

۱- پدر و مادر عزیزم

۲- دوست عزیزم «فرهنگ نوروزی» که از برادر به من نزدیک تر بود.

برادر عزیزم «عرفان»؛ که وجودش همیشه همراه و مایه دلگرمی من است.

زهرا جالینوسی

امیر زراندوز

گپی راجع به مجموعه «ماجرای بیست»

تا حالا به این فکر کردین که یه دانش آموز توی ۲۴ ساعت شبانه روز چی کار می کنه؟

هفت هشت ساعت می خوابه و استراحت می کنه.

حداقل هفت ساعت تو مدرسه ست که شیش ساعتش رو سر کلاسه و (احتمالن) داره درس گوش می ده.

حدود یک ساعت تو راه خونه به مدرسه و مدرسه به خونه ست.

سه چهار ساعتی هم توی خونه با کتابا و درساش مشغوله و گشتی می گیره.

چهار پنج ساعت از وقتش هم می ره برای غذاخوردن، حضور در آغوش گرم خانواده و کارای شخصی مهم و بازی گوش (که شامل گوشه بازی هم می شه!).

خُب! با این حساب و کتابا معلوم می شه یه دانش آموز، ۶۲۵ / ۷۵ درصد از زمان بیداریش رو با درس و مشق و کتاب و مدرسه و معلم می گذرونه با کلی اتفاقات تلخ و شیرین؛ پس بی راه نیست که بگیم:

«ماجرای بیست» ماجرای اصلی زندگی یه دانش آموزه.

ما توی خیلی سبز این مجموعه رو آماده کردیم چون واقعن دلمون می خواد داستان مدرسه رفتن و درس خوندن شما و این عمری که به پاش گذاشتین، پایان خیلی خوش و شکوهمندی داشته باشه!

اگه ماجراهای جالب خودتون با درساتون رو به صورت مطلب، عکس، سلفی، خاطره، فیلم و فیلم نامه و ... برامون بفرستین، خیلی رو سرمون ممت گذاشتین. ما حتمن ماجراهاتون رو یه جایی (مثلن تو سایت خیلی سبز یا شاید هم چاپ بعدی کتاب درسی) منتشر می کنیم.

ماجرای من و ریاضی انسانی

متأسفانه این باور غلط بین مردم هست که هر کی ریاضی ش داغونه می ره رشته انسانی. ولی من خیلی آدمای کاردرست رو می شناسم که تا مقطع راهنمایی (متوسطه اول) شاگرداول بودن، همیشه ریاضی شون ۲۰ بود و به عشق رشته حقوق یا فلسفه یا ادبیات و ... رفتن رشته انسانی و اتفاقن خیلی هم موفق شدن و الان واسه خودشون آدم حسابی ان. اما این وسط درس ریاضیه که مظلوم واقع شده و این یک واقعیت تاریخیه! حتی شاگرداولی که از راهنمایی به رشته انسانی می ره کم کم از این درس مهم فاصله می گیره.

به نظر من دلیل اصلی ش بی علاقه بودن دانش آموزان انسانی نیست، بلکه باعث اصلیش ما (یعنی معلما) هستیم. (همین جا از همه معلمای زحمت کش ریاضی رشته انسانی عذر می خوام؛ عرض کردم این یک واقعیت تاریخیه و محدود به زمان حال نمی شه.)...

ما (یعنی خیلی سبز) همیشه آدمایی رو پیدا می کنیم که عاشق ریاضی درس دادن به بچه های پرتلاش رشته انسانی هستن تا کتابی بنویسن که شما با خوندنش ماجراهای ریاضی تون شیرین تر بشه.

یه عده آدم حسابی توی خیلی سبز هستن که تشکر کردن پاسخگوی ذره ای از زحماتشون نیست. از جمله همکاران خوب در واحد تولید و خانم ها مریم کاهری و زهره قموشی در واحد تألیف. دمتون گرم ... خسته نباشید.



مقدمه مؤلفان

ریاضی درس دادن به بچه‌های انسانی جزء چالشی‌ترین و در عین حال از لذت‌بخش‌ترین قست‌های معلم بوده. چرا چالشی؟ چون بچه‌ها معمولاً برای یادگیری مقاومت می‌کنند و می‌گویند ریاضی به درد ما نمی‌خورد و کلی درس دیگه داریم برای خواندن، اما به این توجه نمی‌کنند که این درس در کنکور انسانی، درسی سرنوشت‌ساز، چون اکثریت افراد این درس را منفی یا صفر می‌زنند. پاسخ دادن به نصف سؤال‌ها می‌تونه رتبه شما رو به میزان چشمگیری تغییر بده. از امسال هم که ۶۰٪ نمره کنکور رو باید از امتحان‌های نهایی کسب کنید؛ پس خواندن کتاب «**ماجرای بیست**» و حل همه سؤال‌هاش باید جزء اولویت‌های زندگی تون باشه.

در کتاب «**ماجرای بیست ریاضی و آمار دهم**»، اولاً سعی کردیم درس‌نامه‌ها و پاسخ‌های تشریحی رو به ساده‌ترین بیان، ارائه کنیم، یعنی حتی دانش‌آموزی که پایه ضعیفی داره هم درس رو به راحتی بفهمه. ثانیاً زیاده‌گویی نکردیم تا دانش‌آموزان معمولی و قوی شاکی نشن. فقط اینو بهتون بگم که با خواندن این کتاب، هر سؤالی رو می‌تونین جواب بدین (**سؤالات ریاضی رو می‌گما! در سای دیگه ربطی به من نداره**).

کتاب ماجرای بیست ریاضی و آمار دهم انسانی اینارو داره:

درس‌نامه: سعی کردیم خیلی ساده، روان و کاربردی (جوری که راحت بتونید ریاضی رو بخونید، یاد بگیرید و حتی لذت ببرید) درس رو آموزش بدیم. مطالب اضافه در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهای لازم رو دارید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسیه، البته بیشتر جاها برای این که مطالب، طولانی نشه و حوصله‌تون سر نره درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت رو جداگونه آوردیم.

سؤال‌های امتحانی: همه مثال‌ها و تمرین‌های کتاب، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها و سؤال‌های امتحان نهایی‌های برگزار شده توی این کتاب موجوده و به قول معروف پوشش کامل کتاب درسی و امتحان‌های نهایی به جوری رعایت شده که بعد خواندن «**ماجرای بیست**»، دیگه هیچ نگرانی‌ای ندارید که چیزی جا افتاده باشه. سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت 📖 است، سطح دشوارتری نسبت به بقیه سؤال‌ها داره و شما رو برای سؤال‌های سخت نهایی آماده می‌کنه.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتماً پاسخ‌ها رو تحلیل کنید.

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب دو امتحان ترم اول داریم و چهارتا امتحان ترم دوم. حتماً قبل امتحان نهایی این سؤال‌ها رو حل کنید و به بارم‌بندی اون‌ها هم توجه کنید که بدونید باید چه جوری جواب بدی که مصحح بهتون نمره کامل بده.

در پایان ممنون از:

دکتر نصری مدیر خلاق و همراه خیلی سبز
مهندس مهدی هاشمی که برای نوشتن این کتاب به ما اعتماد کرد.
خانم طاهری و خانم قموشی که زحمت هماهنگی‌ها رو کشیدند و خیلی اذیتشون کردیم.
ویراستارهای خوب مجموعه آقایان و خانم‌ها شقایق راهبریان، حسین اسدزاده، سجاد داوطلب و پوپک مقدم که برای بهتر شدن کتاب به ما کمک کردن.
شما بچه‌های خوب انسانی که برای آینده بهتر ایران تلاش می‌کنید.

امیر زراندوز

زهرا جالینوسی

شهریور ۱۴۰۳

فهرست

فصل صفر: عبارتهای جبری

۸	بخش اول: اتحادهای جبری
۹	بخش دوم: تجزیه عبارتهای جبری
۱۲	بخش سوم: عبارتهای گویا
۸۶	پاسخ سؤالهای امتحانی

فصل اول: معادله درجه دوم

۱۵	بخش اول: معادله درجه اول و کاربردهای آن (مسائل توصیفی)
۱۷	بخش دوم: معادله درجه دوم و روشهای حل آن
۲۲	بخش سوم: مجموع و حاصل ضرب ریشههای معادله درجه دوم
۲۴	بخش چهارم: کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل
۲۷	بخش پنجم: معادلات شامل عبارتهای گویا
۸۹	پاسخ سؤالهای امتحانی

فصل دوم: تابع

۳۲	بخش اول: مفهوم زوج مرتب و رابطه
۳۴	بخش دوم: مفهوم تابع
۴۴	بخش سوم: توابع خطی (رسم نمودار و کاربرد روابط خطی در حل مسائل)
۴۸	بخش چهارم: توابع درجه دوم
۹۷	پاسخ سؤالهای امتحانی

فصل سوم: کار با دادههای آماری

۵۴	بخش اول: گردآوری دادهها
۶۰	بخش دوم: معیارهای گرایش به مرکز
۶۴	بخش سوم: معیارهای پراکندگی
۱۱۰	پاسخ سؤالهای امتحانی

فهرست

فصل چهارم: نمایش داده‌ها

۷۱	بخش اول: نمودارهای تک‌متغیره.....
۸۰	بخش دوم: نمودارهای چندمتغیره.....
۱۱۶	پاسخ سؤال‌های امتحانی.....

امتحانات

۱۲۳	نمونه امتحان نوبت اول (امتحان شماره ۱).....
۱۲۴	پاسخ نمونه امتحان نوبت اول (امتحان شماره ۱).....
۱۲۶	نمونه امتحان نوبت اول (امتحان شماره ۲).....
۱۲۷	پاسخ نمونه امتحان نوبت اول (امتحان شماره ۲).....
۱۲۹	نمونه امتحان نوبت دوم (امتحان شماره ۳).....
۱۳۱	پاسخ نمونه امتحان نوبت دوم (امتحان شماره ۳).....
۱۳۳	نمونه امتحان نوبت دوم (امتحان شماره ۴).....
۱۳۵	پاسخ نمونه امتحان نوبت دوم (امتحان شماره ۴).....
۱۳۷	نمونه امتحان نوبت دوم (امتحان شماره ۵).....
۱۳۹	پاسخ نمونه امتحان نوبت دوم (امتحان شماره ۵).....
۱۴۱	نمونه امتحان نوبت دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۳).....
۱۴۳	پاسخ نمونه امتحان نوبت دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۳).....

درسنامه 9 سوالات امتحانی

فصل صفر : عبارتهای جبری

فصل صفر، در واقع یادآوری مباحث مهمی از اتحادها، تجزیه به روشهای مختلف و عملیات جبری روی عبارتهای گویاست. این فصل در کتاب درسی ریاضی و آمار دهم وجود ندارد ولی بیشترین کاربرد را در فصلهای دیگر دارد و بهتر است قبل از شروع فصلهای اصلی کتاب مروری روی آن داشته باشید.

بخش ۱: اتحادهای جبری

قبل از شروع فصل جدید، بد نیست مروری بر اتحادهای خوانده شده در سال قبل داشته باشید:

اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

مثال: $(\overset{a}{\Delta x} + \overset{b}{2y})^2 = (\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(2y) + (2y)^2 = 2\Delta x^2 + 2 \cdot xy + 4y^2$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال: $(\overset{a}{x^2}y^2 - \overset{b}{2y})^2 = (x^2y^2)^2 - 2(x^2y^2)(2y) + (2y)^2 = x^4y^4 - 4x^2y^3 + 4y^2$

اتحاد مزدوج: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

مثال: $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{x})(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{x}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\sqrt{x})^2 = \frac{3}{4} - x$

اتحاد جمله مشترک در ساده‌ترین شکل خود: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

مثال: $(x + 6)(x + 3) = x^2 + (6 + 3)x + 6 \times 3 = x^2 + 9x + 18$

مثال: $(x - 8)(x + 1) = x^2 + (-8 + 1)x + (-8)(1) = x^2 - 7x - 8$

جملات غیرمشترک
اتحاد جمله مشترک در حالت کلی: $(\square + a)(\square + b) = \square^2 + \underbrace{(a + b)}_{\text{جمع}} \square + \underbrace{ab}_{\text{ضرب}}$
غیرمشترکها هر عبارتی می‌تواند باشد (عبارتی که در دو پرانتز تکرار می‌شود)

مثال: $(x^4 + 3y)(x^4 - 8y) = (x^4)^2 + (3y - 8y)x^4 + (3y)(-8y) = x^8 - 5yx^4 - 24y^2$

مثال: $(5x + 3)(5x + 6) = (5x)^2 + (3 + 6)(5x) + 3 \times 6 = 25x^2 + 45x + 18$

اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

مثال: $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = (\sqrt{2})^3 + 3(\sqrt{2})^2(\sqrt{5}) + 3(\sqrt{2})(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3 = \sqrt{8} + 6\sqrt{5} + 15\sqrt{2} + \sqrt{125}$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

مثال: $(2x - 5y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(5y) + 3(2x)(5y)^2 - (5y)^3 = 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$

این ۳ علامت همیشه یکی در میان عوض می‌شوند.
اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله‌ای: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = \underbrace{a^3}_{\text{مجموع مکعب دو جمله‌ای}} - \underbrace{b^3}_{\text{مجموع مکعب دو جمله‌ای}}$, $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = \underbrace{a^3}_{\text{مجموع مکعب دو جمله‌ای}} + \underbrace{b^3}_{\text{مجموع مکعب دو جمله‌ای}}$

مثال: $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 3^3 = x^3 + 27$

مثال: $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1$

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید تا اتحادها کامل شوند.

$$1 - (2a - 1)^2 = 4a^2 - \dots + 6a - \dots$$

$$2 - (\dots + \dots)^2 = 27x^2 + \dots + \dots + 8y^2$$

$$3 - (\dots - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2) = 4x^2 - \dots$$

$$4 - (2x + \sqrt{3})^2 = 4x^2 + \dots + \dots + 3\sqrt{3}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$5 - (3xy - 4y^2)^2$$

$$6 - (\sqrt{5} + 2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - 2\sqrt{3})^2$$

$$7 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$8 - (\sqrt{2} - 1)^3 - 2\sqrt{2} + 1$$

$$9 - (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^2 + 16)$$

$$10 - \left(\frac{2 - \sqrt{5}}{3}\right)^4$$

بخش ۲: تجزیه عبارت‌های جبری

منظور از تجزیه یک عبارت جبری این است که آن عبارت را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر با درجه کم‌تر تبدیل کنیم. منظور از درجه یک عبارت جبری، بیشترین توان متغیر آن عبارت است؛ مثلاً در عبارت $x^2 - 5x$ بیشترین توان x ، ۲ است، پس می‌گوییم درجه عبارت $(x^2 - 5x)$ برابر ۲ است ولی درجه عبارت $(3x - 2)$ برابر ۱ است. تجزیه یک عبارت جبری را به کمک فاکتورگیری و یا استفاده از اتحادها انجام می‌دهیم.

روش فاکتورگیری

اگر دو یا چند جمله که بینشان جمع یا تفریق است، دارای عامل مشترکی باشند، آن عامل را از دل آن جملات بیرون می‌کشیم؛ (مثلاً بین x^2 و x^3 ، عامل مشترک x^2 است و یا بین 10 و 18 عامل مشترک ۲ است.) حال چند عبارت را به روش فاکتورگیری تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{12ab^2}{3ab} = 4b$$

مثال: $3a^2b + 12ab^2 = 3ab(a + 4b)$

مثال: $(x - 3y)^2 - 5(x - 3y) = (x - 3y)[(x - 3y) - 5]$

$$\frac{3a^2b}{3ab} = a$$

عامل مشترک

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

اگر بین دو جمله (که حداقل یکی از آن‌ها مربع کامل است) علامت منفی وجود داشت، همیشه می‌توانیم برای تجزیه‌اش از اتحاد مزدوج یعنی $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ استفاده کنیم. دقت کنید که لزومی ندارد دو جمله داده شده مربع کامل باشند. به مثال‌های زیر دقت کنید: (یادتون هست که چی گفتیم عزیزان، لطفاً یکی دو تا مثال رو که با راه‌حل دیدین، بقیه رو فوتتون هل کنید.)

مثال: $x^2 - 64 = (x - 8)(x + 8)$

مثال: $(x - 1)^2 - 16 = [(x - 1) - 4][(x - 1) + 4] = (x - 5)(x + 3)$

مثال: $49x^2 - (x - 3)^2 = [7x - (x - 3)][7x + (x - 3)] = (6x + 3)(8x - 3)$

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

از این اتحاد وقتی استفاده می‌کنیم که ۳ جمله داشته باشیم و حداقل یکی از آن‌ها مربع کامل باشد؛ مثلاً فرض کنید می‌خواهیم عبارت $(x^2 - 15x + 44)$ را تجزیه کنیم. جذر x^2 می‌شود x ، این x در جمله وسط هم دیده می‌شود، پس جمله مشترک x است و فعلاً چنین می‌نویسیم که:

$$x^2 - 15x + 44 = (x \quad)(x \quad)$$

در این روش، اصلاً به علامت‌ها فکر نکنید. فعلاً به دنبال دو عدد بگردید که ضربشان ۴۴ و جمع یا تفریقشان ۱۵ شود، این دو عدد ۴ و ۱۱ هستند (همعشان می‌شود ۱۵ و ضربشان می‌شود ۴۴). یعنی تا این‌جا این‌طور می‌نویسیم:

$$x^2 - 15x + 44 = (x - 11)(x - 4)$$

حالا با یک نگاه به عددها می‌فهمیم که $-11 - 4 = -15$ و $(-11)(-4) = 44$ پس علامت هر دو پرانتز منفی خواهد بود و داریم:

$$x^2 - 15x + 44 = (x - 11)(x - 4)$$

مثال: عبارت $(x^2 + 3x - 40)$ را تجزیه کنید.

$$x^2 + 3x - 40 = (x - 8)(x + 5) \xrightarrow[\frac{8-5=3}{(8)(-5)=-40}]{\frac{8-5=3}{(8)(-5)=-40}} (x + 8)(x - 5)$$

پاسخ:

شاگرد؛ حالا آله به پای ۸ و ۵ دو عدد ۲۰ و ۲، رو انتقاب می‌کردیم، نمی‌شد؟

دیر؛ ببین ضرب ۲۰ و ۲، برابر ۴۰ می‌شه ولی جمع یا تفریقشون ۳ نمی‌شه. ۵ و ۸ رو به این علت انتقاب کردیم که ضربشون می‌شه ۴۰ و تفریقشون می‌شه ۳. برای علامت‌ها هم که به روش ساده گفتیم.

مثال: عبارت $(x^4 - 5x^2 + 4)$ را تا حد امکان تجزیه کنید.

پاسخ: جذر x^4 می شود x^2 که در جمله وسط هم دیده می شود، پس x^2 جمله مشترک است.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) \rightarrow \text{هر یک از پرانتزها خودشان اتحاد مزدوج هستند.} \rightarrow \text{عبارت} = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$$

یک حالت خاص در تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک: اگر یک سه جمله ای داشته باشیم که ضریب x^2 یا x^4 آن عددی مربع کامل باشد (مثل ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ و ...)، باید یک جمله مشترک از دل جملات اول و دوم ایجاد کنیم. به عنوان مثال می خواهیم عبارت $9x^2 - 9x - 10$ را تجزیه کنیم. $9x^2$ را می توان به شکل $(3x)^2$ نوشت (یا می توان گفت جذر $9x^2$ می شود $3x$)، پس جمله مشترک حتماً $(3x)$ است. حال در جمله دوم هم $(3x)$ ایجاد می کنیم. یعنی $9x$ را به شکل $3(3x)$ می نویسیم:

$$9x^2 - 9x - 10 = (3x)^2 - 3(3x) - 10$$

$3x$ جمله مشترک است.

حال دو عدد می خواهیم که ضربشان ۱۰ و جمع یا تفریقشان ۳ شود. این دو عدد ۵ و ۲ هستند، لذا به کمک اتحاد جمله مشترک خواهیم نوشت:

$$(3x - 5)(3x + 2) = \text{عبارت بالا}$$

مثال: عبارت $25x^2 + 5x - 6$ را تجزیه کنید.

پاسخ:

$$25x^2 + 5x - 6 = (\Delta x)^2 + 1(\Delta x) - 6 = (\Delta x + 3)(\Delta x - 2)$$

Δx جمله مشترک است.

نکته: در یک سه جمله ای، اگر ضریب x^2 یا x^4 عدد یک یا عدد مربع کامل نبود، کل عبارت را در آن عدد، ضرب و تقسیم می کنیم، سپس با عملیاتی ساده که انجام می دهیم، صورت کسر را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم. مثلاً:

$$3x^2 + 11x - 4 = \frac{3(3x^2 + 11x - 4)}{3} = \frac{(3x)^2 + 11(3x) - 12}{3}$$

در صورت کسر $3x$ دو بار تکرار شده، پس جمله مشترک است. حال به دنبال دو عدد می گردیم که ضربشان ۱۲ و جمع یا تفریقشان ۱۱ شود. این دو عدد ۱۲ و ۱ هستند. پس خواهیم داشت:

از ۳ فاکتور گرفته ایم

$$\text{عبارت بالا} \Rightarrow \text{ادامه تجزیه} = \frac{(3x+12)(3x-1)}{3} = \frac{3(x+4)(3x-1)}{3} = (x+4)(3x-1)$$

از ۲ فاکتور گرفته ایم.

$$2x^2 - 5x - 3 = \frac{2(2x^2 - 5x - 3)}{2} = \frac{(2x)^2 - 5(2x) - 6}{2} = \frac{(2x-6)(2x+1)}{2} = \frac{2(x-3)(2x+1)}{2} = (x-3)(2x+1)$$

تذکر: به این روش تجزیه، روش A نیز گفته می شود. (البته در کتاب درسی، اشاره ای به این روش نشده ولی بعداً ممکنه به دردتون بخوره، مفصلاً در کنکور.)

تجزیه به کمک اتحادهای مربع دوجمله ای

اگر یک سه جمله ای به شکل $a^2 + 2ab + b^2$ باشد، تجزیه شده آن برابر با $(a+b)^2$ می شود و اگر به شکل $a^2 - 2ab + b^2$ باشد، تجزیه شده آن $(a-b)^2$ خواهد شد. به عبارت ساده تر دو جمله مربع کامل داریم (a^2, b^2) که علامت پشتشان همیشه مثبت است و ضمناً جمله سوم که برابر با دو برابر ضرب جذرهای a^2 و b^2 است، به شکل $+2ab$ یا $-2ab$ می باشد.

مثال: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

جذر x^2 x ، جذر 9 3 ، دو برابر ضرب جذرها $2(x)(3)=6x$

به $6x$ رسیدیم که در عبارت اصلی وجود دارد لذا اتحاد مربع دوجمله ای است.

مثال: $25x^2 + 30xy + 9y^2 = (\Delta x + 3y)^2$

جذر $25x^2$ $5x$ ، جذر $9y^2$ $3y$ ، دو برابر ضرب جذرها $2(5x)(3y)=30xy$

مثال: عبارت $n^4 - 10n^2 + 25$ را تجزیه کنید.

پاسخ:

$$n^4 - 10n^2 + 25 = (n^2 - 5)^2$$

جذر n^4 n^2 ، جذر 25 5 ، دو برابر ضرب جذرهاست.

شاگرد، حالا که جواب دو برابر ضرب جذرها، در عبارت اصلی وجود نداشته چی؟

دیر، اون وقت دیگه اتحاد مربع دوجمله ای نداریم و حتماً باید از اتحاد جمله مشترک استفاده کنیم.

تجزیه به کمک اتحادهای چاق و لاغر

اگر یک عبارت جبری شامل دو جمله مکعب کامل باشد که بین آنها جمع یا تفریق است، از اتحادهای چاق و لاغر به منظور تجزیه آن عبارت استفاده می کنیم. (جمله مکعب کامل جمله ای که توانش مضرب ۳ باشد؛ مثل x^3 ، x^6 ، x^9 و یا 27 ، چون $27 = 3^3$ ، ضمناً عدد ۱ رو هم می توانیم مکعب کامل فرض کنیم چون $1 = 1^3$).



اگر اتحادهای چاق و لاغر را که قبلاً داشتیم از راست به چپ بخوانیم، به فرمول‌های مقابل می‌رسیم:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

مخالف موافق
مخالف موافق

حال چند عبارت جبری را با هم تجزیه می‌کنیم:

مثال: $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x^2 + x \times 1 + 1^2) = (x-1)(x^2 + x + 1)$

مثال: $27x^3 + \frac{y^3}{125} = (3x)^3 + \left(\frac{y}{5}\right)^3 = (3x + \frac{y}{5})((3x)^2 - (3x)(\frac{y}{5}) + (\frac{y}{5})^2) = (3x + \frac{y}{5})(9x^2 - \frac{3xy}{5} + \frac{y^2}{25})$

تجزیه به کمک اتحادهای مکعب دوجمله‌ای

اگر عبارتی به شکل $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ دیدید، تجزیه‌شده‌اش می‌شود: $(a+b)^3$ و اگر عبارتی به شکل $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ مشاهده کردید، تجزیه‌شده‌اش می‌شود: $(a-b)^3$. یعنی دو جمله مکعب کامل داریم (a^3 و b^3) و دو جمله مضرب ۳، $3a^2b$ و $3ab^2$ حال دو عبارت را به کمک این اتحادها تجزیه می‌کنیم:

مثال: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = ?$

در این جا x^3 و 1^3 دو جمله مکعب کامل ما هستند و $3x^2$ و $3x$ دو جمله مضرب ۳ و این عبارت در اصل چنین بوده است:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 \times 1 + 3x \times 1^2 + 1^3 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ a \quad \quad \quad 3a^2b \quad \quad \quad 3ab^2 \quad \quad \quad b \end{aligned}$$

پس جوابش به صورت $(a+b)^3$ است، یعنی: $(x+1)^3$.

تجزیه به کمک روش دسته‌بندی جملات

گاهی اوقات اگر یک عبارت را به صورت کلی و یک‌جا نگاه کنیم، به کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه نمی‌شود، ولی با یک دسته‌بندی مناسب می‌توانیم آن را تجزیه کنیم. مثلاً عبارت $(x^3 - xy^2 + x^2y - y^3)$ را در نظر بگیرید:

$$\underbrace{(x^3 - xy^2)}_{\text{فاکتور از } x} + \underbrace{(x^2y - y^3)}_{\text{فاکتور از } y} = \underbrace{x(x^2 - y^2)}_{\text{فاکتور از } (x^2 - y^2)} + y(x^2 - y^2) = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}} (x+y) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)$$

مثال: عبارت $x^2 + 4x + 4 - y^2$ را به کمک روش دسته‌بندی تجزیه کنید.

پاسخ: عبارت $(x^2 + 4x + 4)$ اتحاد مربع دوجمله‌ای است و حاصل آن برابر با $(x+2)^2$ می‌شود، لذا:

$$\text{عبارت اصلی} = (x+2)^2 - y^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \text{عبارت اصلی} = [(x+2) - y][(x+2) + y] = (x+2-y)(x+2+y)$$

محاسبه ک.م.م عبارت‌های جبری

ک.م.م مخفف کوچک‌ترین مضرب مشترک است. می‌دانید ک.م.م دو عدد ۲ و ۵ برابر ۱۰ است، یعنی عدد ۱۰ کوچک‌ترین عددی است که هم بر ۲ و هم بر ۵ بخش‌پذیر است (بقیه عددهایی که بر ۲ و ۵ بخش‌پذیر باشند، همگی از ۱۰ بزرگ‌ترند، مثل ۲۰ و ۳۰ و ...). در حالت کلی برای محاسبه ک.م.م دو عدد اول، ابتدا باید آن‌ها را به صورت ضرب توان‌دار مضارب اول بنویسیم و در نهایت: **غیرمشترک‌ها × مشترک‌ها با بزرگ‌ترین توان = ک.م.م دو عدد.**

مثلاً ک.م.م دو عدد ۳۶ و ۵۶ برابر است با:

$$36 = 2^2 \times 3^2 \Rightarrow [36, 56] = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

$$56 = 2^3 \times 7$$

حالا می‌خواهیم در مورد ک.م.م عبارت‌های جبری صحبت کنیم. مثلاً ک.م.م $(x-1)$ و $(x-2)$ برابر $(x-1)(x-2)$ است؛ یعنی این عبارت، کوچک‌ترین عبارتی است که هم بر $(x-1)$ و هم بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است.

برای محاسبه ک.م.م دو یا چند عبارت جبری ابتدا آن‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم. ک.م.م این عبارت‌ها برابر است با **حاصل ضرب عامل‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارت‌های غیرمشترک**. به عنوان نمونه می‌خواهیم ک.م.م عبارت‌های $a^4 + 2a^3 - 3a^2$ و $a^4 + 8a^3 + 15a^2$ را محاسبه کنیم:

$$\left. \begin{aligned} a^4 + 2a^3 - 3a^2 &= a^2(a^2 + 2a - 3) = a^2(a+3)(a-1) \\ a^4 + 8a^3 + 15a^2 &= a^2(a^2 + 8a + 15) = a^2(a+5)(a+3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = a^2(a+3)(a-1)(a+5)$$

فاکتور از a^2 اتحاد جمله مشترک عوامل غیرمشترک عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر

مثال: ک.م.م دو عبارت $x^3 - 7x^2 + 10x$ و $5x^3(x^2 - 25)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\left. \begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 10x &= x(x^2 - 7x + 10) = x(x-5)(x-2) \\ 5x^3(x^2 - 25) &= 5x^3(x-5)(x+5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = 5x^3(x-5)(x-2)(x+5)$$

فاکتور از x اتحاد جمله مشترک اتحاد مزدوج

عبارت‌های زیر را تا حد امکان تجزیه کنید:

$$13 - y^2 - 4y - 12$$

$$16 - 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$19 - 24x^2(x^2 + 5) - 20x^2(x^2 + 5)^2$$

عبارت‌های زیر را تا حد امکان تجزیه کنید.

$$22 - 1 - (3a + z)^2$$

$$25 - (x^2 + (a + b)x + ab)(x - a)(x - b)$$

$$28 - x^4 + 2x^3 - x - 2$$

$$12 - x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}$$

$$15 - 25x^2 + 25x + 6$$

$$18 - 27 - t^6$$

$$21 - x^2y^2 - 4xy + 4$$

$$24 - x^{16} - 16$$

$$27 - 3x^2 - 11x + 10$$

(مشابه تمرینات کتاب درسی)

$$11 - 25x^2 - 10x + 1$$

$$14 - 9x^2 + 18x + 8$$

$$17 - 8a^3 - 1$$

$$20 - 25x^4 + 30x^3 + 9x^2$$

$$23 - (2x + 1)^2 - (3x + 4)^2$$

$$26 - x^3 + 27$$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

$$29 - a^2 - b^2, a^4 - b^4$$

$$32 - 10x - 10, x^2 - 3x + 2, 2x^2 - 2$$

$$30 - x^3 - x^2 - 6x, x^5 - 81x$$

$$31 - (x - 1)^3, x^3 - 1$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) عبارت‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

۳۳- اگر $4a^2 - b^2 = 91$ و $2a + b = 7$ باشند، مقادیر a و b را به دست آورید.

۳۴- اگر $a - b = -7$ و $b^2 - a^2 = 77$ باشند، مقدار $(a + b)^2$ را به دست آورید.

۳۵- اگر $x^2 + y^2 = 2xy$ باشد، حاصل $\frac{x^2 + y^2}{3x^2 - y^2}$ را محاسبه کنید.

۳۶- اگر $a + 2b = 3$ باشد، حاصل $a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab$ را به دست آورید.

بخش ۳: عبارت‌های گویا

تعریف عبارت‌های گویا

هر کسری که صورت و مخرج آن، دو چندجمله‌ای باشند، عبارت گویا نام دارد. مثلاً عبارت‌های $\frac{1}{x}$ و $\frac{3x^2 - 7x}{x^5 - 1}$ و $\frac{\sqrt{2x + 6}}{7}$ گویا هستند. ولی عبارت‌های $\frac{\sqrt{x}}{y + z}$ و $\frac{|x|}{3x - 1}$ گویا نیستند؛ چون در کسر اول x زیر رادیکال است و در کسر دوم x داخل قدرمطلق قرار دارد.

نکته: یک عبارت گویا فقط وقتی با معنی (تعریف‌شده) است که مخرجش صفر نباشد؛ چون می‌دانید که حاصل هر کسر به صورت $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ تعریف نشده است. مثلاً کسر $\frac{x - 2}{x^2 - 9}$ به ازای $x = \pm 3$ تعریف نشده است؛ چون $+3$ و -3 مخرج این کسر را به صفر تبدیل می‌کنند.

پس اگر بخواهیم ببینیم که یک عبارت گویا به ازای چه مقدار یا مقادیری تعریف نشده، کافی است مخرج آن را مساوی صفر قرار داده و معادله حاصل را حل کنیم.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام یک غیر گویا هستند؟ سپس مشخص کنید عبارت‌های گویا به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

$$\frac{k^2 + 6}{k^2 - 100} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{5x^3 - 7x + 1}{3\sqrt{2}} \quad (\text{پ})$$

$$\frac{x^2 - 4x}{|x| + 2} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{10t^2 - 3}{4t - 1} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{x^2}{(2x - 1)(4 - x)} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{7x^2 + 10}{x^2 + 1} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{3x\sqrt{x} + 8}{5 - 2x} \quad (\text{ث})$$

پاسخ: فقط قسمت‌های **ب** و **ث** گویا نیستند؛ چون متغیر در آن‌ها به ترتیب داخل قدرمطلق و زیر رادیکال است. حال در عبارت‌های گویا مخرج‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه یا ریشه‌های آن‌ها پیدا شود:

$$\text{الف} \quad \text{مخرج} = 0 \Rightarrow 4t - 1 = 0 \Rightarrow 4t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

در قسمت **ب** متغیر در مخرج وجود ندارد، پس هیچ عددی پیدا نمی‌شود که مخرج را صفر کند.

$$\text{ت} \quad \text{مخرج} = 0 \Rightarrow k^2 - 100 = 0 \Rightarrow k^2 = 100 \xrightarrow{\text{جذر}} k = \pm 10$$

$$\text{ث} \quad \text{مخرج} = 0 \Rightarrow 5 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{ج} \quad \text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$$

حاصل x^2 همیشه نامنفی است؛ پس نمی‌تواند با (-1) برابر باشد، در نتیجه این معادله جواب ندارد. یعنی به ازای هیچ مقداری مخرج صفر نمی‌شود، کسر همواره تعریف‌شده است.

$$\text{ج} \quad \text{مخرج} = 0 \Rightarrow (2x - 1)(4 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

برای ساده کردن یک عبارت گویا، صورت و مخرج را تا حد امکان به کمک فاکتورگیری و یا اتحادها تجزیه می کنیم. (پس باید به اتحادها تسلط کافی داشته باشید). سپس عاملهای مشترک را از صورت و مخرج خط می زنیم. (البته همیشه فرض بر این هست که حاصل این عامل یا عاملهای مشترک صفر نیست). به عنوان مثال می خواهیم کسرهایی زیر را ساده کنیم:

مثال:
$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$$

 اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

مثال:
$$\frac{x^3 - 1}{x^3 - x} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}$$

 اتحاد چاق و لاغر فاکتور از x اتحاد مزدوج

مثال:
$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x(x+1)(x^2 - 4)} = \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}$$

 فاکتور از x اتحاد جمله مشترک اتحاد مزدوج

تذکره ۱: دقت کنید عامل یا عاملهای مشترک از صورت و مخرج را فقط وقتی می توانیم با هم خط بزنیم که بین عبارت ها ضرب باشد؛ مثلاً در کسر $\frac{5x^3 + y^2}{y^2}$ نمی توانیم y^2 ها را با هم خط بزنیم، چون بین y^2 و $5x^3$ علامت ضرب وجود ندارد.

تذکره ۲: اگر در یک سؤال گفته شود که یک عبارت گویا به ازای چه مقدار یا مقادیری از متغیر، تعریف نشده است، مجاز به ساده کردن صورت و مخرج نیستیم؛ مثلاً می خواهیم ببینیم به ازای چه مقادیر از x کسر $\frac{x^2 - 25}{x^2 + x - 30}$ تعریف نشده است. الان اگر صورت و مخرج را تجزیه کنیم، عامل $(x - 5)$ در آنها مشترک است $\left(\frac{(x-5)(x+5)}{(x+6)(x-5)}\right)$ ولی نباید این عامل را خط بزنیم؛ بلکه فقط کافی است مخرج را مساوی صفر قرار دهیم:

مخرج = 0 $\Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+6)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+6=0 \Rightarrow x=-6 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$

ضرب و تقسیم عبارتهای گویا

برای انجام عمل ضرب یا تقسیم عبارتهای گویا، ابتدا تمام صورت و مخرجها را تجزیه کنید. (البته آنگاه قابل تهزیه بودن) سپس صورتها را با مخرجها تا حد امکان ساده کنید. (ضمناً می دونید که $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$)

مثال:
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} \div \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 4x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)} \times \frac{2x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 2$$

 اتحاد جمله مشترک اتحاد جمله مشترک فاکتور از x فاکتور از 2x

مثال:
$$\left(1 - \frac{6}{x+2}\right) \times \left(\frac{5x-2}{x-4} + x\right) = \frac{x+2-6}{x+2} \times \frac{5x-2+x(x-4)}{x-4} = \frac{x-4}{x+2} \times \frac{x^2+x-2}{x-4} = \frac{x-4}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x-4} = x-1$$

 مخرج مشترک مخرج مشترک می گیریم می گیریم

جمع و تفریق عبارتهای گویا

برای انجام عمل جمع یا تفریق عبارتهای گویا، ابتدا تمام صورت و مخرجها را تا حد امکان تجزیه می کنیم. سپس اگر صورت هر کسر با مخرج همان کسر قابل ساده شدن بود، عاملهای مشترک را خط می زنیم و در نهایت بین کسرها مخرج مشترک می گیریم. (مخرج مشترک، همان ک.م.م. مخرجهاست.) به عنوان مثال می خواهیم جمع و تفریقهای زیر را انجام دهیم:

مثال:
$$\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-2} = \frac{3(x-2) + 4(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{7x+2}{(x+2)(x-2)}$$

 ک.م.م. مخرجها

مثال:
$$\frac{4}{x^2+x} - \frac{x}{x^2-1} = \frac{4}{x(x+1)} - \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{4(x-1) - x(x)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{4x-4-x^2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{-x^2+4x-4}{x(x+1)(x-1)}$$

 اتحاد مربع دو جمله ای ک.م.م. مخرجها

$$= \frac{-(x^2 - 4x + 4)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{-(x-2)^2}{x(x+1)(x-1)}$$

شاگرد؛ استاد چرا در $(-x^2 + 4x - 4)$ از منفی فاکتور گرفتیم؟

دبیر؛ چون ضریب x^2 منفی بود و نمی توانستیم عبارت رو تهزیه کنیم. ضمناً دقت کن وقتی از منفی فاکتور می گیری، همه علامتها عوض می شن.

عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$$۳۷- \frac{3x+4}{x^2-1}$$

$$۳۸- \frac{5x}{x^2+16}$$

$$۳۹- \frac{10x^2+3x}{x^2+5x}$$

$$۴۰- \frac{x^6+x^3+2x}{x(x+3)(x^2-36)}$$

$$۴۱- \frac{5x^2y+4xy^2}{x^2}$$

$$۴۲- \frac{15a^6-14a^4m^2}{am^2-4a}$$

$$۴۳- \frac{2b^2x^3-a^3b^2x^4}{a^2b^2x^3-a^4b^2x^2}$$

$$۴۴- \frac{y^2-x^6}{ax^3-a^3x}$$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

$$\text{الف) } \frac{x^3-2x}{x^3-16x}$$

$$\text{ب) } \frac{5x+1}{(x^2+3)(x^2-1)}$$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

$$\text{الف) } \frac{3x}{x-3} = \frac{\square}{x^2-x-6}$$

۴۶- در هر قسمت، مقدار مناسب را برای $\square$ به دست آورید.

$$\text{ب) } \frac{(x-5)(\square)}{x^2-7x+10} = x+1$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$$۴۷- \frac{4x^2-9}{4x^2+10x+6}$$

$$۴۸- \frac{x^6-8x}{2x^2-8x+8}$$

$$۴۹- \frac{6x^5(x^2+4)^2-4x^3(x^2+4)^3}{x^8-16x^6}$$

$$۵۰- \frac{42a^3-30a^2m}{35am^2-25m^3a}$$

$$۵۱- \frac{b^2x^4-ab^2x^3}{a^2b^2x^2-a^2b^2x}$$

$$۵۲- \frac{x^6-a^6}{ax^3-a^3x}$$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

عبارت‌های گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید:

$$۵۳- \text{حاصل عبارت } \frac{a^2+2a}{a^2-4} + \frac{4-a}{2-a} \text{ برابر با کدام است؟}$$

- ۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$$۵۵- \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$$

$$۵۶- \frac{1}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} + \frac{x+2}{x-2}$$

$$۵۷- \frac{y-3}{y^2-4} - \frac{y+2}{y^2-4y+4} - \frac{2}{2-y}$$

$$۵۸- \frac{\frac{1}{k}+1}{\frac{1}{k}-1}$$

$$۵۹- \frac{4}{9x^2} - \frac{5x}{6y^2} + 1$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$$۶۰- \frac{a^2-4a-5}{a^2-4a} \div \frac{a^2+3a+2}{a-4}$$

$$۶۱- \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{2}{x+y} + \frac{3}{5}$$

$$۶۲- \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8}$$

$$۶۳- \left(\frac{x^2+1}{x+2} - 2 \right) \div \frac{x+1}{x^2+2x}$$

$$۶۴- (2a-1)^{-2} \div \frac{4a^2+4a+1}{4a^2-1}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

$$۵۴- \text{اگر } \frac{ax^2-ax}{4x} \times \frac{3x+6}{x^2+x-2} = 6 \text{ باشد، مقدار } a \text{ را به دست آورید.}$$

پاسخ نامہ تشریحی

۱. $(2a-1)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(1) + (1)^2 = 4a^2 - 4a + 1$

۲. می‌دانیم که $27x^3 = (3x)^3$ و $8y^3 = (2y)^3$ پس در اتحاد $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ به جای a مقدار $3x$ و به جای b مقدار $2y$ را قرار می‌دهیم:

$(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 + (2y)^3$
 $= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

۳. یک دوجمله‌ای در یک سه‌جمله‌ای ضرب شده، پس حتماً اتحاد چاق و لاغر خواهد بود. در سمت راست $8x^3 = (2x)^3$ مشاهده می‌شود و در سمت چپ در پرانتز اول $5y$ می‌بینیم. لذا در اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ به جای a مقدار $2x$ و به جای b مقدار $5y$ قرار می‌دهیم و چنین می‌نویسیم:

$(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2) = (2x)^3 - (5y)^3 = 8x^3 - 125y^3$

۴. $(2x+\sqrt{3})^2 = (2x)^2 + 2(2x)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = 4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3$
 $= 4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3$

۵. $(3xy-4y^2)^2 = (3xy)^2 - 2(3xy)(4y^2) + (4y^2)^2$
 $= 9x^2y^2 - 24xy^3 + 16y^4$

۶. $(\sqrt{5}+2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}-2\sqrt{3})^2$
 اتحاد $(a+b)^2$ اتحاد $(a-b)^2$
 $= (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{5})(2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2$
 جواب عبارت دوم جواب عبارت اول
 $= 5 + 4\sqrt{15} + 12 + 5 - 4\sqrt{15} + 12 = 34$

۷. می‌روئیم که: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

۸. $(\sqrt{2}-1)^2 - 2\sqrt{2} + 1$
 اتحاد مکعب
 $= (\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})(1) + (1)^2 - 2\sqrt{2} + 1 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 4\sqrt{2}$
 حاصل اتحاد

۹. دوبه‌دو از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:
 $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$
 مزدوج مزدوج
 $= (x^2-4)(x^2+4)(x^4+16) = (x^4-16)(x^4+16)$
 مزدوج مزدوج
 $= (x^8-16^2)$

۱۰. ابتدا $(\frac{2-\sqrt{5}}{3})^2$ را حل کرده سپس حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم:

$(\frac{2-\sqrt{5}}{3})^2 \xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} \frac{(4+5-4\sqrt{5})}{9}$

$(\frac{9-4\sqrt{5}}{9})^2 \xrightarrow{\text{مربع دوجمله‌ای}} \frac{81+80-72\sqrt{5}}{81} = \frac{161-72\sqrt{5}}{81}$

۱۱. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \Rightarrow 25x^2 - 10x + 1 = (\Delta x - 1)^2$
 جذر جذر
 ۱ برابر ضرب جذرهاست.

۱۲. $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} = (x + \frac{1}{3})^2$
 جذر جذر
 ۱/۳ برابر ضرب جذرهاست.

۱۳. $y^2 - 4y - 12 = (y-6)(y+2)$
 اتحاد جمله مشترک

۱۴. $9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6(3x) + 8 = (3x+4)(3x+2)$
 اتحاد جمله مشترک

۱۵. $25x^2 + 25x + 6 = (\Delta x)^2 + 5(\Delta x) + 6 = (\Delta x + 3)(\Delta x + 2)$
 اتحاد جمله مشترک

۱۶. $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x-3y)^2$
 جذر جذر
 ۲ برابر ضرب جذرهاست.

۱۷. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \Rightarrow 8a^3 - 1 = (2a)^3 - 1^3$
 a b

$= (2a-1)((2a)^2 + (2a)(1) + 1^2) = (2a-1)(4a^2 + 2a + 1)$

۱۸. باید توان ۳ ایجاد کنیم تا بتوانیم از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم. پس t^6

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ می‌نویسیم:

$\Rightarrow 27 - t^6 = 3^3 - (t^2)^3 = (3-t^2)(3^2 + 3t^2 + (t^2)^2)$
 a b

$= (3-t^2)(9+3t^2+t^4)$

۱۹. $24x^6(x^2+\Delta)^2 - 20x^4(x^2+\Delta)^2$
 فاکتورگیری از عوامل مشترک

$= 4x^4(x^2+\Delta)^2(6x^2 - 5(x^2+\Delta)) = 4x^4(x^2+\Delta)^2(6x^2 - 5x^2 - 5\Delta)$

$= 4x^4(x^2+\Delta)^2(x^2-5\Delta) = 4x^4(x^2+\Delta)^2(x-\Delta)(x+\Delta)$
 اتحاد مزدوج

۲۰. $25x^4 + 30x^3 + 9x^2 = x^2(25x^2 + 30x + 9) = x^2(\Delta x + 3)^2$
 اتحاد مربع دوجمله‌ای
 فاکتور از x^2 جذر جذر

۲۱. $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2$
 اتحاد مربع دوجمله‌ای
 جذر جذر

۲۲. باز هم عدد ۱ را مشاهده می‌کنیم، پس به ۱ باید توان عدد یا عبارت کنارش را بدهیم. عبارت کنار ۱ به صورت $(3a+z)^2$ است، یعنی توان ۲ دارد، پس به ۱ هم توان ۲ می‌دهیم: $1 - (3a+z)^2 = 1^2 - (3a+z)^2 = [1 - (3a+z)][1 + (3a+z)]$
 اتحاد مزدوج

$= (1-3a-z)(1+3a+z)$

۲۳. $(2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(2x+1) - (3x+4)][(2x+1) + (3x+4)]$
 اتحاد مزدوج

$= (-x-3)(\Delta x + \Delta) = -(x+3)\Delta(x+1) = -\Delta(x+3)(x+1)$
 فاکتور از Δ فاکتور از منفی



$$b^2 - a^2 = 77 \Rightarrow (b-a)(b+a) = 77 \Rightarrow 7(b+a) = 77 \quad \text{۳۴}$$

اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow b+a = \frac{77}{7} = 11 \Rightarrow (a+b)^2 = 11^2 = 121$$

تذکر: دقت کنید وقتی که $a-b = -7$ است، نتیجه می گیریم که: $b-a=7$

$$x^2 + y^2 = 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \quad \text{۳۵}$$

اتحاد مربع دو جمله ای

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x-y=0 \Rightarrow x=y$$

حال در کسر داده شده هر جا x دیدیم به جایش y قرار می دهیم:

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{3x^2 - y^2} = \frac{y^2 + y^2}{3y^2 - y^2} = \frac{2y^2}{2y^2} = 1$$

۳۶

این ۲ جمله را هم یک دسته فرض می کنیم.

$$a(a+2) + 4b(b+1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$$

این سه جمله را یک دسته فرض می کنیم.

$$= (a^2 + 4ab + 4b^2) + (2a + 4b) = (a+2b)^2 + 2(a+2b)$$

اتحاد مربع ۲ جمله ای فاکتور از ۲

$$= 3^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15$$

۳۷ فقط کافی است مخرج ها را مساوی صفر قرار دهیم تا معلوم شود عبارت های گویای مورد نظر، به ازای چه مقادیری از متغیرها، تعریف نشده اند:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm 1$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16 \quad \text{۳۸}$$

(جواب ندارد)

عبارت های گویای مورد نظر، به همواره تعریف شده است.

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 5x}{\text{فاکتور از } x} = 0 \Rightarrow x(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases} \quad \text{۳۹}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x(x+3)(x^2-36) = 0 \quad \text{۴۰}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x^2-36=0 \Rightarrow x^2=36 \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm 6 \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر}} x = 0 \quad \text{۴۱}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \frac{am^2 - 4a}{\text{فاکتور از } a} = 0$$

$$\Rightarrow a(m^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2 \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow a^3 b^2 x^3 - a^4 b^2 x^2 = 0 \quad \text{۴۳}$$

$$\Rightarrow a^3 b^2 x^2 (x-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x-a = 0 \Rightarrow x = a \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \frac{ax^3 - a^2 x}{\text{فاکتور از } ax} = 0 \Rightarrow ax(x^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ x = 0 \\ x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm a \end{cases}$$

اتحاد مزدوج

$$x^{16} - 16 = (x^4 - 4)(x^4 + 4) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^4 + 4) \quad \text{۲۴}$$

فاکتور از x^4 اتحاد مزدوج

$$(x^2 + (a+b)x + ab)(x-a)(x-b) = (x+a)(x+b)(x-a)(x-b) \quad \text{۲۵}$$

اتحاد جمله مشترک

$$x^2 + 27 = x^2 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9) \quad \text{۲۶}$$

اتحاد جاقی و لاغر

$$\frac{3x^2 - 11x + 10}{3} = \frac{2(3x^2 - 11x + 10)}{3} = \frac{(3x-2)(3x-5)}{3} = \frac{(3x-6)(3x-5)}{3} = \frac{2(3x-2)(3x-5)}{3} = (x-2)(3x-5) \quad \text{۲۷}$$

روش A اتحاد جمله مشترک

$$\frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2}{x^2} = \frac{x^2(x^2 + 2) - (x^2 + 2)}{x^2} = \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 1)}{x^2} \quad \text{۲۸}$$

روش دسته بندی فاکتور از x^2 فاکتور از $x^2 + 2$ اتحاد جاقی و لاغر

$$\begin{aligned} &= (x+2)(x-1)(x^2 + x + 1) \\ &\left. \begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2) \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \end{aligned} \right\} \quad \text{۲۹} \end{aligned}$$

اتحاد مزدوج دوباره اتحاد مزدوج اتحاد جاقی و لاغر

$$\Rightarrow (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^5 - 81x}{x} &= x(x^4 - 81) = x(x^2 - 9)(x^2 + 9) \\ &= x(x-3)(x+3)(x^2 + 9) \\ \frac{x^3 - x^2 - 6x}{x} &= x(x^2 - x - 6) = x(x-3)(x+2) \end{aligned} \right\} \quad \text{۳۰}$$

فاکتور از x اتحاد مزدوج دوباره مزدوج اتحاد جمله مشترک فاکتور از x

$$\Rightarrow \text{م.م.م} = \frac{x(x-3)(x+3)(x^2+9)(x+2)}{\text{عوامل مشترک} \quad \text{عوامل غیر مشترک}}$$

با توان بیشتر با توان کوچک تر

$$\frac{x^2 - 1}{\text{اتحاد}} = (x-1)(x^2 + x + 1) \quad \text{۳۱}$$

در عبارت $(x-1)^2$ کل پرانتز دارای توان است، پس نیازی به تجزیه ندارد. (داخل پرانتز هم که دیگه تجزیه نمی شود.)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x-1)^2 (x^2 + x + 1) \quad \text{م.م.م} \\ &\left. \begin{aligned} 2x^2 - 2 &= 2(x^2 - 1) = 2(x-1)(x+1) \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{\text{اتحاد مزدوج}} &= (x-2)(x-1) \\ \frac{10x - 10}{\text{فاکتور از } 10} &= 10(x-1) \end{aligned} \right\} \quad \text{۳۲} \end{aligned}$$

فاکتور از ۲ اتحاد مزدوج اتحاد جمله مشترک

$$\Rightarrow \text{م.م.م} = 10(x-1)(x+1)(x-2)$$

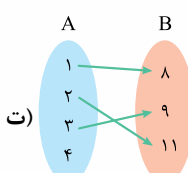
$$\frac{4a^2 - b^2}{\text{اتحاد مزدوج}} = 91 \Rightarrow (2a-b)(2a+b) = 91 \quad \text{۳۳}$$

$$\Rightarrow 2a-b = \frac{91}{2} = 45.5 \Rightarrow 2a-b = 13 \quad \oplus \quad \begin{cases} 2a-b = 13 \\ 2a+b = 7 \end{cases}$$

$$4a = 20 \Rightarrow a = \frac{20}{4} = 5 \xrightarrow{\text{جای گذاری در یکی از معادلات}} 2(5) + b = 7 \Rightarrow b = 7 - 10 = -3$$

آزمون‌های نوبت اوّل دوم 9



نمونه امتحان نوبت اول	رشته ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار ۱	نمونه امتحان نوبت اول
ردیف	امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	Kheilisabz.com نمره
۱	جاهای خالی را با اعداد یا عبارتهای مناسب پر کنید. الف) در تابع $f(t) = \frac{5t-1}{2t}$ ، متغیر مستقل و متغیر وابسته است. ب) معادلهای که ریشههای آن -1 و $\frac{1}{4}$ است به صورت نوشته می شود. پ) اگر $R = \{(1,5)(a,-1)(1,2a-1)(-1,2)(3,b)\}$ یک تابع باشد، آن گاه $a+b$ برابر است. ت) $(\dots + x^2)^2 = 4y^2 + \dots + \dots$	۱/۵	
۲	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) رابطه ای که به هر فرد رنگ مورد علاقه او را نسبت می دهد یک تابع است. ب) اتحادی که به فرم $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ باشد، اتحاد مزدوج نام دارد. پ) وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم، نسبت (تقسیم) تغییر عرض ها به تغییر طول ها را شیب آن خط می گوییم.	۰/۷۵	
۳	گزینه درست را انتخاب کنید. پدری ۴۰ سال دارد. دو فرزند او ۱۰ و ۱۲ ساله هستند. پس از چند سال سن پدر با مجموع سن فرزندان برابر می شود؟ ۱۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴)	۰/۵	
۴	معادلات زیر را به روش های خواسته شده حل کنید: (روش کلی یا دل) $x^2 - 10x - 3 = 0$ ت) $x^2 - 7x - 44 = 0$ پ) $x^2 + 2x - 6 = 0$ (مربع کامل) ب) $3x^2 = 7x$ (تجزیه) الف)	۲/۵	
۵	کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار k همواره دارای جواب های حقیقی است؟ الف) $x^2 + kx - 4 = 0$ ب) $x^2 - 3x + k = 0$	۰/۵	
۶	معادله درجه دومی بنویسید که ریشه مضاعف ۵ داشته باشد.	۱	
۷	در یک کارخانه فولاد، از روز یکشنبه، تولید هر روز نسبت به روز قبل ۳ برابر می شود. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به عدد ۱۶۲ هزار تن رسیده است. مجموع تولید در این پنج روز چه قدر بوده است؟ (اولین روز کاری، شنبه است).	۱	
۸	بدون حل معادله $5x^2 + 10x - 1 = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه های آن را به دست آورید.	۱	
۹	حاصل جمع عددی با مربعش برابر ۲۰ است. با تشکیل یک معادله، این عدد را پیدا کنید. (مسئله چند جواب دارد؟)	۱	
۱۰	معادله گویای مقابل را حل کنید. $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$	۱	
۱۱	تابع بودن یا نبودن هر یک از رابطه های زیر را بررسی کنید: الف) $F = \{(10,20), (11,30), (21,40)\}$ ب) $y^2 + x^2 = 1$ ت) 	۲	
۱۲	قسمتی از تابع f به صورت جدول مقابل است: برای f یک ضابطه مناسب بر حسب x بنویسید، سپس $f(-20)$ را حساب کنید.	۱/۵	جدول: x 0 1 2 3 4 y 5 9 13 17 21
۱۳	نمودار تابع خطی $f(x) = \frac{x-2}{3}$ را رسم کنید. $f: R \rightarrow R$	۱	
۱۴	اگر داشته باشیم $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ و $A = \{0, 1, \sqrt{2}\}$ ، بُرد تابع $f(x)$ را به دست آورید. $f: A \rightarrow B$	۱/۲۵	
۱۵	با فرض آن که f تابعی خطی، $f(0) = 2$ و $f(-1) = 5$ باشد، اولاً ضابطه f را به دست آورید، ثانیاً مقادیر $f(4)$ و $f(1-2h)$ را محاسبه کنید.	۲	
۱۶	معادلات درآمد و هزینه در یک شرکت به صورت $R(x) = \frac{-x^2}{4} + 20x$ و $C(x) = 10x + 2$ است: الف) تابع سود را تشکیل دهید. ب) به ازای تولید چه تعداد کالا، سود ماکزیمم می شود؟ پ) بیشترین سود شرکت را محاسبه کنید.	۱/۵	
۲۰	جمع نمرات		

الف $f(t) - t$

ب $(2x^2 + x - 1 = 0)$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ P &= \left(\frac{1}{2}\right)(-1) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

پ (2) $\{(1, 5), (a, -1), (1, 2a-1), (-1, 2), (2, b)\}$

$$\text{تابع} \Rightarrow 2a - 1 = 5 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (a, -1) = (3, -1) = (2, b)$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow a + b = 3 - 1 = 2$$

ت $(2y + x^2)^2 = 4y^2 + x^4 + 4yx^2$

۲. الف نادرست؛ هر فرد می‌تواند چند رنگ مورد علاقه داشته باشد؛ پس تابع نیست.

ب درست

۳. ب اگر تعداد سال‌هایی که باید بگذرد را x در نظر بگیریم، آن‌گاه معادله به صورت زیر است:

$$40 + x = 10 + x + 12 + x \Rightarrow 40 = 22 + x \Rightarrow x = 18$$

۴.

$$\text{الف} \quad 3x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(3x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{ب} \quad x^2 + 2x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 6 \xrightarrow[\text{عدد} = \frac{b^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1]{\text{را به دو طرف می‌افزاییم}} x^2 + 2x + 1 = 6 + 1$$

$$= 6 + 1 \Rightarrow (x + 1)^2 = 7 \xrightarrow{\text{جذر}} x + 1 = \pm\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \sqrt{7} \Rightarrow x = \sqrt{7} - 1 \\ x + 1 = -\sqrt{7} \Rightarrow x = -\sqrt{7} - 1 \end{cases}$$

$$\text{پ} \quad \underbrace{x^2 - 7x - 44 = 0}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} \Rightarrow (x - 11)(x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

$$\text{ت} \quad \begin{matrix} 1x^2 & -10x & -3=0 \\ \downarrow a & \downarrow b & \downarrow c \end{matrix} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(-3)$$

$$\Rightarrow \Delta = 100 + 12 = 112 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{112}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{10 + \sqrt{112}}{2} \\ x'' = \frac{10 - \sqrt{112}}{2} \end{cases}$$

۵.

$$x^2 + kx - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = k^2 - 4(1)(-4) = k^2 + 16$$

الف

$$x^2 - 3x + k = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(k) = 9 - 4k$$

ب k هر عددی که باشد حاصل $(k^2 + 16)$ مثبت خواهد شد، لذا معادله (الف) همواره دارای جواب‌های حقیقی است.

۶. هر معادله درجه دوم به شکل $(x - m)^2 = 0$ دارای ریشه مضاعف m است، لذا معادله $(x - 5)^2 = 0$ یا $x^2 - 10x + 25 = 0$ دارای ریشه مضاعف ۵ است.

۷. اگر تولید روز شنبه را x فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightarrow{\times 3} & 3x & \xrightarrow{\times 3} & 9x & \xrightarrow{\times 3} & 27x & \xrightarrow{\times 3} & 81x \\ \downarrow \text{شنبه} & & \downarrow \text{یکشنبه} & & \downarrow \text{دوشنبه} & & \downarrow \text{سه‌شنبه} & & \downarrow \text{چهارشنبه} \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} 81x = 162 \Rightarrow x = \frac{162}{81} = 2 \text{ هزار تن}$$

$$\text{مجموع تولیدات این ۵ روز} = x + 3x + 9x + 27x + 81x = 121x = 121 \times 2 = 242 \text{ هزار تن}$$

۸.

$$5x^2 + 10x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5} \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} \quad S = \frac{-b}{a} = \frac{-10}{5} = -2 \quad \text{مجموع ریشه‌ها}$$

۹. عدد مجهول را x فرض می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

پس مسئله دو جواب دارد.

$$x + x^2 = 20 \Rightarrow \underbrace{x^2 + x - 20 = 0}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} \Rightarrow (x + 5)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = -5, x = 4$$

۱۰.

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3 \xrightarrow{\text{سمت چپ مخرج مشترک می‌گیریم.}} \frac{1 + 2(x-2)}{(x-2)^2} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(x-2)^2 = 1 + 2x - 4$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 4x + 4) = 2x - 3 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 2x - 3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 14x + 15 = 0 \Rightarrow \Delta = (-14)^2 - 4(3)(15) = 196 - 180 = 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{14 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{14+4}{6} = \frac{18}{6} = 3 \\ x'' = \frac{14-4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند، چون هیچ مخرجی را در معادله اولیه، به صفر تبدیل نمی‌کنند.

۱۱. الف تابع است، چون عضوهای اول زوج مرتب‌ها، همگی مختلف هستند.

ب تابع نیست، چون x هایی وجود دارند که برای آن‌ها ۲ مقدار y وجود دارد (می‌بینید که توان y زوج است). مثلاً:

$$y^2 + x^2 = 1 \xrightarrow{(x=0)} y^2 = 1 \xrightarrow{\text{جذر}} y = \pm 1$$

پ تابع است، چون هر خط عمودی دلخواه (موازی محور y ها) که رسم کنیم، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

ت تابع نیست، چون از عدد ۴ در مجموعه A هیچ فلشی خارج نشده است.

۱۲. هر x ابتدا در عدد ۴ ضرب شده و سپس با ۵ جمع شده تا y مربوطه به دست آید، پس ضابطه تابع f برابر است با:

$$f(x) = y = 4x + 5 \xrightarrow{x=-20} f(-20) = 4(-20) + 5 = -80 + 5 = -75$$

۱۳. کافی است به x دو عدد دلخواه نسبت دهیم:

$$y = \frac{x-2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=5} y=1 \Rightarrow A \left| \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right. \\ \xrightarrow{x=2} y=0 \Rightarrow B \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

۱۴.

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{x=1} f(1) = \frac{1-1}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0 \\ \xrightarrow{x=\sqrt{2}} f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f = \left\{ \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-2} \right\}$$