محض یا سره می‌باشد. مجموعه توانی $A \cap B$ ، γ عضو غیر تهی دارد. تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی و سره $(B \cup A)'$ برابر است با ب) گزاره $p \Rightarrow q$ با گزاره‌های و هم‌ارز است. عکس گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت و نقیض آن گزاره می‌باشد.			۱/۵
۲	درست و نادرست بودن عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) گزاره مرکب $(p \wedge q) \Rightarrow r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q \vee r)$ همواره درست است. ب) اگر A و B ناسازگار باشند، A' و B' حتماً سازگارند.			۱
۳	ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \vee r)$ درست است. احتمال این‌که ارزش گزاره r نادرست باشد، کدام است؟ $\frac{3}{7}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)			۱
۴	گزاره‌نما را تعریف کنید.			۰/۵
۵	با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، ارزش گزاره $[p \wedge (q \Rightarrow \sim r)] \Rightarrow p$ را تعیین کنید.			۰/۵
۶	ارزش گزاره سوری مقابل را تعیین کنید و نقیض آن را بنویسید. $(\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-1}{x-1} = x+1) \vee (\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1)$			۱/۵
۷	ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^3 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.			۱
۸	تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه $k+1$ عضوی از تعداد اعضای مجموعه شامل زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k-1$ عضوی، ۴۷ واحد بیشتر است. مقدار k را بیابید. (هر زیرمجموعه یک مجموعه غیر از خودش را زیرمجموعه محض می‌گوییم.)			۱
۹	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$			۱
۱۰	عبارت‌های مقابل را ثابت کنید. الف) $X \subseteq A \wedge X \subseteq A' \Rightarrow X = \emptyset$ ب) $A \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq A'$			۱/۵
۱۱	اگر $A = \{1, 5\}$ و $B = \{-1, 1, 2\}$ باشد، $A \times B$ و A^2 را در صفحه مختصات دکارتی رسم کنید.			۱
۱۲	اگر $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $A \cap B = \{2, 3\}$ و مجموعه $(A - B) \times (B - A)$ دارای ۶ عضو باشد، تعداد عضوهای B را بیابید.			۱
۱۳	از گزینه‌های داخل پرانتز، گزینه صحیح را انتخاب کنید. در سه بار پرتاب سکه، پیشامدهای A : هر ۳ بار سکه‌ها مشابه بیایند و B : زوج بار رو بیایند، (سازگارند / ناسازگارند).			۰/۵
۱۴	عددی به تصادف از ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که عدد انتخابی نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۴.			۱
۱۵	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. احتمال این‌که در پرتاب این تاس، عددی اول ظاهر شود، چه قدر است؟ احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را بیابید.			۱
۱۶	اگر $P(A - B) = \frac{3}{7}$ و $P(B - A) = \frac{1}{7}$ باشد، کم‌ترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ را بیابید.			۱
۱۷	دو تاس همگن را می‌اندازیم. اگر حاصل جمع شماره‌های روشده کم‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که حداقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد را بیابید.			۱
۱۸	در یک کیسه ۱۶ گوی به شماره‌های ۱ تا ۱۶ وجود دارد. دو گوی به طور متوالی و بدون جای‌گذاری، به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانییم شماره گوی دوم از شماره گوی اول کم‌تر است با کدام احتمال شماره گوی اول ۱۶ است؟			۱
۱۹	از کیسه‌ای که دو گوی سبز، سه گوی سفید و پنج گوی آبی دارد، سه گوی را پی‌درپی و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که گوی اول سفید و ۲ تای دیگر آبی باشد.			۱
۲۰	امیر و بهروز هر کدام با احتمال $\frac{6}{10}$ و $\frac{3}{10}$ در یک مسابقه علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر $\frac{5}{10}$ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز را بیابید.			۱
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید		