مقدمهٔ ناشر

سلام

الان که دارم این مقدمه را می‌نویسم حال عجیبی دارم. یادم می‌آید اولین بار که آقای هاشمی را دیدم، اول دبیرستان، سر کلاس جبر بود. آن‌وقت‌ها ما خیلی بچه بودیم و آقای هاشمی هم یک جوان سرحال و پرانرژی که قصد داشت ریاضی را خوب و حسابی به ما یاد بدهد. از آن‌وقت به بعد، چهار سال تمام آقای هاشمی هر سال معلمان بود و همین باعث شده بود تا همهٔ ما را خوب بشناسد. از دست من یکی که همیشه دلخور بود که چرا تمرین‌ها را درست و مرتب در دفتر نمی‌نوشتم و حل نمی‌کردم. حال عجیبی که گفتم به این خاطر است که «چرخ بازیگر از این بازیچه‌ها بسیار دارد». بعد از این‌همه سال من نشسته‌ام و دارم برای کتابی مقدمه می‌نویسم که آقای هاشمی نویسنده‌اش است.

آقای هاشمی را نمی‌دانم ولی من که خیلی خوشحالم، از یک طرف خیالم راحت است که برای کتابی مقدمه می‌نویسم که مطمئنم نویسنده‌اش از دانش، تجربه و تلاش هیچ کم نگذاشته است و از طرف دیگر خوشحالم که فرصتی به دست آورده‌ام تا از آن‌همه تلاش و زحمتی که برای من و هم‌کلاسی‌هایم کشید، تشکر کنم. هم‌کلاسی‌هایی که الان هر کدامشان در یک نقطه از این دنیای بزرگ، کار مهمی انجام می‌دهند.

خوشبختانه بعد از این‌همه سال، این‌همه کلاس و این‌همه دانش‌آموز، آقای هاشمی از یک جهت هیچ تغییری نکرده است، به همان اندازهٔ روز اول، انگیزه و انرژی دارد و هنوز هم دوست دارد که هر چه‌قدر که می‌تواند بهتر و درست‌تر یاد بدهد.

امیدوارم هر کدام از ما هم بتوانیم این‌همه انگیزه و انرژی داشته باشیم.

خوش باشید.

تقدیم به

روانِ پاکِ پدر و با آرزوی سلامتی مادرم که در امر اخلاق و آموزش چیزی را از من دریغ نداشتند.

حسین هاشمی طاهری

تقدیم به

بچه‌های تلاشگرِ ایران

زهرا جالینوسی

مقدمهٔ مؤلفان

به نام خداوند رنگین‌کمان

هندسه معمولاً از اون درس‌هایی بوده که بچه‌ها برای یادگرفتنش با معلما و کتاباشون درگیر بودن و آخر سال هم برای این‌که بتونن یه نمرهٔ خوبی بگیرن، چندتا قضیهٔ کتاب درسی رو حفظ می‌کردن و از همونا هم توی امتحان می‌اومد و تمام. اما الان قضیه فرق کرده. تأثیر امتحان نهایی توی کنکور به ۶۰ درصد رسیده و طراح‌های امتحان نهایی برای این‌که بتونن سطح بچه‌ها رو از هم مشخص کنن، فقط چندتا قضیهٔ حفظی رو سؤال نمی‌دن و می‌رن سراغ کاربرد اون قضیه‌ها و سؤال‌های خیلی سخت‌تر ... .

پس به قول شاعر گفتنی زمان، زمانهٔ درنگ و تردید و اما و اگر نیست ... .

برای این‌که بتونید ۶۰ درصد نمرهٔ نهایی کنکور رو توی مشتتون داشته باشید، این کارا رو انجام بدید:

از ابتدای سال تحصیلی کتاب ماجرای بیست هندسهٔ ۳ رو تهیه کنید، هم‌زمان با درس‌دادن معلمتون، درس‌نامه و سؤال‌های اون رو حل کنید. بعد تک‌تک پاسخ‌هاتون رو با پاسخ‌نامهٔ تشریحی کتاب چک کنید.

حالا که به یه تسلط نسبی رو سؤال‌ها رسیدید، برید سراغ سؤال‌های 🚀 که از همه سؤال‌ها سخت‌تره و شما رو برای سؤال‌های سخت احتمالی امتحان نهایی آماده می‌کنه. بعد از این‌که هر فصل رو تموم کردید برای این‌که خودتون رو بسنجید، آزمون جمع‌بندی فصل رو حل کنید.

کتاب ماجرای بیست هندسهٔ دوازدهم اینارو داره:

درس‌نامه: سعی کردیم خیلی ساده، روان و کاربردی (جوری که راحت بتونید هندسه رو بخونید، یاد بگیرید و حتی لذت ببرید) درس رو آموزش بدیم. مطالب اضافه در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازمه رو دارید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسیه، البته بیشتر جاها برای این‌که مطالب، طولانی نشه و حوصله‌تون سر نره درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت رو جداگونه آوردیم.

در امتحان چه خبر: حجم مطالب در درس هندسه زیاده پس خیلی مهمه که تا می‌تونید، مطالب رو تیپ‌بندی‌شده و منظم یاد بگیرید. ما سعی کردیم توی کادرهای (در امتحان نهایی چه خبر؟) این کار را برای شما انجام بدیم. مطالب هر درس رو تیپ‌بندی کردیم و سؤال‌های مربوط به هر تیپ رو هم مشخص کردیم. پس می‌تونید برید و سؤال‌های هر تیپی رو که خوب یاد نگرفتید دوباره و دوباره حل کنید و بهشون مسلط بشید.

سؤال‌های امتحانی: همهٔ مثال‌ها و تمرین‌های کتاب، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها و همهٔ سؤال‌های نهایی از دی ۹۷ گرفته تا خرداد ۱۴۰۳ توی این کتاب موجوده و به قول معروف پوشش کامل کتاب درسی و امتحان‌های نهایی یه جوری رعایت شده که بعد خوندن (ماجرای بیست) دیگه هیچ نگرانی‌ای ندارید که چیزی جا افتاده باشه.

سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت 🚀 است، سطح دشوارتری نسبت به بقیهٔ سؤال‌ها داره و شما رو برای سؤال‌های سخت نهایی آماده می‌کنه.

مقدمهٔ مؤلفان

آزمون‌های جمع‌بندی انتهای هر فصل: بعد از تمام‌شدن هر فصل، خوب است خودتان را با یک آزمون نسبتاً دشوار محک بزنید. اگر در حل سؤال‌ها اشکالات زیادی داشتید بدانید که باید دوباره به درس‌نامه و سؤال‌های امتحانی فلش بک بزنید.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید.

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب دو امتحان ترم اول داریم و چهارتا امتحان ترم دوم. حتماً قبل امتحان نهایی این سؤال‌ها رو حل کنید و به بارم‌بندی اون‌ها هم توجه کنید که بدونید باید چه‌جوری جواب بدی که مصحح بهتون نمرهٔ کامل بده.

در پایان ممنون از:

دکتر نصری که خیلی‌سبز رو ساخت و درس‌خوندن رو برای بچه‌ها لذت‌بخش کرد ...

مهندس مهدی هاشمی که برای نوشتن این کتاب به ما اعتماد کرد.

خانم طاهری و خانم قموشی که زحمت هماهنگی‌ها رو کشیدند و خیلی اذیتشون کردیم.

ویراستارهای خوب مجموعه آقایان و خانم‌ها علیرضا کاظمی‌بقا، فرامرز سلطان کریمی، نیما فیض‌آقایی، ماهان فنی‌فر، پویک مقدم، لیلا سمیعی عارف، ماهک کناره که برای بهترشدن کتاب به ما کمک کردن.

شما بچه‌های خوب که برای آیندهٔ بهتر ایران تلاش می‌کنید.

حسین هاشمی طاهری

زهرا جالینوسی

مرداد ۱۴۰۳

فهرست

درس‌نامه
و
سؤالات امتحانی

فصل ۱ : ماتریس و کاربردها

بخش ۱: ماتریس‌های خاص و جمع ماتریس‌ها

تعریف ماتریس هر آرایش مستطیل‌شکل از اعداد حقیقی شامل تعدادی سطر و ستون را یک ماتریس می‌نامیم.

به عنوان مثال آرایش عددهای $\begin{matrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ \\ -۲ & \sqrt{۳} \end{matrix}$ یک ماتریس است، زیرا آرایش مستطیل‌شکل تشکیل داده‌اند.

برای نمایش ماتریس، اعداد آن را داخل دو کروشه قرار می‌دهیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مثل A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

به عنوان مثالی دیگر؛ عبارت روبه‌رو، یک ماتریس است. همان‌گونه که مشاهده می‌کنید این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۵ \\ -۳ & ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \to \text{سطر اول} \\ \to \text{سطر دوم} \end{array} \end{array}$$

مرتبهٔ ماتریس به طور کلی، اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌گوییم ماتریس A از مرتبهٔ $m \times n$ است و گاهی آن را با نماد $A_{m\times n}$ نیز نمایش می‌دهیم. مثلاً ماتریس بالا از مرتبهٔ ۲×۳ و به صورت $A_{۲\times۳}$ است.

درایه‌های ماتریس هر یک از عددهای موجود در ماتریس را یک «درایه» از آن ماتریس می‌نامیم. اگر درایه‌ای در محل برخورد سطر دوم و ستون سوم قرار داشته باشد، آن را با نماد $a_{۲۳}$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال، در ماتریس فوق، درایهٔ $\sqrt{۲}$ در محل برخورد سطر دوم با ستون سوم قرار دارد، پس می‌گوییم $a_{۲۳} = \sqrt{۲}$ و در همین ماتریس $a_{۱۲} = ۰$. به طور کلی درایه‌ای که در سطر iام و ستون jام قرار دارد با a_{ij} نمایش داده می‌شود. a_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس A می‌نامیم.

مثلاً:

$$A_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}$$

نکته: ۱ یک ماتریس از مرتبهٔ m در n دارای $m \times n$ درایه است. مثلاً یک ماتریس ۳ در ۲ دارای $۳ \times ۲ = ۶$ درایه است.

۲ هر ماتریس از مرتبهٔ ۱×۱ را معادل با یک عدد حقیقی در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر $A = [a]_{۱\times۱}$، آن‌گاه می‌گوییم: $A = [a]_{۱\times۱} = a$.

ماتریس با درایهٔ عمومی اگر تمام درایه‌های ماتریس A از یک قانون عمومی تبعیت کنند، در آن صورت می‌توانیم آن ماتریس را به صورت $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ بنویسیم. مثلاً فرض کنید درایه‌های ماتریس $A_{۳\times۴}$، از قانون $a_{ij} = ۲i + j$ تبعیت می‌کنند؛ یعنی برای به دست آوردن درایه‌های ماتریس A کافی است در ضابطهٔ a_{ij} به جای iها شمارهٔ سطر و به جای jها شمارهٔ ستون را قرار دهیم. ببینید:

$$A_{۳\times۴} = [a_{ij}]_{۳\times۴} = [۲i+j]_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times۱+۱ & ۲\times۱+۲ & ۲\times۱+۳ & ۲\times۱+۴ \\ ۲\times۲+۱ & ۲\times۲+۲ & ۲\times۲+۳ & ۲\times۲+۴ \\ ۲\times۳+۱ & ۲\times۳+۲ & ۲\times۳+۳ & ۲\times۳+۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

مثال: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & -۵ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix}$، حاصل $a_{۳۱} - a_{۱۲}$ را پیدا کنید.

پاسخ: درایهٔ $a_{۳۱}$، روی سطر سوم و ستون اول قرار دارد؛ پس $a_{۳۱} = -۲$.

درایهٔ $a_{۱۲}$، روی سطر اول و ستون دوم قرار دارد؛ پس $a_{۱۲} = ۴$.

در نتیجه داریم:

$$a_{۳۱} - a_{۱۲} = -۲ - ۴ = -۶$$

توجه: گاهی اوقات ضابطهٔ درایه‌ها با هم فرق می‌کند. حواستان باشد در این سؤال‌ها برای محاسبهٔ هر درایه از ضابطهٔ مخصوص به خودش استفاده کنید. مثال صفحهٔ بعد را ببینید.

مثال: ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times2}$ به صورت مقابل تعریف شده است:
این ماتریس را با درایه‌هایش نمایش دهید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j : i>j \\ i\times j : i=j \\ i-j : i<j \end{cases}$$

پاسخ: چون A از مرتبهٔ 3×2 است، پس ماتریس A باید به صورت مقابل باشد:

$$A=\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

در درایهٔ a_{11}، چون $i=j=1$، پس بنا بر ضابطهٔ دوم $a_{11}=1\times1=1$.

در درایهٔ a_{12}، $i<j$ است، پس بنا بر ضابطهٔ سوم $a_{12}=1-2=-1$.

در درایهٔ a_{21}، $i>j$ است، پس بنا بر ضابطهٔ اول $a_{21}=2+1=3$.

در درایهٔ a_{22}، $i=j$، پس $a_{22}=2\times2=4$.

در درایهٔ a_{31}، $i>j$، پس $a_{31}=3+1=4$.

و سرانجام در درایهٔ a_{32} نیز $i>j$ است و در نتیجه $a_{32}=3+2=5$.

اکنون واضح است که ماتریس A به صورت مقابل خواهد بود:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ به صورت مقابل تعریف شده است:
مجموع درایه‌های ماتریس A را پیدا کنید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i\times j^2 : i<j \\ i+2j : i\geq j \end{cases}$$

پاسخ: همانند مثال قبل داریم:

$$\begin{aligned} &a_{11}=1+2\times1=3\ ,\ a_{12}=1\times2^2=4\ ,\ a_{13}=1\times3^2=9 \\ &a_{21}=2+2\times1=4\ ,\ a_{22}=2+2\times2=6\ ,\ a_{23}=2\times3^2=18 \\ &a_{31}=3+2\times1=5\ ,\ a_{32}=3+2\times2=7\ ,\ a_{33}=3+2\times3=9 \end{aligned} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 4 & 6 & 18 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

اکنون به سادگی معلوم می‌شود که مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۶۵ است.

توجه: *همیشه سؤال رو تا آخر بخونید و ببینید چی از شما می‌خواد، تا وقتتون تلف نشه. مثلاً توی مثال زیر نیازی به محاسبهٔ همهٔ درایه‌های A نیست و فقط درایه‌های ستون دوم کافیست:*

مثال: اگر $A=[a_{ij}]_{3\times2}$ و $a_{ij}=i\times j-2$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A چه‌قدر است؟

پاسخ: $\text{مجموع درایه‌های ستون دوم}=a_{12}+a_{22}+a_{32}=(1\times2-2)+(2\times2-2)+(3\times2-2)=0+2+4=6$

چند ماتریس خاص

در این بخش چند ماتریس خاص و کاربردی را معرفی می‌کنیم:

۱. ماتریس مربعی

اگر تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس با هم برابر باشند، آن را «ماتریس مربعی» می‌نامیم. مثلاً اگر A ماتریسی از مرتبهٔ $n\times n$ باشد، اصطلاحاً آن را ماتریس مربعی از مرتبهٔ n می‌نامیم و با A_n نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال، ماتریس $M=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ دارای دو سطر و دو ستون است؛ پس ماتریسی مربعی است. مرتبهٔ این ماتریس 2×2 است و معمولاً می‌گوییم: «M، ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۲ است.» و آن را با نماد M_2 نیز نشان می‌دهیم.

تعریف قطر اصلی و قطر فرعی در ماتریس مربعی در هر ماتریس مربعی، درایه‌هایی که شمارهٔ سطر و ستون آن‌ها برابر باشند، قطر اصلی را تشکیل می‌دهند؛ به بیان دیگر در یک ماتریس مربعی، تمام درایه‌هایی که به صورت a_{ii} هستند، روی قطر اصلی قرار دارند.

مثلاً در ماتریس $M=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$، درایه‌های قطر اصلی، ۳ و ۴ هستند و در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$، درایه‌های قطر اصلی ۳، ۱ و -2 می‌باشند.

◀ هم‌چنین در هر ماتریس مربعی، درایه‌هایی که روی قطر عمود بر قطر اصلی قرار دارند، قطر فرعی ماتریس را تشکیل می‌دهند.
در مثال بالا، در ماتریس M، درایه‌های قطر فرعی ۲ و -1 و در ماتریس A، درایه‌های قطر فرعی صفر، ۱ و ۴ هستند.

در ماتریس مربعی مقابل، قطرهای اصلی و فرعی نمایش داده شده‌اند:

قطر اصلی   قطر فرعی

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

نکته: ۱ اگر a_{ij} روی قطر فرعی یک ماتریس $n\times n$ باشد، آن‌گاه $i+j=n+۱$. برعکس، اگر در یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n داشته باشیم $i+j=n+۱$، آن‌گاه درایه‌های a_{ij} و a_{ji} روی قطر فرعی قرار دارند.

۲ در ماتریس‌های مربعی، می‌دانیم رابطهٔ $i=j$ در درایه‌های روی قطر اصلی برقرار است؛ پس در درایه‌های بالای قطر اصلی همواره $i<j$ و در درایه‌های پایین قطر اصلی همواره $i>j$ می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} & & i<j \\ & i=j & \\ i>j & & \end{bmatrix}$$

مثال: **در یک ماتریس از مرتبهٔ $n\times n$، درایهٔ a_{ij} هم روی قطر اصلی و هم روی قطر فرعی است. مرتبهٔ ماتریس را برحسب i پیدا کنید.**

پاسخ: چون a_{ij} روی قطر اصلی است، پس $i=j$ و چون a_{ij} روی قطر فرعی نیز قرار دارد، بنا بر نکتهٔ فوق باید داشته باشیم $i+j=n+۱$ که در آن n ، مرتبهٔ ماتریس است. از این دو رابطه داریم:

$$i+j=n+۱ \xrightarrow{i=j} ۲i=n+۱ \Rightarrow n=۲i-۱$$

۲. ماتریس سطری

ماتریسی را که فقط یک سطر داشته باشد، ماتریس سطری می‌نامیم. به عنوان مثال؛ ماتریس $P=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۷ & -۲ \end{bmatrix}$ یک ماتریس سطری است که دارای ۴ ستون می‌باشد. *(حواستون باشه مهم نیست چندتا ستون داشته باشیم، فقط کافیه یک سطر داشته باشیم تا به اون ماتریس سطری بگیم.)*

یک ماتریس سطری که دارای n ستون باشد، به صورت $A_{۱\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \end{bmatrix}$ نوشته می‌شود.

۳. ماتریس ستونی

ماتریسی را که فقط یک ستون داشته باشد، ماتریس ستونی می‌نامیم. به عنوان مثال؛ ماتریس $C=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی است که دارای ۳ سطر می‌باشد. *(در ماتریس ستونی هم تعداد سطرها اهمیتی ندارد، فقط باید یک ستون داشته باشیم.)*

یک ماتریس ستونی که دارای m سطر باشد، به صورت $A_{m\times ۱}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}$ است.

۴. ماتریس قطری

ماتریس **مربعی** را که تمام درایه‌های **غیرواقع بر قطر اصلی** آن صفر باشند، ماتریس قطری می‌نامیم. (توجه داشته باشیم که درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند و می‌توانند مخالف صفر باشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند:

$$A=\begin{bmatrix} ۵ \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال: **ماتریس $A=\begin{bmatrix} m+۱ & n-۱ \\ ۲m & m+n-۱ \end{bmatrix}$ قطری است. مقادیر m و n را بیابید.**

پاسخ: ماتریس قطری، ماتریسی است که تمام درایه‌های غیر واقع بر از قطر اصلی آن صفر باشند؛ پس داریم:

$$n-۱=۰ \Rightarrow n=۱$$
$$۲m=۰ \Rightarrow m=۰$$

۵. ماتریس اسکالر

اگر در یک ماتریس **قطری**، تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می‌نامند. در زیر، چند نوع ماتریس اسکالر آورده شده است:

$$A=\begin{bmatrix} ۵ \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۰ & -۴ \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} k & ۰ & ۰ \\ ۰ & k & ۰ \\ ۰ & ۰ & k \end{bmatrix}$$

مثال: مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر از مرتبهٔ ۳ مساوی ۶ است. این ماتریس را با درایه‌هایش مشخص کنید.

پاسخ: می‌دانیم که در ماتریس اسکالر درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند و بقیهٔ درایه‌ها هم صفرند؛ پس داریم:

$$A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} a+a+a=۶ \Rightarrow ۳a=۶ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۶. ماتریس واحد (ماتریس همانی)

اگر در یک ماتریس اسکالر تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی برابر **۱** باشند، آن را ماتریس واحد (ماتریس همانی) می‌نامیم و ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نمایش می‌دهیم.

در مقابل، دو نوع ماتریس واحد از مرتبه‌های مختلف نمایش داده شده‌اند:

$$I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس اسکالر $\begin{bmatrix} k & & & & \\ & k & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k \end{bmatrix}_{n\times n}$ را می‌توانیم با استفاده از ماتریس همانی به صورت kI_n نشان دهیم.

۷. ماتریس صفر

ماتریسی که **تمام** درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر می‌نامیم. معمولاً ماتریس صفر از مرتبهٔ $n\times p$ را با نماد $\bar{O}_{n\times p}$ نمایش می‌دهیم.

در مقابل، چند ماتریس صفر نمایش داده شده‌اند:

$$\bar{O}_{۱\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \ , \ \bar{O}_{۲\times۴}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \ , \ \bar{O}_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

+ جمع‌بندی

انواع ماتریس	نماد پارامتری	مثال
۱. ماتریس مربعی	$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	$A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ $A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۵ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$
۲. ماتریس سطری	$A_{۱\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \end{bmatrix}$	$A_{۱\times۳}=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ $A_{۱\times۵}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ & ۲ & -۵ \end{bmatrix}$
۳. ماتریس ستونی	$A_{n\times۱}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{n۱} \end{bmatrix}$	$A_{۳\times۱}=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \\ ۷ \end{bmatrix}$ $A_{۴\times۱}=\begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ -۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$
۴. ماتریس قطری	$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	$A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ $A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$

انواع ماتریس	نماد پارامتری	مثال
۵. ماتریس اسکالر	$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & a & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & a & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & a \end{bmatrix}$	$A_{۵\times ۵}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$
۶. ماتریس همانی	$I_{n\times n}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{bmatrix}$	$I_{۴\times ۴}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$
۷. ماتریس صفر	$\bar{O}_{n\times m}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \dots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$	$\bar{O}_{۲\times ۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ $\bar{O}_{۳\times ۴}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس زمانی مساوی هستند که هر دو شرط زیر را داشته باشند:

الف دو ماتریس هم‌مرتبه باشند؛ یعنی تعداد سطر و نیز تعداد ستون آن‌ها با هم برابر باشد.

ب تمام درایه‌های نظیر به نظیر در دو ماتریس برابر باشند.

برای مثال؛ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & x \\ y & ۳ \\ ۶ & ۲z \end{bmatrix}$ که هر دو از مرتبهٔ ۲×۳ و به اصطلاح **هم‌مرتبه** هستند، وقتی با هم برابرند که $x=a_{۱۱}=۱$، $y=a_{۲۲}=-۱$ و $۲z=a_{۳۱}=۴$ یا $z=۲$ باشد.

مثال: **اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x+۲y & ۱ \\ ۲ & x^۲+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & x+۲ \\ ۲ & z+۱ \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقادیر x، y و z را پیدا کنید.**

پاسخ: هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۲ هستند، پس شرط اول تساوی دو ماتریس برقرار است.

اکنون باید شرط دوم برقرار باشد، در نتیجه باید درایه‌های نظیر به نظیر در هردو ماتریس را برابر قرار دهیم:

$$\begin{cases} x+۲y=۵ \xrightarrow{x=-۱} y=۳ \\ x+۲=۱ \Rightarrow x=-۱ \\ z+۱=x^۲+۱ \xrightarrow{x=-۱} z=۱ \end{cases}$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع یا تفریق دو ماتریس **هم‌مرتبهٔ** A و B، باید درایه‌های نظیربه‌نظیر را در هر دو ماتریس جمع یا تفریق کنیم.

توجه داشته باشیم که **شرط لازم برای جمع‌پذیر یا تفریق‌پذیر بودن ماتریس‌های A و B، هم‌مرتبه‌بودن آن‌ها است.**

برای مثال:

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۲} + \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۲} = \begin{bmatrix} ۰+(-۲) & -۱+۱ \\ ۱+۴ & ۳+(-۵) \\ ۲+۳ & ۰+(-۲) \end{bmatrix}_{۳\times ۲} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۵ & -۲ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۲}$$

پس اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ و $C=A+B$ ، آن‌گاه $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ (C هم‌مرتبه با A و B است.) برابر است با:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه حاصل $A+B$ و $B-A$ را پیدا کنید.

پاسخ: چون هر دو ماتریس از مرتبهٔ ۲×۲ هستند، پس هم‌مرتبه می‌باشند و جمع‌پذیرند؛ بنا بر تعریف جمع دو ماتریس داریم:

$$A+B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۵ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲+۴ & ۳+(-۱)\\ -۵+۲ & ۰+۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ -۳ & ۳\end{bmatrix}$$

حالا $B-A$ را پیدا می‌کنیم. چون دو ماتریس A و B هر دو از مرتبهٔ ۲×۲ هستند؛ پس دو ماتریس را می‌توان از یکدیگر کم کرد و داریم:

$$B-A=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۵ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴-۲ & -۱-۳\\ ۲-(-۵) & ۳-۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۴\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

برای این‌که عدد حقیقی r را در یک ماتریس ضرب کنیم، کافی است r را در تک‌تک درایه‌های آن ماتریس ضرب کنیم.

به زبان ریاضی داریم:

$$r\in\mathbb{R}, A=[a_{ij}]_{n\times p} \Rightarrow r\cdot A=[r\cdot a_{ij}]_{n\times p}$$

در مثال زیر، عدد ۲ را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کرده‌ایم و ۲A به دست آمده است:

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۴\end{bmatrix}\xrightarrow{\times(۲)} ۲A=\begin{bmatrix}-۲ & ۶ & ۰\\ ۴ & ۲ & ۸\end{bmatrix}$$

نتیجه: ضرب عدد r در یک ماتریس، ماتریسی از همان مرتبه است به طوری که هر یک از درایه‌هایش r برابر درایه‌های نظیر در ماتریس اولیه است.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۳\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $۲A+۳B$ را پیدا کنید.

پاسخ:

$$۲A+۳B=۲\times\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\end{bmatrix}+۳\times\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۶\\ ۸ & ۱۰ & ۱۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۹ & ۳ & ۳\\ ۶ & ۰ & -۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & ۷ & ۹\\ ۱۴ & ۱۰ & ۳\end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس

اگر تمام درایه‌های یک ماتریس را قرینه کنیم، ماتریسی که حاصل می‌شود، قرینهٔ ماتریس اولیه است. در واقع قرینهٔ ماتریس A همان ماتریس $(-۱)\times A$ است که با نماد $-A$ نیز نمایش داده می‌شود. مثلاً:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\xrightarrow{\times(-۱)} -A=\begin{bmatrix}-۲ & ۲\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}$$

توجه: حاصل‌جمع هر ماتریس با قرینهٔ همان ماتریس، برابر ماتریس صفر از همان مرتبه است؛ یعنی:

$$A+(-A)=\bar{O}$$

نتیجه: اگر A، ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ و $\bar{O}$ نیز ماتریس صفر از مرتبهٔ $m\times n$ باشد، آن‌گاه $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ ؛ یعنی ماتریس صفر، عضو بی‌اثر عمل جمع ماتریس‌ها است.

مثال: دو ماتریس ۲×۳ و ناصفر مثال بزنید که مجموع آن‌ها برابر ماتریس صفر باشد. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ: فرض کنیم A و B دو ماتریس ۲×۳ باشند، طوری که $A+B=\bar{O}_{۳\times۲}$ ، پس $B=\bar{O}_{۳\times۲}-A$ یا $B=-A$ ؛ یعنی کافی است تمام درایه‌های ماتریس A را قرینه کنیم، بنابراین به عنوان نمونه؛ اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ -۲ & ۰\\ ۱ & -۳\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $B=-A=\begin{bmatrix}-۳ & -۴\\ ۲ & ۰\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}$.

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر r و s دو عدد حقیقی و A، B و C سه ماتریس از مرتبهٔ $n\times p$ باشند (یعنی هم‌مرتبه باشند)، آن‌گاه ویژگی‌های زیر همواره برقرار است:

ردیف	خاصیت	نمایش اختصاری	مثال
۱	خاصیت جابه‌جایی در جمع ماتریس‌ها برقرار است.	$A+B=B+A$	$\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱\\۱&۰\end{bmatrix}$
۲	خاصیت شرکت‌پذیری در جمع ماتریس‌ها برقرار است.	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$\left(\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}۳&۰\\۲&-۳\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳&۰\\۲&-۳\end{bmatrix}\right)$
۳	ماتریس صفر، عضو خنثی در عمل جمع است.	$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$	$\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}$
۴	جمع هر ماتریس با قرینهٔ خودش، برابر ماتریس صفر است.	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$	$\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۲&۰\\-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲-۲&۰+۰\\۱-۱&-۱+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$
۵	ویژگی توزیع‌پذیریِ ضرب یک عدد در جمع یا تفریق ماتریس‌ها برقرار است.	$r.(A\pm B)=rA\pm rB$	$۲\left(\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}\right)$ $=۲\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}-۱&۱\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۲\\۲&۰\end{bmatrix}$
۶	طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد ضرب یا بر عددی ناصفر تقسیم کرد.	$A=B\xrightarrow{r\neq ۰}rA=rB$ $kA=kB\xrightarrow{k\neq ۰}A=B$	$\begin{bmatrix}۲&-۲\\-۲&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲&۴\\-۴&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۲\\-۶&۰\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\div(۲)}\begin{bmatrix}۱&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۳&۰\end{bmatrix}$
۷	اگر حاصل‌ضرب یک عدد در ماتریس، برابر ماتریس صفر شود، یا آن عدد صفر است یا آن ماتریس، ماتریس صفر است:	$kA=O\ \Rightarrow\ k=۰$ یا $A=\bar{O}$	$۰\times\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$ $۲\times\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$
۸	ویژگی توزیع‌پذیری ضرب یک ماتریس در مجموع یا تفاضل دو عدد برقرار است.	$(r\pm s)A=rA\pm sA$	$(۲+۳)\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\end{bmatrix}$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳&۱&۴\\۲&-۱&۵\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۰&۲&۷\\۴&۰&-۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه نشان دهید رابطهٔ $A+(B+C)=(A+B)+C$ برقرار است.

پاسخ:

$$B+C=\begin{bmatrix}۳&۱&۴\\۲&-۱&۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰&۲&۷\\۴&۰&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۳&۱۱\\۶&-۱&۴\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳&۳&۱۱\\۶&-۱&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۵&۱۴\\۱۰&۴&۱۰\end{bmatrix}\quad(۱)$$

$$A+B=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۴&۵&۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳&۱&۴\\۲&-۱&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۳&۷\\۶&۴&۱۱\end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}۴ & ۳ & ۷\\ ۶ & ۴ & ۱۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۷\\ ۴ & ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۵ & ۱۴\\ ۱۰ & ۴ & ۱۰\end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow A+(B+C)=(A+B)+C$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}$ و $r=۳$ ، آن‌گاه نشان دهید: $\mathbf{r(A+B)=rA+rB}$

پاسخ:

$$A+B=\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & -۱\\ ۶ & ۱\end{bmatrix}$$

$$r(A+B)=۳\begin{bmatrix}۵ & -۱\\ ۶ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵ & -۳\\ ۱۸ & ۳\end{bmatrix} \quad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$rA=۳\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲ & -۹\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}, rB=۳\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۶\\ ۱۵ & -۳\end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$rA+rB=\begin{bmatrix}۱۲ & -۹\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳ & ۶\\ ۱۵ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵ & -۳\\ ۱۸ & ۳\end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow r(A+B)=rA+rB$$

تمام ویژگی‌های بیان‌شده را می‌توانیم با استفاده از تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس اثبات کنیم. در این‌جا ۲ ویژگی را ثابت می‌کنیم تا با مدل این نوع سؤال‌ها آشنا شوید.

مثال: **ویژگی جابه‌جایی جمع دو ماتریس؛ یعنی ویژگی (۱) از جدول صفحهٔ قبل را ثابت کنید.**

پاسخ: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ، بنا بر تعریف جمع دو ماتریس هم‌مرتبه داریم:

$A+B=[a_{ij}]_{n\times p}+[b_{ij}]_{n\times p}$

$=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times p}$ بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس

$=[b_{ij}+a_{ij}]_{n\times p}$ ویژگی جابه‌جایی عمل جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی

$=[b_{ij}]_{n\times p}+[a_{ij}]_{n\times p}$ بنا به تعریف عمل جمع ماتریس‌ها

$=B+A$

مثال: **ویژگی توزیع‌پذیری ضرب یک ماتریس در جمع دو عدد حقیقی؛ یعنی ویژگی (۸) را ثابت کنید.**

پاسخ: فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{n\times p}$ یک ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند. اکنون داریم:

$(r+s)\cdot A=(r+s)\cdot[a_{ij}]_{n\times p}$

$=[(r+s)\cdot a_{ij}]_{n\times p}$ بنا به تعریف ضرب عدد در یک ماتریس

$=[r\cdot a_{ij}+s\cdot a_{ij}]_{n\times p}$ ویژگی توزیع‌پذیری ضرب در جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی

$=[r\cdot a_{ij}]_{n\times p}+[s\cdot a_{ij}]_{n\times p}$ بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس

$=r\cdot[a_{ij}]_{n\times p}+s\cdot[a_{ij}]_{n\times p}$ بنا به تعریف ضرب عدد در ماتریس

$=r\cdot A+s\cdot A$

در امتحان نهایی چه خبر؟

در این‌جا می‌خواهیم در مورد پرتکرارترین سؤالات امتحان نهایی از بخش «ماتریس‌های خاص و جمع ماتریس‌ها» صحبت کنیم. پیشنهاد می‌کنم بعد از خواندن هر تیپ و روش حل آن به سراغ شمارهٔ سؤال‌های مربوطه بروید:

تیپ ۱ یک فرمول تک‌ضابطه‌ای یا چندضابطه‌ای از a_{ij} برحسب i و j می‌دهند و از شما یکی یا همهٔ درایه‌های ماتریس A یا جمع درایه‌های خاصی را می‌خواهند.

راه‌حل: *کافیه با توجه به شرایط ضابطه‌ها به جای i و j در فرمول‌ها، مقدار سطر و ستون مورد نظرمون رو بذاریم و درایه‌ها رو تک‌به‌تک به دست بیاریم و در نهایت ببینیم مسئله خواسته که با این درایه‌ها چی کار کنیم.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱ ـ ۱۱ ـ ۱۴ تا ۱۸

تیپ ۲ در بحث معرفی ماتریس‌های خاص، چه سؤال به صورت جای خالی باشد چه به صورت مسئله، آن‌چه که مهم است، به خاطر داشتن دقیق تعریف هر نوع ماتریس است. مثلاً یک ماتریس خاص با درایه‌های مجهول معرفی می‌کنند و از ما مقادیر مجهول را می‌خواهند.

راه‌حل: *در این سؤالات با توجه به تعریفی که از ماتریس مورد نظر داریم، معادلات مربوط به مجهول را نوشته و حل می‌کنیم.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۲ تا ۹ ـ ۱۲ ـ ۱۹ تا ۲۲

تیپ ۳ یکی دیگر از سؤالات پرتکرار امتحانات نهایی، در مورد تساوی ماتریس‌ها است. دو ماتریس برابر با درایه‌های مجهول می‌دهند و مقادیر مجهول را می‌خواهند.

راه‌حل: *کافیه درایه‌های نظیر را با هم برابر بذاریم و معادله‌های ایجادشده رو حل کنیم.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱۰ ـ ۲۳ تا ۲۶

تیپ ۴ روابط یا ویژگی‌هایی از ماتریس‌ها را می‌دهند و از ما می‌خواهد که درستی آن‌ها را ثابت کنیم.

راه‌حل: *به کمک تعاریف و قوانین ماتریس‌ها باید آن‌ها را ثابت کنید.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱۳ ـ ۳۵

تیپ ۵ دو یا چند ماتریس را به صورت عددی یا ضابطه‌ای تعریف کرده، از شما محاسبات سادهٔ جمع آن‌ها یا ضرب عدد در ماتریس را می‌خواهند. گاهی نیز مجهولاتی در مسئله قرار می‌دهند که باید به دست آورد.

راه‌حل: *تنها کاری که باید انجام بدید، دقت در محاسبه و توجه به ویژگی‌های جمع و تفریقه.*

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۲۷ تا ۳۴

سؤال‌های امتحانی

دانش‌آموز عزیز، سؤالات با علامت 🚀، سخت‌ترین سؤال‌های هر بخشن. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، به سراغ اون‌ها برو.

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید:

۱- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\frac{۲i}{j+۱}$ باشد، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است با .... *(نهایی دی ۹۸)*

۲- ماتریس B که دارای ۴ سطر و ۶ ستون است، .... درایه دارد.

۳- اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس .... می‌نامیم. *(نهایی دی ۹۷ و خرداد ۹۹)*

۴- در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}۳&۰\\m-۱&۴\end{bmatrix}$، مقدار m برابر .... است. *(نهایی شهریور ۹۹)*

۵- ماتریس مربعی که همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس .... گویند. *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

🚀۶- هر ماتریس قطری یک ماتریس .... ولی هر ماتریس .... یک ماتریس ....

۷- اگر ماتریس $\begin{bmatrix}r&m-۱\\۰&۱\end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر .... است. *(نهایی خرداد ۱۴۰۱)*

۸- اگر در ماتریس قطری، تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس .... می‌نامند. *(نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

۹- در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}-۳&۰\\۲k-۱&۲\end{bmatrix}$، مقدار k برابر .... است. *(نهایی دی ۱۴۰۲)*

۱۰- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲x-۱&۳\\۲&۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵&۳\\۲&۰\end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار x برابر با .... است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۱)*

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:

۱۱- در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که در آن $a_{ij}=i^۲-۳j$ است، درایهٔ واقع بر سطر سوم و ستون دوم برابر ۱− است.

۱۲- هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است. *(نهایی دی ۹۷)*

۱۳- اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر و $rA=rB$ باشد، آن‌گاه داریم: $A=B$. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

پاسخ کامل دهید.

۱۴- اگر $M=[m_{ij}]_{۳\times۳}$ و $m_{ij}=\begin{cases}۲ & i<j\\ ۱ & i\not<j\end{cases}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس M را پیدا کنید.

۱۵- اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}i-j & i<j\\ ۲ & i=j\\ i+j & i>j\end{cases}$ باشد، درایه‌های $a_{۳۳}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۱۲}$ را به دست آورید. *(نهایی دی ۹۹)*

۱۶- اگر $b_{ij}=\begin{cases} i+۱ & i=j \\ j-۲ & i<j \\ ۱ & i>j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. *(نهایی دی ۱۴۰۱)*

۱۷- اگر ماتریس سطری $A=[a_{ij}]$ دارای ۶ درایه باشد و $a_{ij}=i+۲j$، آن‌گاه ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۱۸- اگر $A=[a_{ij}]_{۵\times۵}$، آن‌گاه چندتا از درایه‌های $a_{۱۴}$ ، $a_{۴۲}$ ، $a_{۳۳}$ و $a_{۲۵}$ روی قطر فرعی آن قرار دارند؟

۱۹- اگر $A=\begin{bmatrix} m & ۰ \\ m-۲ & n \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید. *(نهایی دی ۱۴۰۱)*

۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبهٔ m و n ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبهٔ دو است.) *(نهایی شهریور ۱۴۰۱)*

۲۱- به ازای کدام مقدار x و y، ماتریس $\begin{bmatrix} ۲(x+۲y)-۱ & -۲x+۴ \\ ۷+y & x+y \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری است؟

۲۲- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۲a-۳b+۵ & ۰ \\ ۰ & -b & ۳a+b-c \\ ۰ & c & ۱ \end{bmatrix}$ قطری باشد، آن‌گاه مقدار $\frac{b}{a}$ چه‌قدر است؟

۲۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$، در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید. *(نهایی شهریور ۹۸)*

۲۴- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ را بیابید. *(نهایی شهریور ۹۹)*

۲۵- اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{x}+\sqrt[۶]{y+۱} \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} z-۲ & ۰ \end{bmatrix}$ برابر باشند، حاصل z^x+y چه‌قدر است؟

۲۶- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۴ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشد، حاصل $x^۲-۲y+z$ را به دست آورید. *(نهایی دی ۱۴۰۲)*

۲۷- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟ *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

۲۸- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i\times j & i>j \\ i^۲ & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A-۳I$ را به دست آورید. *(نهایی دی ۹۷)*

۲۹- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+۱ & y+۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۸ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مقادیر x و y را به دست آورید. *(نهایی خرداد ۱۴۰۲)*

۳۰- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۲ & y \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & ۲ \\ b & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند و داریم $۲A-۳I=B$. حاصل $xy-ab$ را به دست آورید.

۳۱- اگر ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت مقابل تعریف شده باشند:

$$a_{ij}=\begin{cases} i^۲-j & i<j \\ ۲i-۱ & i=j \\ j^۲-i & i>j \end{cases},\quad b_{ij}=\mathrm{Min}\{i,j\}$$

آن‌گاه حاصل $۲A-۳B$ را به دست آورید.

۳۲- اگر $A=[i+۲j]_{۳\times۳}$ و $B=[i^۲-j]_{۳\times۳}$ باشد، درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس $۲A+B$ کدام است؟

۳۳- اگر $A+۲B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B+۲A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۹ & -۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $A+B$ را به دست آورید.

۳۴- اگر $۲A+\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & m \end{bmatrix}=۳I+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & -۹ \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A، برابر ۴- باشد، مقدار m را به دست آورید.

۳۵- اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و k و t دو عدد حقیقی و متمایز باشند و داشته باشیم $kA+tB=kB+tA$، آن‌گاه نشان دهید $A=B$.

۱۶۶- در دستگاه $\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$، معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ است. $x+y$ را به دست آورید.

۱۶۷- در دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+ay=۳ \\ x+by=۵ \end{cases}$، مقدار y برابر ۱ است. حاصل $۲b-a$ را به دست آورید.

۱۶۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$، از رابطهٔ ماتریسی $AX=A-۲I$، ماتریس X را به دست آورید. *(برگرفته از کنکور سراسری)*

۱۶۹- از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$، ماتریس X را به دست آورید. *(برگرفته از کنکور سراسری)*

۱۷۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۱ & \frac{۲}{|A|} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ صدق کند، ماتریس X را به دست آورید. *(برگرفته از کنکور سراسری)*

۱۷۱- دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x-y=۵ \\ -۶x+۳y=۱۵ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. بدون حل‌کردن دستگاه، دربارهٔ تعداد جواب‌های آن تحقیق کنید.

۱۷۲- بدون حل‌کردن دستگاه $\begin{cases} ۳x+۲y=۷ \\ ۶x+۴y=۱۴ \end{cases}$ دربارهٔ تعداد جواب‌های آن تحقیق کنید.

۱۷۳- مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۳y=-۳ \\ ۴x+(m+۴)y=۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد. *(نهایی خرداد ۹۸ و مشابه شهریور ۱۴۰۲)*

۱۷۴- دستگاه $\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$ به ازای چه مقادیری از m دارای جواب منحصربه‌فرد می‌باشد؟ *(نهایی دی ۹۷)*

۱۷۵- به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -۴x+(m-۳)y=۳ \\ ۲x-\frac{m-۳}{۲}y=۱ \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد؟ *(نهایی خرداد ۱۴۰۳)*

۱۷۶- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+۳y=۵ \\ x-ky=۴ \end{cases}$ یک جواب منحصربه‌فرد داشته باشد، تمام مقدارهای k را به دست آورید.

۱۷۷- اگر دستگاه $\begin{cases} ۱۸x+ky=۲ \\ kx+۲y=۷ \end{cases}$ فاقد جواب باشد، مقدار k را مشخص کنید.

۱۷۸- الف) به ازای چه مقداری از m، دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ mx+۶y=-۴ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

ب) دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ ۲x+۶y=-۴ \end{cases}$ را با استفاده از A^{-1} حل کنید. *(نهایی شهریور ۹۹)*

۱۷۹- الف) حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx+۳y=۱ \\ ۲x-y=۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصربه‌فرد باشد. *(نهایی خرداد ۹۹)*

ب) جواب دستگاه مذکور را به ازای $m=۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

۱۸۰- مقدار k را چنان بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} (k-۲)x+۳y=۲k+۲ \\ ۴x+(k+۲)y=۴ \end{cases}$ دارای جواب نباشد.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟ الف) یک ماتریس قطری از مرتبهٔ $n\times n$ دارای $n^۲-n$ درایهٔ صفر است. ب) دو ماتریس هم‌مرتبه زمانی برابرند که درایه‌های نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند. پ) دو ماتریس مربعی را همواره می‌توان با هم جمع یا از یکدیگر کم کرد. ت) اگر دترمینان ماتریس مربعی، مخالف صفر باشد، آن ماتریس وارون‌پذیر است. ث) اگر $A^۳=-I$ باشد، آن‌گاه $A^{-1}=-A^۲$. ج) اگر A، B و C سه ماتریس باشند و داشته باشیم $AB=AC$، آن‌گاه $B=C$.			۱/۵

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید تا گزاره‌ای درست حاصل شود. الف) ماتریس اسکالر، ماتریسی است که تمام درایه‌های .... برابر صفر و تمام درایه‌های .... برابر باشند. ب) اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $A \times B$ ماتریسی از .... است. پ) وارون ماتریس A، ماتریسی است که اگر در ماتریس A ضرب شود، حاصل‌ضرب برابر .... باشد. ت) شرط این‌که یک دستگاه دو معادله دومجهولی دارای جواب منحصربه‌فرد باشد، آن است که دترمینان ضرایب .... باشد. ث) دترمینان یک ماتریس قطری برابر با .... است.			۱/۵
۳	ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ به صورت روبه‌رو تعریف شده است: $a_{ij}=\begin{cases} i+2j & i<j \\ j-2i & i=j \\ j^i & i>j \end{cases}$ ماتریس A را با درایه‌هایش تشکیل دهید.			۱
۴	اگر $A=\begin{bmatrix}2&-4\\1&-2\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس B را چنان بیابید که ضرب دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند.			۱
۵	اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&0&1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&1&0\\2&3&1\end{bmatrix}$ و I_3 ماتریس همانی مرتبهٔ ۳ باشد، حاصل $\|A\times B\|-\|3I_3\|$ را پیدا کنید.			۱/۵
۶	اگر حاصل $\begin{bmatrix}2&1\\x&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a&1\\2&a\end{bmatrix}$ ماتریس قطری باشد، مقادیر x و a را پیدا کنید.			۱
۷	اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x^2&3\\2&y\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}y-1&x+1\\2&2z\end{bmatrix}$ برابر باشند، حاصل $x+2y+4z$ را مشخص کنید.			۱
۸	اگر $A=\begin{bmatrix}0&1\\3&0\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس‌های A^5 و A^8 را پیدا کنید.			۱/۵
۹	اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ و $a_{ij}=\frac{2i-1}{j+1}$، آن‌گاه درایه‌های ماتریس A^2 را پیدا کنید.			۱/۵
۱۰	اگر $A^2=A$، آن‌گاه حاصل $(A+I)^3$ را برحسب A و I پیدا کنید.			۱/۵
۱۱	اگر ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B تعویض‌پذیر باشند، $A^2=A$ و $B^2=B$، آن‌گاه ساده‌ترین صورت ماتریس $(A+B)^3$ را به دست آورید.			۱
۱۲	دستگاه دو معادله دومجهولی روبه‌رو را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید: $\begin{cases}3x+5y=4\\4x-y=13\end{cases}$			۱
۱۳	اگر $A=\begin{bmatrix}-\|A\|&4\\\|A\|+5&\|A\|+7\end{bmatrix}$، آن‌گاه $\|A\|$ را پیدا کنید.			۱
۱۴	از معادلهٔ ماتریسی زیر، مقدار x را به دست آورید: $\begin{bmatrix}1&2&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\1&0&2\\1&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\x\\-12\end{bmatrix}=-55$			۱/۵
۱۵	حدود k را چنان تعیین کنید که دستگاه روبه‌رو دارای جواب منحصربه‌فرد باشد: $\begin{cases}(k-2)x+3y=1\\12x+(k+3)y=5\end{cases}$			۱
۱۶	اگر A ماتریسی از مرتبهٔ 3×3 و $\|A\|=3$، آن‌گاه حاصل عبارت‌های $\|\|A\|A\|$ و $\|\frac{1}{\|A\|}A\|$ را پیدا کنید.			۱/۵
	مجموع نمرات			۲۰

۱. ۲ $\quad a_{32}=\frac{2\times 3}{2+1}=2$

۲. ۲۴ $\quad 4\times 6=24$

۳. اسکالر

۴. ۱ $\quad m-1=0 \Rightarrow m=1$

۵. قطری

۶. اسکالر نیست ـ اسکالر ـ قطری است.

۷. ۲

$$\begin{cases} r=1 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \end{cases} \Rightarrow r+m=2$$

۸. اسکالر

۹. $\frac{1}{2}$ $\quad 2k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

۱۰. ۳ $\quad 2x-1=5 \Rightarrow x=3$

۱۱. نادرست؛ درایهٔ واقع بر سطر سوم، یعنی $i=3$ و ستون دوم، یعنی $j=2$ برابر a_{32} می‌شود که برابر است با: $a_{32}=3^2-3\times 2=9-6=3$

۱۲. درست

۱۳. درست

۱۴. با توجه به این‌که $m_{ij}=\begin{cases} 2 & : \ i<j \\ 1 & : \ i \not< j \end{cases}$، داریم:

$$\left.\begin{matrix} m_{11}=1, m_{12}=2, m_{13}=2 \\ m_{21}=1, m_{22}=1, m_{23}=2 \\ m_{31}=1, m_{32}=1, m_{33}=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های این ماتریس، برابر ۱۲ است.

۱۵. $a_{33}=2 \ , \ a_{31}=3+1=4 \ , \ a_{12}=1-2=-1$

۱۶. ماتریس $B_{3\times 3}$ با درایه‌های $b_{ij}=\begin{cases} i+1 & i=j \\ j-2 & i<j \\ 1 & i>j \end{cases}$ برابر است با:

$$B_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۷. ماتریس سطری A با ۶ درایه به صورت زیر است:

$$A_{1\times 6}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix}$$

و چون $a_{ij}=i+2j$، پس: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

۱۸. ۲تا؛ در یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n، اگر درایهٔ a_{ij} روی قطر فرعی واقع باشد، آن‌گاه $i+j=n+1$.

درایهٔ a_{14} روی قطر فرعی ماتریس 5×5 قرار ندارد، زیرا $1+4\neq 5+1$.

درایهٔ a_{42} روی قطر فرعی ماتریس 5×5 واقع است، زیرا $4+2=5+1$.

درایهٔ a_{33} نیز روی قطر فرعی قرار دارد و درایهٔ a_{25} روی قطر فرعی نیست.

۱۹. ماتریس اسکالر همان ماتریس قطری است، به شرطی که درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند؛ پس برای این‌که $A=\begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، باید:

(۱) $m-2=0 \Rightarrow m=2$ $\qquad$ (۲) $n=m=2$

۲۰. برای این‌که $A=\begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n-4 & 5 \end{bmatrix}$ قطری باشد، باید درایه‌هایی که خارج از قطر اصلی هستند را برابر با صفر قرار دهیم:

$m+1=0 \Rightarrow m=-1$ $\qquad$ $2n-4=0 \Rightarrow n=2$

پس ماتریس $A+I$ برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(اگر سؤال m و n را نمی‌خواست، برای محاسبهٔ $A+I$ نیازی به محاسبهٔ آن‌ها نداشتیم.)

۲۱. در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع روی قطر اصلی صفر هستند، پس:

$$-2x+4=0 \Rightarrow x=2$$
$$7+y=0 \Rightarrow y=-7$$

۲۲. درایه‌های غیرواقع روی قطر اصلی باید همگی صفر باشند، پس:

$$c=0 \quad (1)$$
$$3a+b-c=0 \xrightarrow{(1)} b=-3a \Rightarrow \frac{b}{a}=-3$$

۲۳.

$$A=B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x+y=5 \Rightarrow y=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

اکنون داریم: $x+y+z=\frac{3}{2}+2+(-2)=\frac{3}{2}$

۲۴.

$$A=B \Rightarrow \begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=y+1 \\ 8=x-2 \Rightarrow x=10 \\ z+1=4 \Rightarrow z=3 \end{cases}$$

از رابطهٔ $x-1=y+1$، با توجه به این‌که $x=10$ است، نتیجه می‌شود $y=8$ و در نتیجه: $x+y+z=10+8+3=21$

۲۵. دو ماتریس از مرتبهٔ 2×1 هستند؛ پس کافی است درایه‌های نظیر به نظیر برابر باشند: $\begin{cases} z-2=1 \Rightarrow z=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt[4]{y+1}=0 \end{cases}$

می‌دانیم $\sqrt{x}\geq 0$ و $\sqrt[4]{y+1}\geq 0$، پس $\sqrt{x}+\sqrt[4]{y+1}\geq 0$ و تنها زمانی $\sqrt{x}+\sqrt[4]{y+1}$ می‌تواند صفر باشد که هر کدام از عامل‌های جمع، صفر باشند؛ یعنی $x=0$ و $y=-1$. اکنون داریم: $z^x+y=3^0+(-1)=1-1=0$

۲۶. برای این‌که $A=B$ باشد، باید درایه‌های نظیر در A و B را برابر قرار دهیم:

$$\begin{cases} 3=2x-y \\ 5=2x+y \\ z=-3 \end{cases} \xrightarrow{+} 4x=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1$$

در نتیجه خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$x^2-2y+z=2^2-2\times 1-3=4-5=-1$$

۲۷. ماتریس A از مرتبهٔ 3×2 و ماتریس B از مرتبهٔ 2×3 است و چون این دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند، پس جمع این دو ماتریس تعریف‌نشده است.

۲۸. ابتدا ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1^2 & 2\times 1-2 & 2\times 1-3 \\ 2\times 1 & 2^2 & 2\times 2-3 \\ 3\times 1 & 3\times 2 & 3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس $2A-3I$ را به‌دست می‌آوریم:

$$2A-3I=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

۲۹. جمع دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A_{2\times2}$ و $B_{2\times2}$ برابر است با:

$$A+B=\begin{bmatrix}5&4\\8&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+1&y+2\\3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3\\5&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x+3&y+5\\8&3\end{bmatrix}$$

دو ماتریس زمانی با هم برابرند که درایه‌های نظیرشان برابر باشند؛ پس:

$$x+3=5 \Rightarrow x=2 \qquad y+5=4 \Rightarrow y=-1$$

۳۰. عبارت صورت سؤال را با استفاده از ماتریس‌های A و B می‌سازیم:

$$2A-3I=B \Rightarrow 2\begin{bmatrix}1&x\\2&y\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&2\\b&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2\times1-3\times1&2\times x-0\\2\times2-0&2\times y-1\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&2\\b&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-1&2x\\4&2y-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&2\\b&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=4\\2x=2 \Rightarrow x=1\\2y-3=3 \Rightarrow y=3\end{cases} \Rightarrow xy-ab=7$$

۳۱. با توجه به تعریفی که از a_{ij} داده شده است، داریم:

$$\begin{cases}a_{11}=2\times1-1=1\ ,\ a_{12}=1^2-2=-1\ ,\ a_{13}=1^2-3=-2\\a_{21}=1^2-2=-1\ ,\ a_{22}=2\times2-1=3\ ,\ a_{23}=2^2-3=1\\a_{31}=1^2-3=-2\ ,\ a_{32}=2^2-3=1\ ,\ a_{33}=2\times3-1=5\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\-1&3&1\\-2&1&5\end{bmatrix}$$

توجه داشته باشیم که به عنوان مثال؛ $\text{Min}\{5,1\}=1$ یا $\text{Min}\{2,-3\}=-3$، همچنین $\text{Min}\{2,2\}=2$.

اکنون با توجه به تعریفی که از b_{ij} داده شده است؛ داریم:

$$\left.\begin{matrix}b_{11}=1, b_{12}=1, b_{13}=1\\b_{21}=1, b_{22}=2, b_{23}=2\\b_{31}=1, b_{32}=2, b_{33}=3\end{matrix}\right| \Rightarrow B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$2A-3B=2\times\begin{bmatrix}1&-1&-2\\-1&3&1\\-2&1&5\end{bmatrix}-3\times\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&-5&-7\\-5&0&-4\\-7&-4&1\end{bmatrix}$$

۳۲. درایهٔ سطر اول و ستون دوم A و B به ترتیب برابر a_{12} و b_{12} است:

$$a_{12}=1+2\times2=5$$

$$b_{12}=1^2-2=-1$$

در نتیجه:

$$2a_{12}+b_{12}=2\times5-1=9$$

۳۳. برای به دست آوردن $A+B$ کافی است $A+2B$ را با $2A+B$ جمع کرده و تقسیم بر ۳ کنیم. ببینید:

$$\frac{A+2B+B+2A}{3}=\frac{3A+3B}{3}=A+B$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{\begin{bmatrix}3&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\9&-1\end{bmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3&3\\12&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\4&1\end{bmatrix}$$

۳۴. ابتدا ماتریس A را به‌دست می‌آوریم:

$$2A+\begin{bmatrix}1&2\\2&m\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&-9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A=\begin{bmatrix}3&0\\0&-6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\2&m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2\\-2&-6-m\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&\frac{-6-m}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{مجموع مقادیر}}1+\frac{-6-m}{2}=-4$$

$$\Rightarrow -6-m=-10 \Rightarrow m=4$$

۳۵. $kA+tB=kB+tA \Rightarrow kA-tA=kB-tB$

$$\Rightarrow (k-t)A=(k-t)B$$

چون k و t دو عدد حقیقی متمایزند، پس $k-t\neq0$ و در نتیجه $A=B$.

۳۶. $-\frac{3}{4}$؛

$$AB=\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2x\\y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-y&4x-1\\1+y&2x+1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}\\1+y=0 \Rightarrow y=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow x+y=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

۳۷. همانی؛ (I)

۳۸. $-I$ می‌دانیم که:

$$(\frac{1}{2}A)^3=\frac{1}{2^3}\times A^3$$

حالا با ضرب ماتریس‌ها در یکدیگر، حاصل A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt{3}\\2\sqrt{3}&-2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=-2\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$$

$$=-2\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصل $\frac{1}{8}A^3$ برابر است با:

$$\frac{1}{8}\times(-2)\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\times4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=-I$$

۳۹. B $\qquad B^{25}=(B^2)^{12}\times B=I^{12}\times B=IB=B$

۴۰. $A\neq0$ $\qquad$ **۴۱.** نادرست

۴۲. نادرست؛ ضرب ماتریس‌ها دارای ویژگی حذف نیست.

۴۳. نادرست؛ (چون در حالت کلی، ضرب دو ماتریس دارای خاصیت جابه‌جایی نیست، پس اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار نیست.)

۴۴. نادرست؛ (کافی است سطر دوم ماتریس A را در تک‌تک ستون‌های آن ضرب کنیم تا سطر دوم A^2 به دست آید.)

$$\text{سطر دوم } A^2=\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&0&-1\\2&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&-4\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های سطر دوم برابر ۴- است.

۴۵. درست

۴۶. نادرست؛ حاصل A^2 و A^3 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2=\begin{bmatrix}5&-2\\10&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2\\10&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\10&-4\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}5&-2\\10&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2\\10&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2\\10&-4\end{bmatrix}$$

و نتیجه می‌گیریم که $A^n=A$، پس $A^{1403}=A$ و جمله نادرست است.

۴۷. ابتدا ماتریس A را پیدا می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1^2-1&2-1&3-1\\2-1&2^2-1&3-2\\3-1&3-2&3^2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&3&1\\2&1&8\end{bmatrix}$$

اکنون حاصل $A\times B$ را به دست می‌آوریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&3&1\\2&1&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\2&0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&12\\1&10&11\\19&5&42\end{bmatrix}$$

۴۸. عملیات ضرب ماتریس‌ها را انجام می‌دهیم. برای این منظور، ابتدا دو ماتریس چپ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}1&3&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&4\\3&-1\\6&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41&26\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=26$$

۴۹. با توجه به این‌که $a_{ij}=i+j$ و $b_{ij}=i-j$؛ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$$

اکنون حاصل AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&2&-7\\14&2&-10\\17&2&-13\end{bmatrix}$$

اکنون به سادگی معلوم می‌شود که مجموع درایه‌های ماتریس AB، برابر ۱۸ است.

۵۰. ابتدا حاصل $A\times B$ را به دست می‌آوریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}4&a\\b&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3a&-8+2a\\b-3&-2b-2\end{bmatrix}$$

یک ماتریس مربعی، وقتی قطری است که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند؛ پس:

$$\begin{cases}-8+2a=0 \Rightarrow a=4\\ b-3=0 \Rightarrow b=3\end{cases}$$

۵۱. چون A ماتریسی قطری است؛ پس باید تمام درایه‌هایی که روی قطر اصلی نیستند صفر باشند، در نتیجه باید $m-2=0$ و $n+1=0$ باشند، در نتیجه $m=2$ و $n=-1$.

اکنون $A\times B$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1&1\\2&0&-1\\3&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&2\\6&0&-3\\9&-3&6\end{bmatrix}$$

۵۲. ابتدا حاصل‌ضرب را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&a&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&4\\0&-1&1\\0&0&2a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&5+2a\\0&-a&3a\\0&0&2a\end{bmatrix}$$

در ماتریس فوق، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی و زیر آن، برابر $a+2$ است، پس $a+2=-7$ یا $a=-9$. اکنون داریم:

$$\text{مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی}=4+(5+2a)+3a=5a+9$$

$$\underset{a=-9}{=}-45+9=-36$$

۵۳. فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، پس باید داشته باشیم:

$$A\times B=\bar{O}\Rightarrow\begin{bmatrix}6&9\\2&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}6a+9c&6b+9d\\2a+3c&2b+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

می‌دانیم دو ماتریس، زمانی برابرند که **تمام** درایه‌های نظیر از دو ماتریس، با هم برابر باشند، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\left.\begin{cases}6a+9c=0\\2a+3c=0\end{cases}\right\}\text{این دو معادله یکسان هستند}\Rightarrow 2a+3c=0\\ \qquad\Rightarrow c=-\frac{2}{3}a\\ \left.\begin{cases}6b+9d=0\\2b+3d=0\end{cases}\right\}\text{این دو معادله یکسان هستند}\Rightarrow 2b+3d=0\\ \qquad\Rightarrow d=-\frac{2}{3}b\end{cases}$$

پس ماتریس B به صورت $B=\begin{bmatrix}a&b\\-\frac{2}{3}a&-\frac{2}{3}b\end{bmatrix}$ است: به ازای هر مقدار دلخواه که به a و b نسبت دهیم، یک ماتریس مانند B به دست می‌آید. به عنوان مثال؛ اگر فرض کنیم $a=3$ و $b=-6$، آن‌گاه $B=\begin{bmatrix}3&-6\\-2&4\end{bmatrix}$ و در نتیجه:

$$AB=\begin{bmatrix}6&9\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-6\\-2&4\end{bmatrix}=\bar{O}$$

حالا $B\times A$ را پیدا می‌کنیم:

$$B\times A=\begin{bmatrix}3&-6\\-2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6&9\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18-12&27-18\\-12+8&-18+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&9\\-4&-6\end{bmatrix}\neq\bar{O}$$

از این مثال نتیجه می‌گیریم که اگر $A\times B=\bar{O}$ باشد، دلیلی ندارد $B\times A$ نیز برابر ماتریس صفر باشد.

۵۴. برای انجام عملیات کم‌تر، درایهٔ سطر دوم، ستون اول ماتریس $M=ABA$ را به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

(ستون اول ماتریس $B\times A$) × (سطر دوم ماتریس A)

پس داریم:

$$\text{درایهٔ } m_{21}=\begin{bmatrix}-1&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=8-1=7$$

۵۵. ماتریس‌ها را از چپ به راست در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&-2\\0&1&-3\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&-2\\-1&1&-3\\0&-1&3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3&3&-2\\-1&1&-3\\0&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&2\\-2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3&7\\4&-10&-2\\-5&9&1\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس A برابر است با:

$$4+4-5-3-10+9+7-2+1=5$$

آزمون‌های نوبت اوّل و دوم

ردیف	نمونه امتحان نیم‌سال اول — امتحان شمارهٔ ۱	رشتهٔ ریاضی و فیزیک — مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	هندسه ۳ — Kheilisabz.com	نمره
	فصل ۱			
۱	ماتریسی اسکالر از مرتبهٔ ۴ بنویسید که مجموع تمام درایه‌های آن ۳۶ باشد.			۱
۲	با فرض این‌که X ماتریسی ۲×۲ باشد، از رابطهٔ مقابل، ماتریس X را مشخص کنید: $۲\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&-۵\end{bmatrix}+۳X=\begin{bmatrix}۱&-۶\\۲&-۱\end{bmatrix}$			۱/۲۵
۳	اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۵\end{bmatrix}$ و $I=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^۲-۲AI+۳I$ را پیدا کنید.			۱
۴	ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ به صورت‌های $a_{ij}=\begin{cases}۲ & : i\neq j\\ i+j & : i=j\end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases}i+j & : i\neq j\\ i-۱ & : i=j\end{cases}$ تعریف شده‌اند. حاصل $B\times A$ را مشخص کنید.			۱/۲۵
۵	اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۴&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۱&۴\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریسی مخالف B چنان بیابید که رابطهٔ $AB=AC$ برقرار باشد.			۱
۶	اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x+۳y&۵\\۲&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&x^۲+۴y\\۲&y-x\end{bmatrix}$ برابر باشند، آن‌گاه x و y را پیدا کنید.			۰/۷۵
۷	اگر A و B دو ماتریس قطری از مرتبهٔ ۳ باشند، حاصل $A\times B$ را تشکیل دهید و نتیجهٔ حاصل را بیان کنید. آیا AB و BA برابر هستند؟			۱
۸	اگر $A=[۲]$، $B=\begin{bmatrix}۳&۴\\۱&۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۳&۱&۲\\۲&۱&۳\\۳&۱&۰\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $\lvert A\rvert+\lvert B\rvert+\lvert C\rvert$ را به دست آورید.			۱
۹	اگر $A=\begin{bmatrix}۵\\۲\\۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳&-۱&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $\lvert AB\rvert$ را پیدا کنید. (دترمینان AB را پیدا کنید.)			۰/۷۵
۱۰	دستگاه معادلات $\begin{cases}۳x+۲y=۴\\ x-y=۳\end{cases}$ را در نظر بگیرید. بدون حل دستگاه، بررسی کنید که این دستگاه دارای جواب است؛ سپس با استفاده از ماتریس وارون، آن را حل کنید.			۱
	فصل ۲			
۱۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y-۴=۰$ برابر .... است. ب) مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت $\frac{r}{۲}$ که بر دایرهٔ $C(O,۲r)$ در صفحهٔ این دایره مماس‌خارجی هستند، دایرهٔ $C'(......,......)$ خواهد بود.			۰/۲۵ ۰/۵
۱۲	اگر صفحه‌ای بر محور یک رویهٔ مخروطی عمود نباشد و از رأس رویه نیز نگذرد و با هیچ‌یک از یال‌های آن موازی نباشد، مقطع آن صفحه با رویهٔ مخروطی چه شکل‌هایی می‌تواند باشد؟			۱
۱۳	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A(۱,-۲)$ بگذرد و بر دو محور مختصات، مماس باشد.			۲
۱۴	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۴,۱)$ باشد و روی خط $۳x-۴y=-۲$ وتری به طول ۸ جدا کند.			۱/۲۵
۱۵	وضعیت نسبی خط $۴x-۳y=۰$ با دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۰$ را مشخص کنید.			۱/۵
۱۶	معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلثی را که مختصات سه رأس آن $A(۲,۱)$، $B(۳,۲)$ و $O(۰,۰)$ باشند، پیدا کنید. سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در نقطهٔ A پیدا کنید.			۲
۱۷	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(-۲,۴)$ و $B(۴,۶)$ بگذرد و معادلهٔ یکی از قطرهای آن $x+y=۴$ باشد.			۱/۵
	جمع نمرات			۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند و بقیهٔ درایه‌های آن صفر هستند. اگر درایه‌های روی قطر اصلی، a باشند، آن‌گاه مجموع تمام درایه‌های این ماتریس $۴a$ است، پس $۴a=۳۶$ یا $a=۹$.

ماتریس موردنظر به صورت روبه‌رو است:

$$S=\begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$$

۲.

$$۳X=\begin{bmatrix} ۱ & -۶ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & -۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۶ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۸ & -۱۰ \end{bmatrix}$$

$$۳X=\begin{bmatrix} -۳ & -۱۲ \\ -۶ & ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow X=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} -۳ & -۱۲ \\ -۶ & ۹ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

۳.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۱۲ & ۶+۱۵ \\ ۸+۲۰ & ۱۲+۲۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۶ & ۲۱ \\ ۲۸ & ۳۷ \end{bmatrix}$$

همچنین می‌دانیم $AI=A$، پس داریم:

$$A^{۲}-۲AI+۳I=\begin{bmatrix} ۱۶ & ۲۱ \\ ۲۸ & ۳۷ \end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱۶-۴+۳ & ۲۱-۶+۰ \\ ۲۸-۸+۰ & ۳۷-۱۰+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۵ & ۱۵ \\ ۲۰ & ۳۰ \end{bmatrix}$$

۴. می‌دانیم که:

$$B=\begin{bmatrix} ۱-۱ & ۱+۲ \\ ۲+۱ & ۲-۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۲ \\ ۲ & ۲+۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}.$$

حالا $B\times A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰+۶ & ۰+۱۲ \\ ۶+۲ & ۶+۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۱۲ \\ ۸ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

۵. اگر فرض کنیم $C=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$AB=AC \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۶ & ۱۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲x+z & ۲y+t \\ ۴x+۲z & ۴y+۲t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} ۲x+z=۳ \\ ۴x+۲z=۶ \end{array}\right| \Rightarrow ۲x+z=۳ \quad (۱) \\ \left.\begin{array}{l} ۲y+t=۶ \\ ۴y+۲t=۱۲ \end{array}\right| \Rightarrow ۲y+t=۶ \quad (۲) \end{cases}$$

اگر فرض کنیم $x=۱$، آن‌گاه از (۱) نتیجه می‌شود $z=۱$ و اگر فرض کنیم $y=۵$، آن‌گاه از (۲) نتیجه می‌شود $t=-۴$، در نتیجه یکی از ماتریس‌های ممکن به صورت $C=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}$ است.

۶. دو ماتریس هم‌مرتبه‌اند، پس برای این‌که با هم برابر باشند باید درایه‌های نظیر آن با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$\begin{cases} x+۳y=۲ \\ x^{۲}+۴y=۵ \\ y-x=۲ \end{cases}$$

از رابطه‌های اول و سوم نتیجه می‌شود $y=۱$ و $x=-۱$. این دو مقدار در رابطهٔ دوم هم صدق می‌کنند، پس باید $x=-۱$ و $y=۱$ باشد.

توجه: اگر x و yای که از دو معادله به دست می‌آیند، در معادلهٔ سوم صدق نکنند، آن‌گاه باید می‌گفتیم «به ازای هر مقدار x و y، این دو ماتریس، مساوی نیستند.»

۷. اگر $A=\begin{bmatrix} a_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} b_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & b_۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم:

$$AB=\begin{bmatrix} a_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & b_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & b_۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_۱b_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_۲b_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_۳b_۳ \end{bmatrix}$$

می‌توان نتیجه گرفت که حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است که درایه‌های نظیر از قطر اصلی آن‌ها در یکدیگر ضرب شده‌اند. با توجه به نتیجهٔ فوق به سادگی نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری دارای خاصیت جابه‌جایی است؛ یعنی $AB=BA$.

۸. دترمینان هر ماتریس ۱×۱ برابر با درایهٔ آن است، پس $|A|=۲$.

از طرفی:

$$|B|=\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=۳\times۲-۱\times۴=۲$$

دترمینان ماتریس C را که از مرتبهٔ ۳×۳ است با روش ساروس پیدا می‌کنیم.

$$|C|=\left|\begin{array}{ccc|cc} ۳ & ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ & ۳ & ۱ \end{array}\right.$$

$$=۳\times۱\times۰+۱\times۳\times۳+۲\times۲\times۱-(۲\times۱\times۳+۳\times۳\times۱+۱\times۲\times۰)$$

$$=۰+۹+۴-(۶+۹+۰)=-۲$$

در نتیجه:

$$|A|+|B|+|C|=۲+۲+(-۲)=۲$$

۹. ابتدا باید ماتریس AB را پیدا کرده و سپس دترمینان آن را به دست آوریم.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۵ & -۵ & ۵ \\ ۶ & -۲ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A\times B|=\left|\begin{array}{ccc|cc} ۱۵ & -۵ & ۵ & ۱۵ & -۵ \\ ۶ & -۲ & ۲ & ۶ & -۲ \\ ۳ & -۱ & ۱ & ۳ & -۱ \end{array}\right.$$

$$=-۳۰-۳۰-۳۰-(-۳۰-۳۰-۳۰)=۰$$

۱۰. شیب خط اول $-\frac{۳}{۲}$ و شیب خط دوم برابر با ۱ است. چون شیب‌های این دو خط، برابر نیستند، پس این دو خط، موازی نیستند، در نتیجه متقاطع‌اند و دستگاه دارای جواب است (مختصات نقطهٔ برخورد دو خط همان x و yای هستند که در دستگاه صدق می‌کنند).

ماتریس ضرایب این دستگاه $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، ماتریس معلومات آن $B=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس مجهولات آن $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ است، پس فرم ماتریسی این دستگاه به صورت $AX=B$ است و چون $|A|=-۵\neq۰$، پس A ماتریس وارون‌پذیر است و $A^{-۱}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$.

$$X=A^{-۱}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۱۰ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

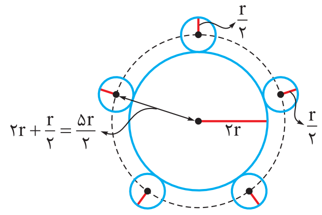
$$=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases}$$

۱۱. الف ۳؛

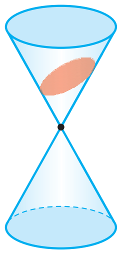
$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-4)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$$

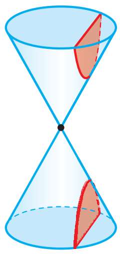
ب $(O,\frac{5r}{2})$؛



۱۲. چون صفحه بر محور رویهٔ مخروطی عمود نیست و از رأس رویه نیز نمی‌گذرد، پس دو حالت دارد:

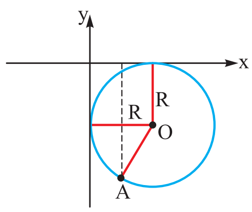


الف **صفحهٔ موردنظر، تمام یال‌های سطح رویه را در یک طرف رأس قطع می‌کند**؛ در این صورت، مقطع حاصل، یک بیضی است.



ب **صفحهٔ موردنظر، تمام یال‌های سطح رویه را در دو طرف رأس قطع می‌کند**؛ در این صورت، مقطع حاصل، یک هذلولی است.

۱۳. چون نقطهٔ $A(1,-2)$ در ربع چهارم قرار دارد و دایره‌ای که از این نقطه می‌گذرد بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز دایره باید در ربع چهارم باشد. بنابراین اگر شعاع دایره R باشد، مختصات مرکز دایره $O(R,-R)$ است. طول پاره‌خط OA برابر شعاع دایره است.



$$R=OA=\sqrt{(R-1)^2+(-R+2)^2}$$

دو طرف این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم.

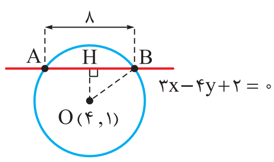
$$R^2=(R^2-2R+1)+(R^2-4R+4)$$

$$\Rightarrow R^2-6R+5=0 \Rightarrow \begin{cases}R=1\\R=5\end{cases}$$

اگر $R=1$ باشد، معادلهٔ دایره $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ و اگر $R=5$ باشد، معادلهٔ آن به صورت $(x-5)^2+(y+5)^2=25$ است.

۱۴. اگر از $O(4,1)$ مرکز دایره بر وتر $3x-4y+2=0$ عمود کنیم، OH پاره‌خط AB را نصف می‌کند و بر آن عمود است؛ پس: $\hat{H}=90^\circ$

$HB=HA=4$



از طرفی OH برابر فاصلهٔ O تا AB است؛ پس:

$$OH=\frac{|3(4)-4(1)+2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

$\overset{\Delta}{OHB}$ قائم‌الزاویه است، در نتیجه طبق فیثاغورس داریم:

$$OB^2=2^2+4^2=4+16=20 \Rightarrow OB=R=2\sqrt{5}$$

حالا معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر برابر است با: $(x-4)^2+(y-1)^2=20$

۱۵. مرکز دایره $O(-1,2)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-0}=\sqrt{5}$$

فاصلهٔ مرکز دایره را از خط $4x-3y=0$ پیدا می‌کنیم:

$$d=\frac{|4\times(-1)-3\times 2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$$

چون فاصلهٔ مرکز دایره از خط، کم‌تر از شعاع است، پس خط و دایره متقاطع هستند.

۱۶. اگر فرض کنیم معادلهٔ دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد، آن‌گاه باید مختصات سه نقطهٔ A، B و O در آن صدق کنند.

$$A(2,1) \Rightarrow 4+1+2a+b+c=0 \Rightarrow 2a+b+c=-5 \quad (1)$$

$$B(3,2) \Rightarrow 9+4+3a+2b+c=0 \Rightarrow 3a+2b+c=-13 \quad (2)$$

$$O(0,0) \Rightarrow 0+0+0+0+c=0 \Rightarrow c=0$$

اگر در (۱) و (۲) به جای c، عدد صفر را قرار دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases}2a+b=-5\\3a+2b=-13\end{cases} \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{معادلهٔ اول را در } -2} \begin{cases}-4a-2b=10\\3a+2b=-13\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} -a=-3$$

پس $a=3$ و $b=-11$.

در نتیجه معادله دایره به صورت $x^2+y^2+3x-11y=0$ است.

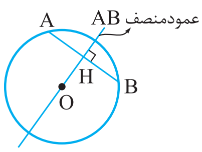
مختصات مرکز این دایره $O'(-\frac{3}{2},\frac{11}{2})$ است. خط مماس بر دایره در نقطهٔ A بر $O'A$ عمود است، پس شیب خط مماس، برابر قرینهٔ عکس شیب $O'A$ می‌باشد:

$$\text{شیب } O'A=\frac{1-\frac{11}{2}}{2-(-\frac{3}{2})}=\frac{-\frac{9}{2}}{\frac{7}{2}}=-\frac{9}{7}$$

پس شیب خط مماس $m=\frac{7}{9}$ است و چون خط مماس از $A(2,1)$ می‌گذرد، معادلهٔ آن به صورت زیر می‌باشد:

$$y-1=\frac{7}{9}(x-2) \Rightarrow y=\frac{7}{9}x-\frac{5}{9}$$

۱۷. چون AB وتری از دایره است، پس عمودمنصف AB از مرکز دایره می‌گذرد. ابتدا معادلهٔ عمودمنصف AB را پیدا می‌کنیم:



$$\text{وسط } AB: H(\frac{4+(-2)}{2},\frac{6+4}{2})=(1,5)$$

$$\text{شیب } AB: m_1=\frac{6-4}{4-(-2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \Rightarrow m=-3 \quad \text{شیب عمودمنصف}$$

$$\text{معادلهٔ عمودمنصف } AB \quad y-5=-3(x-1) \Rightarrow y=-3x+8$$

چون $x+y=4$ یک قطر دایره است، پس این خط نیز از مرکز دایره می‌گذرد، در نتیجه نقطهٔ برخورد این خط با عمودمنصف AB، مرکز دایره است.

$$\begin{cases}y=-3x+8\\x+y=4\end{cases} \Rightarrow x-3x+8=4 \Rightarrow x=2 \text{ و } y=2$$

یعنی مرکز دایره $O(2,2)$ است. فاصلهٔ O از هر نقطه‌ای که روی محیط دایره باشد برابر شعاع دایره است:

$$R=OA=\sqrt{(2+2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}$$

پس معادلهٔ دایره به صورت $(x-2)^2+(y-2)^2=20$ است.