



پایه یازدهم

مادر برای بیست هزار ساله

زهرا جالینوسی

درسنامه سوال‌های امتحانی با پاسخ تشریحی امتحان نهایی

درسنامه‌های کاملاً کاربردی، روان و گویا منطبق بر کتاب درسی به همراه بیش از ۷۰ مثال آموزشی

بیش از ۴۵۰ نمونه سوال امتحانی تألیفی و برگرفته از آزمون‌های مدارس برتر کشور با پاسخ‌های کاملاً تشریحی

پوشش کامل همه مثال‌ها، اثبات‌ها، تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی

ارائه سوال‌های امتحانی دشوار جهت شبیه‌سازی و پیش‌بینی سوالات امتحان نهایی

تیپ‌بندی سوال‌های امتحانی در قالب «در امتحان چه خبر؟»

امتحان‌های استاندارد نوبت اول و دوم، شامل نهایی خرداد ۱۴۰۳



همین دیروز برام یه اتفاقی افتاد که از نظر خودم جالب بود و تا حدی نگاهم رو نسبت به آدم‌ها تغییر داد. دیروز توی تاکسی نشسته بودم و راننده آهنگی گذاشته بود و گاهی هم خودش باهاش هم‌خونی می‌کرد. من خیلی عمیق داشتم به سوژه برای مقدمه کتاب ماجرای بیست هندسه فکر می‌کردم و حواسم به آهنگ نبود و فقط در حد یک پس‌زمینه گنگ و مبهم آهنگ رو می‌شنیدم. همین‌طور داشتم به مفاهیم دایره، چندضلعی، مثلث و قضیه کسینوس‌ها فکر می‌کردم که یک‌دفعه بخش شنوایی قشر مخم فعال شد و قسمتی از ترانه که راننده با خواننده هم‌خوانی می‌کرد شفاف شد:

پشیمات مٹ مٹ! ...

واقعاً؟ چه هم‌زمانی باحالی! شاعر این ترانه هم درگیر مفاهیم هندسی شده و ظاهراً این نوع نگاه، طرفدار هم داره. این شد که از دیروز یه جور دیگه به چشم مردم نگاه می‌کنم و توی چشم‌ماشون دنبال نیمساز زوایای داخلی می‌گردم که آیا نیمسازهای مثلث چشم‌ماشون دقیقاً از مرکز دایره مردمکشان می‌گذرد یا نمی‌گذرد؟... از شوخی و جدی گذشته می‌خوام یه جمله بگم و برم: هندسه درس خیلی باحالیه به شرط این‌که مثل شاعر این ترانه زاویه دید هندسی به دنیا و زندگی داشته باشید.

این رو هم بگم که هر کی کتاب ماجرای بیست هندسه رو کامل بخونه و بفهمه، امکان نداره ۲۰ نگیره.

دم خانم زهرا جالینوسی که هندسه رو خیلی مؤدبانه و تر و تمیز می‌نویسه، گرم!

دم خانم زهره قموشی که تا این کتاب بشه کتاب از پا ننشست، گرم!

دم ویراستارای این کتاب و دم بچه‌های قهرمان و همیشه در صحنه تولید گرم!

دم شما هم گرم!

مقدمه^۳ ناشر

تقدیم به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پرمهر پدرم

و به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

زهرای جالینوسی

به نام خداوند رنگین کمان

هندس معمولاً از اون درس‌هایی بوده که بچه‌ها برای یادگرفتنش با معلما و کتاباشون درگیر بودن و آخر سال هم برای این‌که بتونن به نمره خوبی بگیرن، چندتا قضیه کتاب درسی رو حفظ می‌کردن و از همونا هم توی امتحان میومد و تمام. اما بعد از این‌که تأثیر امتحان نهایی توی کنکور به ۶۰ درصد رسید، همه چی متفاوت شد. الان طراح‌های امتحان نهایی هم قراره سخت‌گیر بشن و برای این‌که سطح بچه‌ها رو مشخص کنن، فقط چندتا قضیه حفظی رو سؤال نمی‌دن و می‌رن سراغ کاربرد اون قضیه‌ها و سؤال‌های خیلی سخت‌تر ...

حالا ما توی خیلی سبز به راه حل پیدا کردیم براتون. برای این‌که بتونید ۶۰ درصد نمره نهایی کنکور رو توی مشتتون داشته باشید، این کارا رو انجام بدید:

از ابتدای سال تحصیلی کتاب **ماجرای بیست** هندسه ۲ رو تهیه کنید، هم‌زمان با درس‌دادن معلمتون، درس‌نامه و سؤال‌های اون رو حل کنید. بعد تک‌تک پاسخ‌هاتون رو با پاسخ‌نامه تشریحی کتاب چک کنید. حالا که به به تسلط نسبی رو سؤال‌ها رسیدید، برید سراغ سؤال‌های  که از همه سؤال‌ها سخت‌تره و شما رو برای سؤال‌های سخت احتمالی امتحان نهایی آماده می‌کنه. تماًااا. حالا دیگه ۲۰٪ گرفتن براتون مثل آب‌خوردن می‌شه ...

کتاب ماجرای بیست هندسه یازدهم اینا رو داره:

درس‌نامه: سعی کردیم خیلی ساده، روان و کاربردی (جوری که راحت بتونید هندسه رو بخونید، یاد بگیرید و حتی لذت ببرید) درس رو آموزش بدیم. مطالب اضافه در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازمه رو دارید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسیه، البته بیشتر جاها برای این‌که مطالب، طولانی نشه و حوصله‌تون سر نره، درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت رو جداگونه آوردیم.

در امتحان چه خبر: حجم مطالب در درس هندسه زیاده؛ پس خیلی مهمه که تا می‌تونید، مطالب رو تیپ‌بندی‌شده و منظم یاد بگیرید. ما سعی کردیم توی کادریهای (در امتحان چه خبر؟) این کار را برای شما انجام بدیم. مطالب هر درس رو تیپ‌بندی کردیم و سؤال‌های مربوط به هر تیپ رو هم مشخص کردیم. پس می‌تونید برید و سؤال‌های هر تیپی رو که خوب یاد نگرفتید، دوباره و دوباره حل کنید و بهشون مسلط بشید.

سؤال‌های امتحانی: همه مثال‌ها و تمرین‌های کتاب، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها و همه سؤال‌های نهایی توی این کتاب موجوده و به قول معروف پوشش کامل کتاب درسی و امتحان‌های نهایی به جوری رعایت شده که بعد از خوندن «**ماجرای بیست**» دیگه هیچ نگرانی‌ای ندارید که چیزی جا افتاده باشه.

سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت  است، سطح دشوارتری نسبت به بقیه سؤال‌ها داره و شما رو برای سؤال‌های سخت نهایی آماده می‌کنه.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید.

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب دو امتحان ترم اول داریم و چهارتا امتحان ترم دوم. حتماً قبل از امتحان نهایی این سؤال‌ها رو حل کنید و به بارم‌بندی اون‌ها هم توجه کنید که بدونید باید چه‌جوری جواب بدی که مصحح بهتون نمره کامل بده.

در پایان ممنون از:

دکتر نصری که خیلی‌سبز رو ساخت و درس‌خوندن رو برای بچه‌ها لذت‌بخش کرد ...

مهندس مهدی هاشمی که برای نوشتن این کتاب به ما اعتماد کرد.

خانم طاهری و خانم قموشی که زحمت هماهنگی‌ها رو کشیدند و خیلی اذیتشون کردیم.

ویراستارهای خوب مجموعه آقایان و خانم‌ها ماهک کناره، علیرضا کاظمی‌بقا و لیلا سمیعی‌عارف که برای بهترشدن کتاب به ما کمک کردن.

شما بچه‌های پرانگیزه که برای آینده بهتر خودتون تلاش می‌کنید.

شهریور ۱۴۰۳

فهرست

فصل اول: دایره

درسنامه سؤال‌های امتحانی

۱۱	۸	بخش ۱: مفاهیم اولیه دایره
۱۶	۱۲	بخش ۲: انواع زاویه در دایره
۲۱	۱۸	بخش ۳: وتر در دایره
۲۵	۲۳	بخش ۴: روابط طولی در دایره
۳۰	۲۷	بخش ۵: مماس در دایره‌ها
۳۸	۳۲	بخش ۶: چندضلعی‌های محیطی و محاطی
۹۰		پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

درسنامه سؤال‌های امتحانی

۴۷	۴۲	بخش ۱: تبدیل‌های هندسی بازتاب
۵۱	۴۸	بخش ۲: تبدیل‌های هندسی: انتقال
۵۷	۵۳	بخش ۳: تبدیل‌های هندسی: دوران
۶۴	۵۸	بخش ۴: تبدیل‌های هندسی: تجانس و همانی
۷۰	۶۶	بخش ۵: کاربرد تبدیل‌ها
۱۰۴		پاسخ سؤال‌های امتحانی

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

درسنامه سؤال‌های امتحانی

۷۴	۷۲	بخش ۱: قضیه سینوس‌ها
۷۹	۷۵	بخش ۲: قضیه کسینوس‌ها
۸۳	۸۱	بخش ۳: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها
۸۷	۸۴	بخش ۴: قضیه هرون
۱۱۴		پاسخ سؤال‌های امتحانی

امتحانات

پس‌سؤال	سؤال	نمونه امتحان نیم‌سال اول (امتحان شماره ۱)
۱۲۸	۱۲۷	نمونه امتحان نیم‌سال اول (امتحان شماره ۲)
۱۳۱	۱۳۰	نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۳)
۱۳۵	۱۳۳	نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۴)
۱۳۹	۱۳۷	نمونه امتحان نیم‌سال دوم (امتحان شماره ۵)
۱۴۳	۱۴۱	نمونه امتحان نیم‌سال دوم (نهایی خرداد ۱۴۰۳)
۱۴۷	۱۴۵	

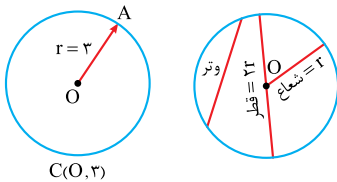
درس نامہ و سؤالات امتحان

فصل ۱: دایره

پرا باید دایره و ویژگی‌هایش رو یاد بگیریم و کاربردشون تو زندگی چیه؟ یه مثال می‌زنم براتون ... توی هندسه یه قضیه داریم به اسم «قضیه هم‌پیرامونی» که می‌گه: «از بین همه شکل‌های هندسی با محیط یکسان، اونی که مساحت بیشتری داره، دایره است.» از این قضیه در گذشته‌ها برای ساخت قلعه‌ها و الان پلان ساختمان‌ها و سیلوهای نگهداری غلات استفاده می‌شه. یعنی هر جایی که بفواهیم از محیط موجود، بیشترین استفاده رو ببریم می‌ریم سراغ دایره. توی این فصل، اول یک سری تعاریف اولیه دایره رو یاد می‌گیریم. (که اکثرش از سال‌های قبل بلدید). بعد می‌ریم سراغ انواع زاویه‌ها و روابط طولی در دایره و در آخر هم به هندسه‌ی‌های محیطی و مماسی می‌پردازیم.

بخش ۱: مفاهیم اولیه دایره

تعریف مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطه‌ای ثابت (مثل O) به یک فاصله ثابت (مثل r) باشد را یک دایره می‌گوییم و آن را به صورت $C(O, r)$ نشان می‌دهیم. مثلاً مجموعه نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله ۳ باشند، یک دایره به مرکز O و به شعاع ۳ به صورت زیر است:



شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن روی محیط دایره باشد.

وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط دایره باشد.

قطر دایره: وتر از دایره که از مرکز آن عبور کند. (اندازه قطر دو برابر شعاع است).

اوضاع نسبی نقطه و دایره

دایره $C(O, r)$ و نقطه دلخواه A را در صفحه در نظر بگیرید. برای این که تشخیص دهیم نقطه A در چه وضعیتی با دایره قرار دارد، از جدول زیر کمک می‌گیریم:

وضعیت	شرح	شکل
داخل دایره	اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره از شعاع آن کمتر باشد: $AO < r$	
روی دایره	اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد: $AO = r$	
بیرون از دایره	اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره از شعاع آن بیشتر باشد: $AO > r$	

نکته: برای پیدا کردن کم‌ترین و بیشترین فاصله نقاط دایره از نقطه دلخواه A ، باید ابتدا مانند شکل‌های جدول زیر، قطری از دایره که از A می‌گذرد را رسم کنیم، در این صورت همواره داریم:

نقطه A بیرون دایره باشد.	نقطه A درون دایره باشد.
کم‌ترین فاصله = $AC = AO - r$ بیشترین فاصله = $AB = AO + r$	کم‌ترین فاصله = $AC = r - AO$ بیشترین فاصله = $AB = r + AO$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که مکان قرارگیری نقطه A تأثیری در کم‌ترین و بیشترین فاصله ندارد و همواره داریم:

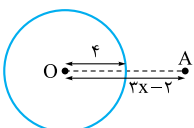
$$\begin{aligned} \text{کم‌ترین فاصله} &= |AO - r| \\ \text{بیشترین فاصله} &= AO + r \end{aligned}$$

مثال: فاصله نقطه A تا مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر $3x - 2$ است. اگر A خارج دایره باشد:

الف) محدوده x را تعیین کنید. (ب) کم‌ترین مقدار صحیح x را به دست آورید.

پ) به ازای کم‌ترین مقدار صحیح x ، بیشترین فاصله A تا نقاط دایره را به دست آورید.

پاسخ: الف) اگر A خارج از دایره باشد، باید فاصله A تا مرکز دایره از شعاع دایره بزرگ‌تر باشد، پس داریم:



$$3x - 2 > 4 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2$$

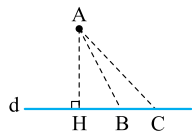
ب) پس کم‌ترین مقدار صحیح x ، کم‌ترین عدد صحیح بعد از ۲ یعنی برابر ۳ است.

پ) به ازای $x = 3$ ، فاصله نقطه A تا مرکز دایره برابر است با:

$$OA = 3x - 2 = 7$$

$$\max = OA + r = 7 + 4 = 11$$

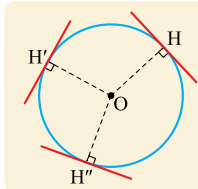
و بیشترین فاصله A تا نقاط دایره برابر است با:



یادآوری: خط d و نقطه A خارج از آن را به صورت شکل روبه‌رو در نظر بگیرید. وقتی می‌گوییم فاصله A تا خط d ، یعنی طول خط عمود رسم‌شده از A تا d یا همان طول خط AH در شکل روبه‌رو و فاصله A تا هر نقطه دیگری از d به جز H همواره از AH بیشتر است.
 فاصله A تا d = فاصله AH
 $AH < AB, AH < AC, \dots$

با توجه به یادآوری بالا، اگر دایره‌ای مانند $C(O, r)$ و خط دلخواهی مانند d داشته باشیم، این دایره و خط سه وضعیت نسبت به یکدیگر دارند که در جدول زیر می‌بینید:

۱. متخارج	۲. مماس	۳. متقاطع
فاصله خط و مرکز دایره از شعاع دایره بیشتر است. $(OH > r)$	فاصله خط و مرکز دایره برابر شعاع دایره است. $(OH = r)$	فاصله خط و مرکز دایره از شعاع دایره کمتر است. $(OH < r)$
تعداد نقاط اشتراک = صفر	تعداد نقاط اشتراک = ۱	تعداد نقاط اشتراک = ۲



نکته: همواره خط مماس بر دایره در نقطه H ، بر شعاع گذرنده از نقطه H عمود است.

$ax + by + c = 0$

$MH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

یادآوری: فاصله نقطه $M(\alpha, \beta)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

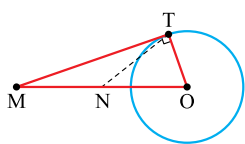
مثال: فاصله $O(3, -1)$ مرکز دایره $C(O, 2)$ را از خط $3x + 4y = 10$ بیابید. وضعیت نسبی خط و دایره چگونه است؟ این خط با دایره C چند نقطه اشتراک دارد؟

$OH = \frac{|3(3) + 4(-1) - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1 < 2$

پاسخ: ابتدا فاصله نقطه $(3, -1)$ از خط $3x + 4y = 10$ را به دست می‌آوریم:

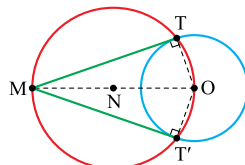
$OH < R$ پس خط و دایره متقاطع‌اند و دو نقطه اشتراک دارند.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن برای رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه خارج از آن، ابتدا باید موارد زیر را یادآوری کنیم:



۱. مماس بر دایره همواره بر شعاع دایره عمود است. پس در شکل روبه‌رو MT بر OT عمود است و مثلث MTO قائم‌الزاویه است.

۲. میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه همیشه نصف وتر است، پس در شکل بالا داریم: $MN = NO = NT$
 بنابراین اگر دایره‌ای به مرکز N و قطر OM رسم کنیم حتماً از نقطه T هم عبور می‌کند. حالا برویم سراغ رسم خطوط مماس بر دایره $C(O, R)$ از نقطه M خارج از آن:



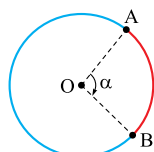
گام اول: از نقطه M خارج دایره به O (مرکز دایره) وصل می‌کنیم و عمودمنصف پاره خط OM را رسم می‌کنیم تا نقطه N پیدا شود. (رسم عمودمنصف را در سال دهم یاد گرفتیم).

گام دوم: اگر به مرکز N و شعاع ON ، دایره‌ای رسم کنیم که دایره $C(O, R)$ را در دو نقطه T و T' قطع کند و M را به T و T' وصل کنیم، آن‌گاه MT و MT' مماس‌های وارد بر دایره از نقطه M هستند.

نکته: ۱. از هر نقطه روی دایره فقط یک مماس می‌توانیم بر دایره رسم کنیم.

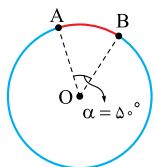
۲. از هر نقطه خارج از دایره، دو مماس می‌توانیم بر دایره رسم کنیم.

کمان، قطاع و قطعه در دایره

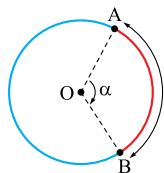


کمان قسمتی از محیط دایره که بین دو نقطه A و B محدود شده باشد را کمان $\widehat{AB}$ می‌نامیم. (بخش قرمز رنگ در دایره روبه‌رو)

زاویه مرکزی زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشد را زاویه مرکزی می‌نامیم. (مثل $\angle AOB$ در شکل روبه‌رو)

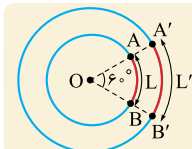


اندازه کمان (α) اندازه هر کمان همان اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی آن است و واحد آن درجه است. مثلاً اندازه کمان AB در شکل مقابل برابر است با:

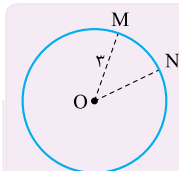
$$\alpha = \widehat{AOB} = \widehat{AB} = 5^\circ$$


طول کمان (L) محیط هر دایره در واقع یک کمان به اندازه 360° و طول $2\pi R$ است. بنابراین طول کمان AB در شکل روبه‌رو را می‌توانیم با استفاده از یک تناسب ساده، محاسبه کنیم:

$$\frac{\widehat{AB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \widehat{AB} \text{ طول} = L = \frac{\alpha}{360^\circ} (2\pi R)$$

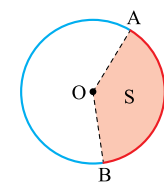


نکته: با توجه به شکل مقابل می‌توانیم بفهمیم که کمان‌هایی با اندازه برابر در دایره‌هایی با شعاع‌های متفاوت، طول‌های متفاوتی دارند. مثلاً در شکل مقابل اندازه هر دو کمان AB و A'B' برابر 60° است ولی $L \neq L'$. (پس اندازه کمان ربطی به شعاع دایره ندارد! ولی طول کمان با شعاع رابطه مستقیم دارد.)



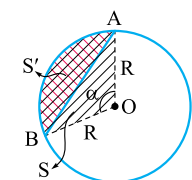
مثال: در شکل مقابل، زاویه مرکزی MON برابر 45° است. اندازه MN و طول این کمان را به دست آورید.

پاسخ: اندازه هر کمان برابر اندازه زاویه مرکزی رو به آن است، پس $\widehat{MN} = 45^\circ$. طول کمان MN هم از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} (2\pi R) = \frac{45^\circ}{360^\circ} (2\pi \times 3) = \frac{3\pi}{4}$$


قطاع دایره مساحت بین دو شعاع دایره و محیط آن را یک قطاع می‌نامیم و این مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\widehat{AB}}{360^\circ} = \frac{\text{مساحت قطاع AOB}}{\text{مساحت دایره}} \Rightarrow \text{مساحت قطاع AOB} = S = \frac{\alpha}{360^\circ} (\pi R^2)$$

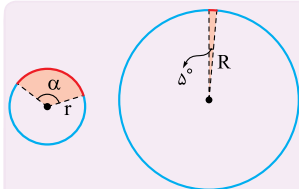


یک قطعه از دایره مساحت محصور بین یک وتر از دایره و محیط آن، یک قطعه از دایره است که با **هاشور قرمز** در شکل مقابل نشان داده شده است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S' = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta AOB}$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

یادآوری: در شکل مقابل، با داشتن زاویه α ، مساحت مثلث AOB برابر است با:



مثال: در شکل روبه‌رو، شعاع دایره بزرگ‌تر ۵ برابر دایره کوچک‌تر است. اگر مساحت دو قطاع رنگی با هم برابر باشد، زاویه α در دایره کوچک‌تر را به دست آورید.

پاسخ: طبق فرض سؤال $R = 5r$ و مساحت دو قطاع رنگی برابر است. پس داریم:

$$\frac{\pi R^2 \times 5^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} \xrightarrow{R=5r} 5\pi r^2 \times 5^\circ = \pi r^2 \alpha \Rightarrow \alpha = 125^\circ$$

در امتحان چه خبر؟

در اولین بخش از اولین فصل هندسه یازدهم با یک سری سؤالات اکثراً ساده و روتین مواجه می‌شویم که به صورت زیر تیپ‌بندی می‌شوند:

تیپ ۱ سؤالات جای خالی و درست - نادرست که غالباً به موضوعات نسبت نقطه و خط با دایره است.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۱ تا ۵

تیپ ۲ سؤالات تعریفی و اثباتی که با فوندرن درس‌نامه بهوشون مسلط می‌شوید.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۶ تا ۱۲

تیپ ۳ سؤالاتی در مورد طول کمان در دایره که فقط کافیست فرمول $L = \frac{\alpha}{360^\circ} (2\pi R)$ رو بدونیم.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۱۴ تا ۱۷

تیپ ۴ در آخر هم سؤال‌های مساحت قطاع و قطعه در دایره که اون‌ها هم فرمول‌های ساده و روتینی دارند.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۱۸ تا ۲۱

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱- تعداد نقاط اشتراک دایره و خط متقاطع بر آن، است.

۲- از هر نقطه خارج دایره، مماس می‌توانیم بر دایره رسم کنیم.

۳- اندازه هر کمان برابر اندازه زاویه رو به آن است.

۴- طول بزرگ‌ترین وتر در دایره‌ای به مساحت 49π ، است.

۵- فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 3)$ برابر $7 - x$ است. کم‌ترین مقدار صحیح x به شرطی که A درون دایره باشد، برابر است با:

ثابت کنید:

۶- اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ برابر α درجه باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

۷- اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ برابر α درجه باشد، نشان دهید مساحت قطاع ایجادشده برابر است با:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

مفاهیم زیر را تعریف کنید:

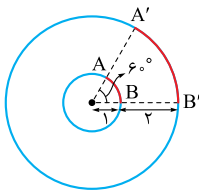
۸- زاویه مرکزی ۹- قطاع ۱۰- قطعه ۱۱- کمان

۱۲- طریقه رسم مماس بر یک دایره از نقطه‌ای خارج آن را به همراه شکل شرح دهید.

۱۳- نزدیک‌ترین و دورترین فاصله نقطه A از یک دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است. شعاع دایره چه قدر است؟

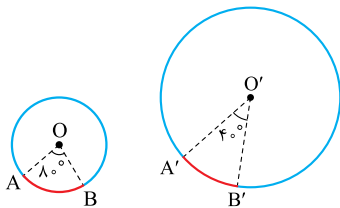
۱۴- با توجه به شکل، اندازه و طول کمان‌های زیر را بنویسید.

الف) $\widehat{AB}$
ب) $\widehat{A'B'}$



(برگرفته از کار در کلاس صفحه ۱۲ کتاب درسی)

۱۵- در شکل مقابل، طول کمان‌های AB و A'B' با هم برابر است. شعاع دایره بزرگ‌تر چند برابر دایره کوچک‌تر است؟

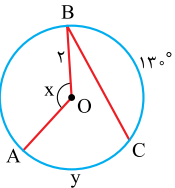


(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۶- در شکل روبه‌رو،

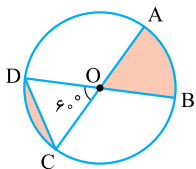
الف) اگر اندازه زاویه مرکزی x برابر 100° باشد، اندازه کمان y را به دست آورید.

ب) اگر اندازه کمان y برابر 70° باشد، طول کمان روبه‌رو به زاویه x را به دست آورید.

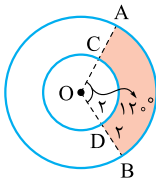


۱۷- اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی 12° در دایره $C(O, r)$ برابر 4π باشد، مساحت و محیط دایره را به دست آورید.

۱۸- مطابق شکل، در دایره‌ای به شعاع ۳، مساحت قطاع و قطعه قرمز رنگ را به دست آورید.

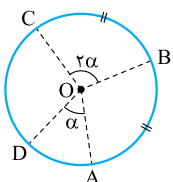


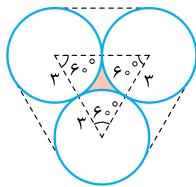
۱۹- در شکل مقابل طول کمان‌های AB و CD و مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.



۲۰- مطابق شکل، اگر O مرکز دایره و کمان‌های AB و BC هم‌اندازه و $CD = 100^\circ$ باشد، مقدار زاویه α را به دست آورید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)





۲۱- سه دایره به شعاع‌های ۳ سانتی‌متر دایره دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل روبه‌رو، این سه دایره به وسیله یک نخ به یکدیگر بسته شده‌اند:

الف) طول این نخ را به دست آورید.

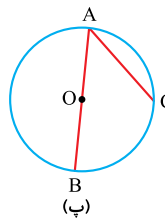
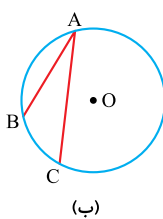
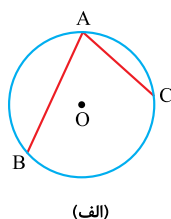
ب) مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

بخش ۲: انواع زاویه در دایره

در درس قبل، زاویه مرکزی و رابطه آن با کمان در دایره را مطرح کردیم. در این درس‌نامه می‌خواهیم محاسبه بقیه زاویه‌های دایره را یاد بگیریم. انواع زاویه در دایره عبارت‌اند از:

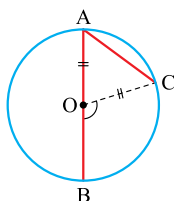
۱. زاویه محاطی

زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشد، مثلاً در شکل‌های زیر زاویه‌های $\hat{BAC}$ محاطی هستند:



قضیه اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.

اثبات: برای اثبات این قضیه، حالتی را در نظر می‌گیریم که یکی از اضلاع زاویه محاطی، قطری از دایره $C(O, R)$ باشد: (اثبات اندازه زاویه محاطی در شکل‌های الف و ب بالا، در تمرین‌های این درس موجوده.)



فرض	$\hat{A}$ زاویه محاطی است.
حکم	$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

اگر در این شکل از نقطه C به O وصل کنیم، زاویه $\hat{COB}$ ، یک زاویه خارجی برای مثلث AOC است و از طرفی می‌دانیم که مثلث AOC یک مثلث متساوی‌الساقین است، $(AO = OC = R)$ پس داریم:

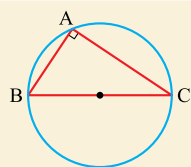
$$\hat{COB} = \hat{OAC} + \hat{OCA} \xrightarrow{\hat{OAC} = \hat{OCA}} \hat{COB} = 2\hat{OAC} = 2\hat{A} \quad (1)$$

$$\hat{COB} = \widehat{BC} \quad (2)$$

$$\hat{COB} = \widehat{BC} = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

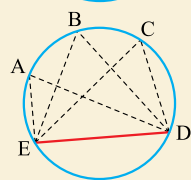
هر زاویه مرکزی برابر کمان روبه‌رو به خودش است، پس:

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:



$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{18^\circ}{2} = 9^\circ$$

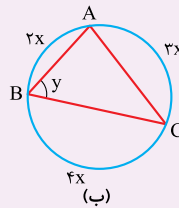
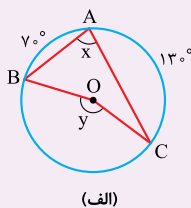
نکته: ۱ زاویه محاطی رو به قطر دایره، همیشه برابر 90° است، شکل مقابل را ببینید:



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\widehat{ED}}{2}$$

۲ زوایای محاطی رو به یک کمان، همواره با هم برابرند:

مثال: در شکل‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید.



پاسخ: الف) می‌دانیم محیط یک دایره 360° است، پس مجموع کمان‌ها در شکل (الف) برابر است با 360° ، در نتیجه اندازه کمان $\widehat{BC}$ برابر است با:

$$70^\circ + 130^\circ + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 160^\circ$$

$$y = 160^\circ$$

هر زاویه مرکزی برابر کمان روبه‌روی خودش است، پس:



$$x = \frac{16^\circ}{2} = 8^\circ$$

$$2x + 3x + 4x = 36^\circ \Rightarrow 9x = 36^\circ \Rightarrow x = 4^\circ$$

$$y = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{12^\circ}{2} = 6^\circ$$

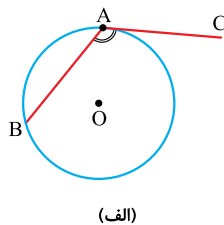
و هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبه‌رو به خودش است:

ب مجموع کمان‌های یک دایره برابر 360° ، پس داریم:

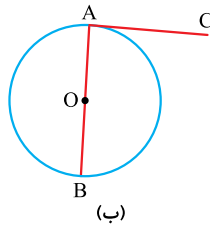
در نتیجه اندازه زاویه محاطی y برابر است با:

۲. زاویه ظلی

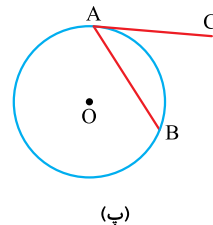
زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلعش وتر و دیگری مماس بر دایره باشد، مثلاً در شکل‌های زیر، $\widehat{BAC}$ یک زاویه ظلی است:



(الف)



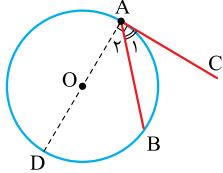
(ب)



(پ)

قضیه اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه.

اثبات: برای اثبات این قضیه، زاویه ظلی $\widehat{CAB}$ در شکل زیر را در نظر گرفته و قطری از دایره که شامل نقطه A باشد را رسم می‌کنیم.



فرض	$\widehat{A}$ زاویه ظلی است.
حکم	$\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}$

می‌دانیم که همواره خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است، پس: $\widehat{DAC} = 90^\circ$ (۱)

و کمان $\widehat{DBA}$ هم نصف دایره است و مقدار آن برابر است با: $\widehat{DBA} = 180^\circ$ (۲)

پس طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\widehat{DAC} = \frac{\widehat{DBA}}{2}$$

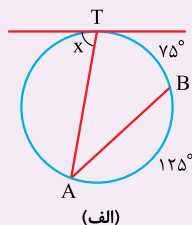
$$\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

از طرفی زاویه $\widehat{A}_2$ در شکل، یک زاویه محاطی است و مقدار آن برابر است با:

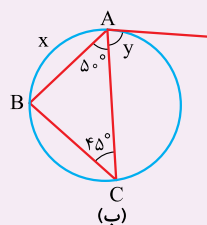
حالا برای محاسبه زاویه ظلی $\widehat{A}_1$ داریم:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{DAC} - \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{DBA}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = \left(\frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} \right) - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

مثال: در شکل‌های زیر، مقادیر x و y را به دست آورید.



(الف)



(ب)

پاسخ: (الف) در شکل (الف)، مجموع اندازه کمان‌های دایره برابر 360° است، پس کمان $\widehat{AT}$ برابر است با:

$$75^\circ + 125^\circ + \widehat{AT} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AT} = 160^\circ$$

$$x = \frac{\widehat{AT}}{2} = 80^\circ$$

اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف کمان رو به خودش است، پس:

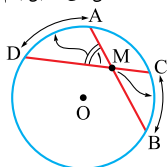
$$\widehat{C} = 45^\circ = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 90^\circ$$

ب در شکل (ب)، کمان x رو به زاویه محاطی $\widehat{C}$ است، پس:

زاویه ظلی y هم برابر $\frac{\widehat{AC}}{2}$ است که کمان $\widehat{AC}$ رو به زاویه محاطی $\widehat{B}$ نیز قرار دارد پس داریم:

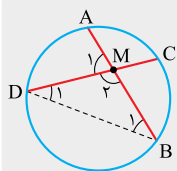
$$\triangle ABC: \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 85^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 170^\circ \Rightarrow y = \frac{\widehat{AC}}{2} = 85^\circ$$

کمان‌های مقابل به M_1



در شکل مقابل، دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M درون دایره قطع کرده‌اند و چهار زاویه دوه‌دو متقابل به رأس به وجود آمده است. اندازه هر کدام از این زاویه‌ها از قضیه زیر به دست می‌آید:

قضیه زاویه بین دو وتر که درون دایره یکدیگر را قطع کنند برابر است با نصف مجموع کمان‌های مقابل به آن زاویه.



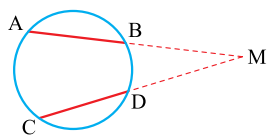
$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2}$$

اثبات: برای اثبات این قضیه، ابتدا نقاط B و D را به هم وصل می‌کنیم. مطابق شکل در مثلث BMD، زاویه M_1 ، یک زاویه خارجی است و مقدار آن برابر است با:

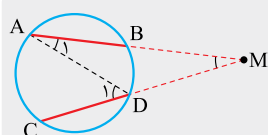
$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{B}_1 + \hat{D}_1 \\ \hat{D}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2} \text{ محاطی} \\ \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} \text{ محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B}_1 + \hat{D}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2}$$

$$(\hat{M}_2 = \frac{\widehat{DB} + \widehat{AC}}{2} \text{ همین‌طوری می‌توانیم ثابت کنیم که})$$

۴. زاویه بین امتداد دو وتر در خارج از دایره



در شکل مقابل، دو وتر AB و CD در نقطه M خارج از دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند، اندازه زاویه M از قضیه زیر به دست می‌آید:



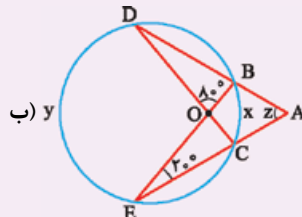
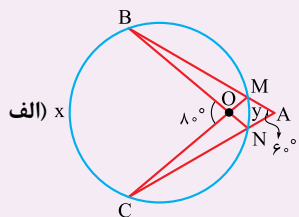
قضیه زاویه بین امتداد دو وتر که خارج از دایره یکدیگر را قطع کنند برابر است با نصف تفاضل کمان‌های مقابل به آن زاویه.

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$$

اثبات: برای اثبات این قضیه، ابتدا نقاط A و D روی محیط دایره را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا مثلث ADM تشکیل شود. حالا زاویه D_1 ، یک زاویه خارجی برای ADM است که مقدار آن برابر با $\hat{D}_1 = \hat{A}_1 + \hat{M}$ است. در نتیجه می‌توانیم مقدار $\hat{M}$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}_1 = \hat{A}_1 + \hat{M} \\ \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ محاطی} \\ \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AC}}{2} \text{ محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{D}_1 - \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$$

مثال: در شکل‌های زیر مقادیر مجهول را به دست آورید.



پاسخ: (الف) با توجه به آنچه در درس‌نامه گفتیم، زاویه O و A را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O} = \frac{x+y}{2} = 160^\circ \Rightarrow x+y = 320^\circ \\ \hat{A} = \frac{x-y}{2} = 60^\circ \Rightarrow x-y = 120^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 280^\circ \Rightarrow x = 140^\circ, y = 20^\circ$$

$$\hat{E} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{x}{2} = 20^\circ \Rightarrow x = 40^\circ \quad (1)$$

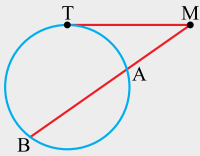
ب یک زاویه محاطی است. مقدار آن برابر است با:

$$\hat{O} = \frac{y+x}{2} = 180^\circ - 80^\circ \Rightarrow y+x = 200^\circ \xrightarrow{(1)} y = 160^\circ$$

از طرفی مقادیر زاویه‌های O و A به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$A = \frac{y-x}{2} = z \Rightarrow z = \frac{160^\circ - 40^\circ}{2} = 60^\circ$$

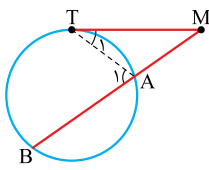




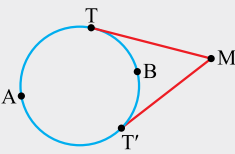
قضیه اگر از نقطه M خارج از دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره به صورت شکل مقابل رسم کنیم، زاویه M برابر است با:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BT} - \widehat{AT}}{2}$$

اثبات: برای اثبات این قضیه کافی است از نقطه A به T وصل کنیم، آن گاه زاویه A_1 ، یک زاویه محاطی و همچنین زاویه خارجی در مثل تشکیل شده ATM است و T_1 هم یک زاویه ظلی است، پس داریم:

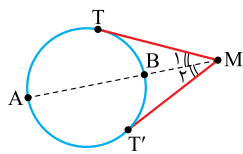


$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BT}}{2} \text{ محاطی} \\ \hat{T}_1 = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ ظلی} \\ \Delta ATM: \hat{A}_1 = \hat{T}_1 + \hat{M} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 - \hat{T}_1 = \frac{\widehat{BT} - \widehat{AT}}{2}$$



قضیه اگر از نقطه M خارج از دایره مطابق شکل روبه‌رو، دو مماس بر دایره رسم کنیم، آن گاه زاویه M برابر است با:

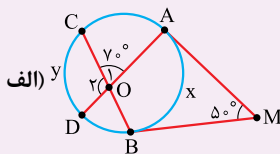
$$\hat{M} = \frac{\widehat{TAT'} - \widehat{TBT'}}{2}$$



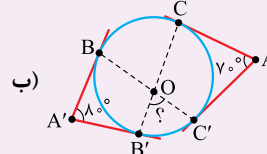
اثبات: برای اثبات این قضیه، ابتدا از نقطه M یک قاطع بر دایره رسم می‌کنیم تا در نقاط A و B دایره را قطع کند، آن گاه طبق قضیه بالا می‌توانیم زاویه بین مماس و قاطع بر دایره از نقطه خارج آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2} \\ \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AT'} - \widehat{BT'}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT} + \widehat{AT'} - \widehat{BT'}}{2} = \frac{(\widehat{AT} + \widehat{AT'}) - (\widehat{BT} + \widehat{BT'})}{2} = \frac{\widehat{TAT'} - \widehat{TBT'}}{2}$$

(برگرفته از تمرین صفحه ۱۷ کتاب درسی)



مثال: در شکل‌های زیر، مقادیر مجهول را به دست آورید.



پاسخ: الف در شکل الف، مقدار زاویه O_1 و O_2 و M را می‌نویسیم:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} - \widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AC} + y + \widehat{BD} - x}{2} = 50^\circ \quad (1)$$

$$\hat{O}_1 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = 70^\circ \xrightarrow{(1)} \frac{y - x}{2} + 70^\circ = 50^\circ \Rightarrow y - x = -40^\circ \quad (2)$$

$$\hat{O}_2 = \frac{y + x}{2} = 118^\circ - 70^\circ = 48^\circ \Rightarrow y + x = 96^\circ \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(2)+(3)} 2y = 56^\circ \Rightarrow y = 28^\circ \Rightarrow x = 68^\circ$$

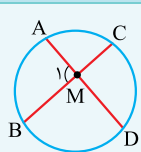
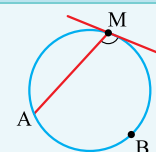
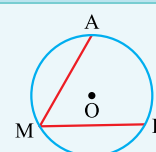
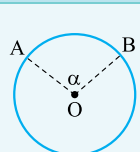
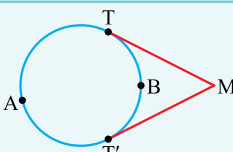
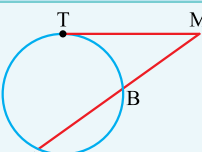
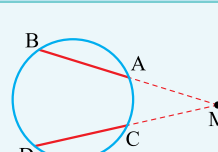
ب در این شکل ابتدا مقادیر $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ را می‌نویسیم:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{BB'} + \widehat{B'C'} - \widehat{CC'}}{2} = 70^\circ \quad + \quad \frac{2\widehat{BC} + 2\widehat{B'C'}}{2} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{B'C'} = 15^\circ \quad (1)$$

$$\hat{A}' = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CC'} + \widehat{B'C'} - \widehat{BB'}}{2} = 8^\circ$$

$$\hat{O} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{B'C'}}{2} \xrightarrow{(1)} \hat{O} = \frac{15^\circ}{2} = 7.5^\circ$$

از طرفی می‌دانیم که مقدار $\hat{O}$ برابر است با:

زاویه بین دو وتر	زاویه ظلی	زاویه محاطی	زاویه مرکزی
 $\hat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$	 $\hat{M} = \frac{\widehat{ABM}}{2}$	 $\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{2}$	 $\alpha = \widehat{AB}$
زاویه بین دو مماس	زاویه بین وتر و مماس	زاویه بین امتداد دو وتر	
 $\hat{M} = \frac{\widehat{TAT'} - \widehat{TBT'}}{2}$	 $\hat{M} = \frac{\widehat{TA} - \widehat{TB}}{2}$	 $\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$	

در امتحان چه خبر؟

سوالاتی که ممکن است از مبحث زاویه در دایره پرسیده شود به سه حالت کلی زیر تقسیم می‌شود:

تیپ ۱ جای قالی و درست - نادرست: شامل مفاتیح و فرمول‌های این درس

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۲۲ تا ۲۸

تیپ ۲ اثباتی: جزء چنانچه هندسه شامل اثبات فرمول‌های مناسب زاویه

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۲۹ تا ۳۷

تیپ ۳ و در آخر تیپ مناسبی که به سری اطلاعات از زوایای و کمان‌های دایره در اختیار تون می‌ذارن و به سری مجهول‌ها رو می‌خوان.

حالاتو حل کن: سؤال‌های ۳۸ تا ۵۰

؟ سؤال‌های امتحانی

■ جاهای خالی را با عبارات یا اعداد مناسب پر کنید.

۲۲- اندازه هر زاویه محاطی برابر است.

۲۳- زاویه محاطی رو به قطر دایره برابر درجه است.

۲۴- زاویه بین دو وتر که درون دایره یکدیگر را قطع می‌کند برابر است.

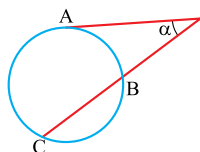
۲۵- اندازه هر زاویه ظلی برابر است با اندازه کمان روبه‌رو به آن زاویه.

■ درستی و نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. (علت نادرستی را بیان کنید.)

۲۶- زاویه‌ای که رأسش روی محیط دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگرش وتر از دایره باشد، زاویه محاطی است.

۲۷- زاویه بین دو مماس از نقطه‌ای خارج دایره برابر مجموع کمان‌های ایجادشده توسط نقاط تماس است.

۲۸- زاویه α در شکل مقابل برابر است با:



$$\alpha = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2}$$

■ ثابت کنید:

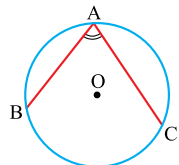
۲۹- اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.

۳۰- اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.

۳۱- در شکل روبه‌رو ثابت کنید: $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

(فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی)

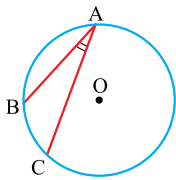
(فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی)



(فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی)



(فعالیت صفحه ۱۴ کتاب درسی)

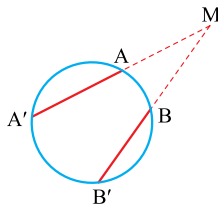


۳۲- در شکل روبه‌رو ثابت کنید: $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

۳۳- ثابت کنید اندازه زاویه بین دو وتر متقاطع درون دایره برابر است با نصف مجموع اندازه کمان‌هایی از دایره که به اضلاع زاویه و امتداد اضلاع زاویه محدودند.

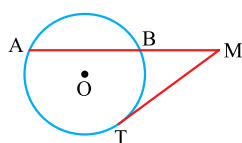
(فعالیت صفحه ۱۶ کتاب درسی)

(فعالیت صفحه ۱۵ کتاب درسی)



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{A'B'} - \widehat{AB}}{2}$$

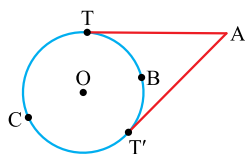
۳۴- در شکل مقابل ثابت کنید:



(تمرین صفحه ۱۷ کتاب درسی)

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$$

۳۵- در شکل مقابل ثابت کنید:



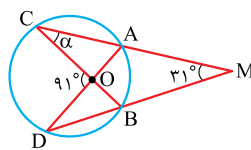
(تمرین صفحه ۱۷ کتاب درسی)

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{TCT'} - \widehat{TBT'}}{2}$$

۳۶- ثابت کنید زاویه بین دو خط مماس رسم شده از نقطه A خارج دایره بر آن، برابر نصف تفاضل دو کمان ایجادشده بین نقاط T و T' است.

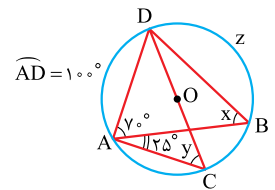
۳۷- با استفاده از تعریف زاویه محاطی نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

در شکل‌های زیر مقادیر مجهول زاویه‌ها و کمان‌های مشخص شده را به دست آورید.

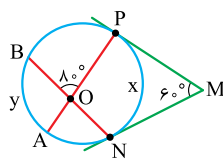


(تمرین صفحه ۱۶ کتاب درسی)

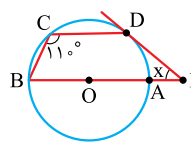
۳۹-



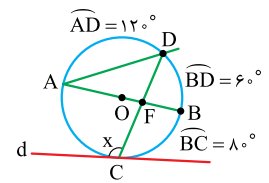
۳۸-



۴۲-



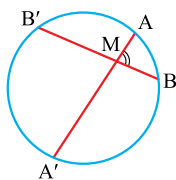
۴۱-



۴۰-

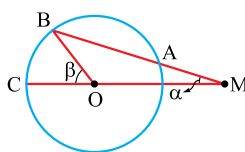
۴۳- در شکل روبه‌رو، اگر الف) $\widehat{AB} = \frac{\widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{A'B'}}{3} = \frac{\widehat{A'B}}{3}$ ب) $\widehat{AB'} + \widehat{A'B} = 22^\circ$ آن‌گاه مقدار زاویه $\widehat{AMB}$ را در هر دو حالت به دست آورید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



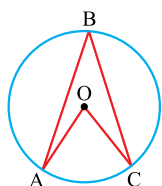
۴۴- دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ ، نشان دهید: $\beta = 3\alpha$.

(تمرین صفحه ۱۷ کتاب درسی)

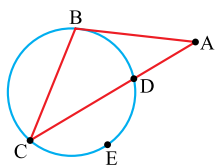


۴۵- در دایره‌ای به مرکز O اگر $\widehat{AOC} = (3\alpha + 12)^\circ$ و $\widehat{ABC} = (\alpha + 16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه مرکزی AOC و زاویه محاطی ABC را به دست آورید.

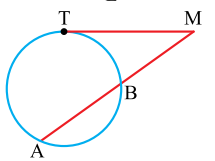
(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



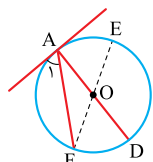
۴۶- در شکل مقابل، $AB = BC$ ، اگر $\widehat{CED} = 50^\circ$ باشد، اندازه زاویه A را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



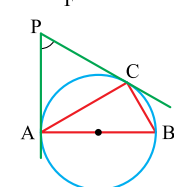
۴۷- خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB در نقطه M متقاطع‌اند. با فرض $\widehat{TB} = a$ و $\widehat{BA} = b$ و $\widehat{AT} = c$ و $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ ، اندازه زاویه M را تعیین کنید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



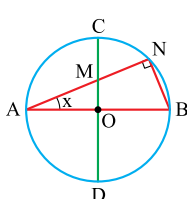
۴۸- در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره و $\hat{A}_1 = 61^\circ$ است. کمان AE چند درجه است؟ (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



۴۹- در شکل مقابل، $BC = 1$ و $AC = \sqrt{3}$ و $AB = 2$ است. زاویه P را به دست آورید.



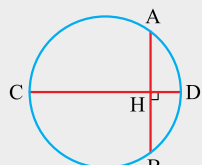
۵۰- در شکل روبه‌رو، دو قطر AB و CD بر هم عمودند. اگر $NM = NB$ باشد، مقدار x را به دست آورید.



بخش ۳: وتر در دایره

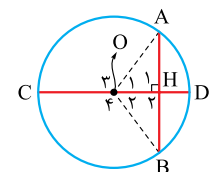
گفتیم به هر پاره‌خطی که دو سر آن روی محیط دایره باشد، وتر دایره می‌گوییم و بزرگ‌ترین وتر هم همان قطر دایره است. حالا در این درس قرار است به طور عمیق‌تر به وتر در دایره بپردازیم و با چند قضیه از وتر و رابطه بین وتر و کمان در دایره آشنا‌تر شویم.

(سؤال نهایی فروردین ۱۳۰۳)



فرض	وتر دایره $CD \perp AB$
حکم	$AH = BH, \widehat{AD} = \widehat{DB}, \widehat{AC} = \widehat{BC}$

اثبات: برای اثبات این قضیه ابتدا از مرکز دایره به دو نقطه A و B وصل می‌کنیم تا مثلث‌های قائم‌الزاویه OAH و OBH تشکیل شوند. حالا در این دو مثلث داریم:



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = \text{شعاع دایره} \\ OH \text{ مشترک ضلع} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{زاویه قائمه}]{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} AH = HB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right.$$

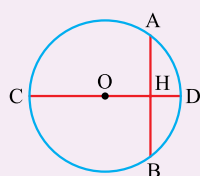
می‌دانیم که $\hat{O}_1$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AD و $\hat{O}_2$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان BD است و از آن‌جا که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ پس $\widehat{BD} = \widehat{AD}$ است و قطر، کمان نظیر وتر AB را نیز نصف می‌کند.

از طرفی چون $\hat{O}_3$ مکمل $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_4$ مکمل $\hat{O}_2$ است، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_3 = 180^\circ - \hat{O}_1 \\ \hat{O}_4 = 180^\circ - \hat{O}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\hat{O}_1 = \hat{O}_2} \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \xrightarrow[\text{زاویه مرکزی رو به CB}]{\text{زاویه مرکزی رو به AC}} \widehat{AC} = \widehat{CB}$$

مثال: ثابت کنید:

(فعالیت صفحه ۱۳ کتاب درسی)



الف) در دایره روبه‌رو اگر قطر CD وتر AB را نصف کرده باشد، AB بر CD عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.
ب) در دایره روبه‌رو اگر قطر CD کمان AB را نصف کرده باشد، CD بر وتر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.



پاسخ نامہ تشریحی

۱. ۲ نقطه
۴. ۱۴

۲. ۲

۳. مرکزی

$$\pi R^2 = 49\pi \Rightarrow R = 7 \Rightarrow 2R = 14$$

$$A \Rightarrow 7 - x < 2 \Rightarrow x > 4$$

۵. ۵

کم‌ترین مقدار صحیح x برابر ۵ است.

۶. به صفحه ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

۷. به صفحه ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

۸. به صفحه ۹ درس‌نامه مراجعه کنید.

۹. به صفحه ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

۱۰. به صفحه ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

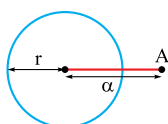
۱۱. به صفحه ۱۰ درس‌نامه مراجعه کنید.

۱۲. به صفحه ۹ درس‌نامه مراجعه کنید.

۱۳. فرقی نمی‌کند نقطه A را بیرون یا درون

دایره در نظر بگیریم، همیشه نزدیک‌ترین و

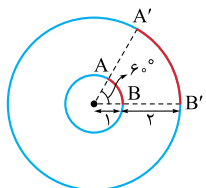
دورترین نقاط دایره از نقطه A برابر است با:



$$\begin{aligned} \min &= \alpha - r = 8 \\ \max &= \alpha + r = 12 \end{aligned} \xrightarrow{(-)} 2r = 4 \Rightarrow r = 2$$

۱۴. با توجه به شکل مقابل، طول و اندازه هر

کدام از کمان‌ها برابر است با:



$$L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \times 1 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

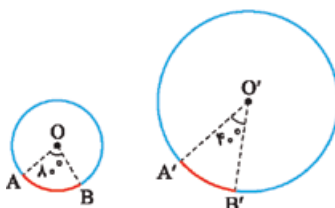
$$\widehat{AB} = 60^\circ$$

$$L_{\widehat{A'B'}} = \frac{\pi \times 3 \times 60^\circ}{180^\circ} = \pi, \quad \widehat{A'B'} = 60^\circ$$

۱۵. با توجه به شکل اگر طول

کمان‌های AB و $A'B'$ با هم

برابر باشد:



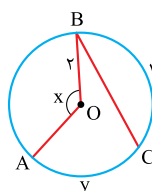
$$L_{\widehat{AB}} = L_{\widehat{A'B'}} \Rightarrow \frac{\pi \times r \times 40^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \times r' \times 40^\circ}{180^\circ} \Rightarrow 2r = r'$$

پس شعاع دایره بزرگ‌تر، ۲ برابر دایره کوچک‌تر است.

۱۶. اندازه هر کمان برابر زاویه مرکزی روبه‌رو به آن است.

از طرفی می‌دانیم مجموع اندازه کمان‌های موجود

روی یک دایره برابر 360° است، بنابراین:



$$\widehat{AB} = x = 100^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + y = 360^\circ \Rightarrow y = 360^\circ - 130^\circ - 100^\circ = 130^\circ$$

$$y = 70^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + y = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 360^\circ - 130^\circ - 70^\circ = 160^\circ$$

$$\Rightarrow x = \widehat{AB} = 160^\circ$$

$$L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi \times 2 \times 160^\circ}{180^\circ} = \frac{16}{9}\pi$$

و طول این کمان برابر است با:

۱۷. طول این کمان از دایره برابر است با:

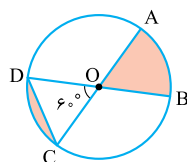
$$4\pi = \frac{\pi \times r \times 120^\circ}{180^\circ} \Rightarrow r = \frac{4 \times 180^\circ}{120^\circ} = 6$$

$$P = 2\pi r = 12\pi$$

پس مساحت و محیط دایره برابر است با:

$$S = \pi r^2 = 36\pi$$

۱۸. مساحت قطاع AOB به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \text{مقابل به رأس} = 60^\circ$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi \times 3^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{2}\pi$$

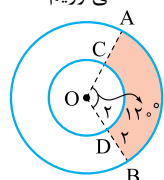
برای به دست آوردن مساحت قطعه قرمز رنگ باید مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع

ODC را از قطاع ODC کم کنیم، پس داریم:

$$S_{\Delta ODC} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{9}{4}\sqrt{3}, \quad S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi \alpha r^2}{360^\circ} = \frac{3}{2}\pi$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{3}{2}\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

۱۹. مطابق شکل، ابتدا طول کمان‌های AB و CD را به دست می‌آوریم:



$$L_{\widehat{CD}} = \frac{\pi \times r \times \alpha}{180^\circ} = \frac{2\pi \times 12^\circ}{180^\circ} = \frac{4}{3}\pi$$

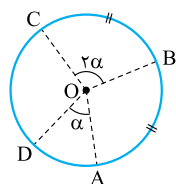
$$L_{\widehat{AB}} = \frac{4\pi \times 12^\circ}{180^\circ} = \frac{4}{3}\pi$$

حالا برای به دست آوردن مساحت قسمت قرمز رنگ باید مساحت قطاع ODC

را از قطاع OAB کم کنیم، پس:

$$S_{\text{قرمز رنگ}} = \frac{\pi \times 4^2 \times 12^\circ}{360^\circ} - \frac{\pi \times 2^2 \times 12^\circ}{360^\circ} = 4\pi$$

۲۰. اندازه هر کمان برابر زاویه مرکزی رو به آن است پس می‌توانیم بگوییم:



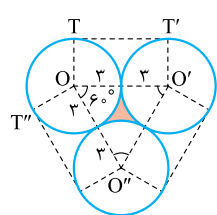
$$\widehat{CB} = 2\alpha \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \widehat{AB} = 2\alpha$$

$$\widehat{AD} = \alpha$$

$$\widehat{CD} = 100^\circ$$

مجموع کمان‌های روی دایره برابر 360° است پس:

$$2\alpha + 2\alpha + \alpha + 100^\circ = 360^\circ \Rightarrow 5\alpha = 260^\circ \Rightarrow \alpha = 52^\circ$$



۲۱. الف) مطابق شکل نخ روی هر دایره در دو

نقطه مماس است و از آن‌جا که شعاع به نقطه

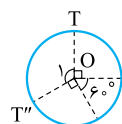
تماس عمود است، چهارضلعی‌های تشکیل‌شده

روی شکل مقابل همگی مستطیل هستند پس در

مستطیل $OO'TT'$ داریم:

$$TT' = OO' = 6$$

حالا در دایره $C(O, 3)$ داریم:



$$\hat{O} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$L_{\widehat{TT'}} = \frac{\pi \times 3^2 \times 120^\circ}{180^\circ} = 2\pi$$

در نتیجه طول نخ برابر است با: $3TT' + 3TT'' = 18 + 6\pi$

ب) مساحت ناحیه رنگی برابر است با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع

$OO'O''$ منهای ۳ قطاع با زاویه 60° و شعاع ۳:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\Delta OO'O''} - 3S_{\text{قطاع}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 - 3 \times \frac{\pi \times 3^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = 9\sqrt{3} - \frac{9\pi}{2}$$

۲۲. نصف کمان روبه‌روی آن

۲۳. ۹۰

۲۴. نصف مجموع کمان‌های روبه‌روی آن

۲۵. نصف

۲۶. نادرست؛ زاویه ظلی است.

۲۷. نادرست؛ برابر نصف تفاضل کمان‌های ایجادشده است.

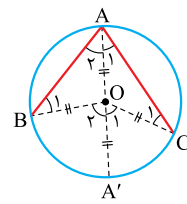
۲۸. درست

۲۹. به صفحه ۱۲ درسنامه مراجعه کنید.

۳۰. به صفحه ۱۳ درسنامه مراجعه کنید.

۳۱. برای اثبات، ابتدا قطر گذرنده از نقطه A روی دایره را رسم می‌کنیم سپس از C و B به نقطه O وصل می‌کنیم.

زاویه O_۱ و O_۲ به ترتیب زاویه خارجی برای مثلث‌های OAC و OAB است و از طرفی می‌دانیم:



$$\hat{O}_1 = \widehat{A'C} \quad (1), OA = OC = r \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \quad (3)$$

$$\hat{O}_2 = \widehat{A'B} \quad (2), OA = OB = r \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1 \quad (4)$$

$$\text{زاویه خارجی } \hat{O}_1 = \hat{C}_1 + \hat{A}_1 \stackrel{(3)}{=} 2\hat{A}_1 \stackrel{(1)}{=} \widehat{A'C} \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\widehat{A'C}}{2}$$

$$\text{زاویه خارجی } \hat{O}_2 = \hat{B}_1 + \hat{A}_2 \stackrel{(4)}{=} 2\hat{A}_2 \stackrel{(2)}{=} \widehat{A'B} \Rightarrow \hat{A}_2 = \frac{\widehat{A'B}}{2}$$

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{A'C}}{2} + \frac{\widehat{A'B}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2} \quad \text{حالا زاویه A برابر است با:}$$

۳۲. برای اثبات ابتدا قطر گذرنده از A را رسم کرده سپس از B و C به O وصل می‌کنیم و داریم:

$$\hat{O}_1 = \widehat{A'C} \quad (1), OA = OB = r$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 \quad (2)$$

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \widehat{BA'} \quad (3), OC = OA = r \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{A}_1 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 = \hat{C}_1 + \hat{A}_1 \stackrel{(3)}{=} 2\hat{A}_1 \\ \hat{O}_1 = \widehat{A'C} \quad (1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\widehat{A'C}}{2}$$

$$\hat{O}_2 = \widehat{BA'} \quad (3), \hat{O}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1$$

$$\stackrel{(3)}{=} 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = \widehat{BA'} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BA'}}{2}$$

زاویه محاطی A_۲ برابر است با:

$$\hat{A} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) - \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BA'} - \widehat{CA'}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

۳۳. به صفحه‌های ۱۴ درسنامه مراجعه کنید.

۳۴. به صفحه ۱۴ درسنامه مراجعه کنید.

۳۵. به صفحه ۱۵ درسنامه مراجعه کنید.

۳۶. به صفحه ۱۵ درسنامه مراجعه کنید.

۳۷. برای حل این سؤال یک مثلث درون یک دایره به گونه‌ای رسم می‌کنیم که هر سه رأس مثلث روی محیط دایره قرار بگیرند:

مطابق شکل هر کدام از زوایای A و B و C محاطی هستند و اندازه آن‌ها برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \hat{B} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\widehat{BC} + \widehat{AC} + \widehat{AB} = 360^\circ \rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AC} + \widehat{AB}}{2} = 180^\circ$$

۳۸.

$$x = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ \quad \text{محاطی}$$

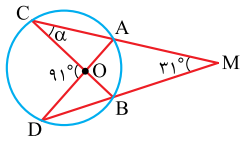
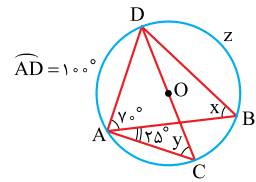
$$y = \frac{\widehat{AD}}{2} = 50^\circ \quad \text{محاطی}$$

$$z = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$$

۳۹.

$$\hat{O} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2} = 91$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} + \widehat{AB} = 182^\circ \quad (1)$$



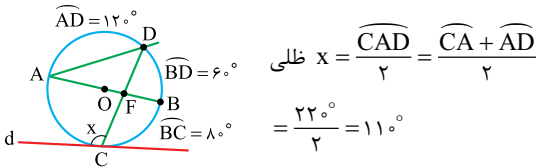
$$\hat{M} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} = 31^\circ \Rightarrow \widehat{CD} - \widehat{AB} = 62^\circ \quad (2)$$

$$(1) - (2) = 2\widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\text{محاطی } \alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} = 30^\circ$$

$$\widehat{AC} = 360^\circ - \widehat{AD} - \widehat{BD} - \widehat{BC}$$

$$= 360^\circ - 120^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 100^\circ$$



۴۰.

$$x = \frac{\widehat{CAD}}{2} = \frac{\widehat{CA} + \widehat{AD}}{2}$$

$$= \frac{220^\circ}{2} = 110^\circ$$

۴۱.

$$C = \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{BA} + \widehat{AD}}{2}$$

$$= \frac{180^\circ + \widehat{AD}}{2} = 110^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AD} = 220^\circ - 180^\circ = 40^\circ$$

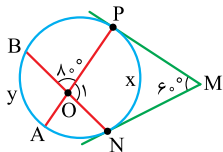
$$\widehat{BCD} + \widehat{AD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 140^\circ$$

$$\Rightarrow x = \hat{P} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{140^\circ - 40^\circ}{2} = 50^\circ$$

۴۲.

$$\hat{O} = \frac{\widehat{BP} + \widehat{AN}}{2} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BP} + \widehat{AN} = 160^\circ \quad (1)$$



$$M = \frac{\widehat{BP} + \widehat{AB} + \widehat{AN} - \widehat{PN}}{2} = 60^\circ \quad (1) \rightarrow \frac{160^\circ + y - x}{2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow y - x = -40^\circ \quad (2)$$

$$\hat{O}_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ = \frac{y + x}{2} = 100^\circ \Rightarrow y + x = 200^\circ \quad (3)$$

$$(2) + (3) = 2y = 160^\circ \Rightarrow y = 80^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$$

۴۳. الف

با استفاده از رابطه صورت سؤال داریم:

$$\widehat{AB'} = 2\widehat{AB}, \widehat{A'B'} = 2\widehat{AB}, \widehat{A'B} = 2\widehat{AB}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BA'} + \widehat{A'B'} + \widehat{B'A} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} + 2\widehat{AB} + 2\widehat{AB} + 2\widehat{AB} = 360^\circ$$

$$9\widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 40^\circ$$

$$\widehat{A'B'} = 120^\circ$$

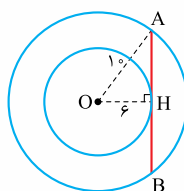
پس مقدار زاویه AMB برابر است با:

$$\Rightarrow \hat{AMB} = \frac{\widehat{A'B'} + \widehat{AB}}{2} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$$

آزمون‌های ثبیت اؤل دوم 9

ردیف	نمونه امتحان شماره ۱	رشته: ریاضی - فیزیک	هندسه ۲
نمره	امتحان شماره ۱	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	Kheilisabz.com
۱	جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید. (الف) در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود نقطه منطبق شود، می‌نامیم. (ب) شعاع‌های دو دایره هم‌مرکز ۶ و ۱۰ است. اندازه وتر از دایره بزرگ‌تر که بر دایره کوچک‌تر مماس است برابر است. (پ) ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع و آن دایره محدود است را می‌نامیم.	۰/۷۵	
۲	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. (الف) شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی با اضلاع ۸، ۱۵ و ۱۷ برابر ۳ است. (ب) دوران لزوماً شیب را حفظ نمی‌کند. (پ) اگر تبدیل همانی نباشد، آن‌گاه بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل ندارد.	۰/۷۵	
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. (راه حل بنویسید). (الف) در شکل مقابل شعاع نیم‌دایره ۷/۵ سانتی‌متر است. مساحت مربع محاط در نیم‌دایره چند سانتی‌متر مربع است؟ (با راه حل) (۱) ۴۵ (۲) $3\sqrt{5}$ (۳) ۵۰ (۴) $5\sqrt{2}$ (ب) کدام یک از موارد زیر در مورد تبدیل طولیا (ایزومتري) درست است؟ (۱) اندازه زاویه‌ها، موقعیت و جهت شکل را تغییر می‌دهد. (۲) می‌تواند موقعیت شکل را تغییر دهد، ولی الزاماً اندازه زاویه‌ها و جهت شکل را حفظ می‌کند. (۳) اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند، ولی می‌تواند موقعیت و جهت شکل را تغییر دهد. (۴) اندازه زاویه‌ها، موقعیت و جهت شکل را الزاماً حفظ می‌کند.	۱ ۰/۵	
۴	ثابت کنید در هر دایره قطری که بر یک وتر عمود است، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند.	۱/۵	
۵	ثابت کنید اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره در بیرون دایره پدید می‌آید، برابر نصف تفاضل اندازه کمان‌هایی از آن دایره است که به اضلاع آن زاویه محدودند.	۱/۵	
۶	ثابت کنید انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.	۱/۷۵	
۷	اندازه x و y را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید. (الف) (ب)	۲/۲۵	
۸	در شکل مقابل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید. (الف) نشان دهید $AA'' = 2m$ (ب) با چه تبدیلی می‌توان $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟	۲	
۹	در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ واحد، طول خط‌المركزين دو دایره محاطی داخلی و محاطی خارجی آن چه قدر است؟	۲	
۱۰	اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$	۱/۵	
۱۱	یک دوزنقه هم محیطی و هم محاطی است. ثابت کنید مساحت این دوزنقه، برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضربدر میانگین هندسی آن‌ها.	۲/۵	
۱۲	طول خط‌المركزين در دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۳ و ۴ سانتی‌متر برابر ۶ است. اندازه طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را به دست آورید.	۱	
۱۳	دوران یافته نقطه $A(a, a+1)$ حول نقطه $B(1, 0)$ نقطه $C(-1, 2)$ است. مقدار مثبت a چه قدر است؟	۱	
۲۰	جمع نمرات		

۱. الف نقطه ثابت (۵/۵)
ب ۱۶ (۵/۵)؛



$$\begin{aligned} \Delta OAH \Rightarrow AH^2 &= OA^2 - OH^2 \\ &= 10^2 - 6^2 = 8^2 \Rightarrow AH = 8 \\ \Rightarrow AB &= 2 \times 8 = 16 \end{aligned}$$

ب قطاع (۵/۵)

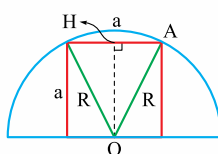
۲. الف درست (۵/۵)؛

$$\begin{aligned} 17^2 &= 15^2 + 8^2 \Rightarrow \text{مثلث قائم‌الزاویه} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{17 \times 15 + 8}{2} = 20 \\ S = \frac{8 \times 15}{2} = 60 \end{cases} \\ \Rightarrow r &= \frac{S}{P} = \frac{60}{20} = 3 \end{aligned}$$

ب درست (۵/۵)

پ نادرست (۵/۵)؛ تبدیل بازتاب همانی نیست، اما بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

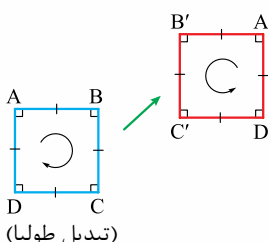
۳. الف ۱ (۵/۵)؛



$$\begin{aligned} \Delta AHO: R^2 &= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (\text{۵/۵}) \\ \Rightarrow R^2 &= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{4R^2}{5} \quad (\text{۵/۵}) \Rightarrow a^2 = \frac{4 \times 225}{5} = 180 \Rightarrow a = 13.416 \approx 13.4$$

ب ۳ (۵/۵)؛



تبدیل طولیا، اندازه‌ی شکل و در نتیجه اندازه‌ی زاویه‌های آن را حفظ می‌کند، ولی موقعیت و جهت شکل می‌تواند تغییر کند. (۵/۵)

۴. ابتدا از مرکز دایره به دو نقطه A و B وصل می‌کنیم تا مثلث‌های قائم‌الزاویه OAH و OBH تشکیل شوند، حالا در این دو مثلث داریم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} OA &= OB = \text{شعاع دایره} \\ OH &= \text{ضلع مشترک} \\ \hat{H}_1 &= \hat{H}_2 = 90^\circ \end{aligned} \right\} (\text{۵/۵}) \\ \xrightarrow[\text{زاویه قائمه}]{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta OAH \cong \Delta OBH \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اجزای متناظر} \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \quad (\text{۵/۵}) \end{aligned}$$

می‌دانیم که $\hat{O}_1$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AD و $\hat{O}_2$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان BD است و از آن‌جا که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ، پس $BD = AD$ است (۵/۵) و قطر، کمان نظیر وتر AB را نیز نصف می‌کند.

$$\begin{aligned} \text{از طرفی چون } \hat{O}_3 \text{ مکمل } \hat{O}_1 \text{ و } \hat{O}_4 \text{ مکمل } \hat{O}_2 \text{ است، داریم:} \\ \hat{O}_3 = 180^\circ - \hat{O}_1 \quad \hat{O}_4 = 180^\circ - \hat{O}_2 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\text{زاویه مرکزی رو به CB}]{\text{زاویه مرکزی رو به AC}} \widehat{AC} = \widehat{CB} \quad (\text{۵/۵})$$

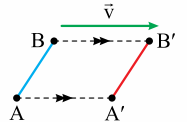
۵. ابتدا نقاط A و D روی محیط دایره را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا مثلث ADM تشکیل شود (۵/۵). حالا زاویه $\hat{D}_1$ یک زاویه خارجی برای ADM است که مقدار آن برابر با $\hat{D}_1 = \hat{A}_1 + \hat{M}$ است (۵/۵).

در نتیجه می‌توانیم مقدار $\hat{M}$ را به صورت زیر به دست آوریم:

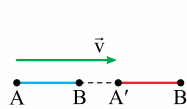
$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \hat{D}_1 &= \hat{A}_1 + \hat{M} \quad (\text{۵/۵}) \\ \hat{A}_1 &= \frac{\widehat{BD}}{2} \quad (\text{۵/۵}) \\ \hat{D}_1 &= \frac{\widehat{AC}}{2} \quad (\text{۵/۵}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{D}_1 - \hat{A}_1 \\ = \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2} \quad (\text{۵/۵}) \end{aligned}$$

۶. سؤال را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر AB با $\vec{v}$ موازی نباشد، انتقال یافته AB تحت $\vec{v}$ را رسم کرده و آن را $A'B'$ می‌نامیم. طبق تعریف انتقال، می‌دانیم $AA' = BB' = \vec{v}$ و $AA' \parallel BB' \parallel \vec{v}$ پس در چهارضلعی $AA'B'B$ دو ضلع AA' و BB' موازی و مساوی‌اند (۵/۵). در نتیجه $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است و می‌توانیم بگوییم $AB \parallel A'B'$ پس انتقال، شیب خط AB را تغییر نداده است. (۵/۵)



حالت دوم: اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد انتقال یافته آن یعنی $A'B'$ روی امتداد AB قرار دارد (۵/۵). پس $AB \parallel A'B'$ و انتقال شیب خط AB را حفظ کرده است. (۵/۵)



۷. الف مجموع کمان‌های یک دایره برابر 360° است؛ پس:

$$\begin{aligned} 2x + 3x + 4x &= 360^\circ \quad (\text{۵/۵}) \\ \Rightarrow 9x &= 360^\circ \Rightarrow x = 40^\circ \quad (\text{۵/۵}) \end{aligned}$$

از طرفی $\hat{A}$ زاویه محاطی است؛ پس:

$$\hat{A} = y = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{4x}{2} = 2x = 2 \times 40^\circ = 80^\circ \quad (\text{۵/۵})$$

ب $\hat{B}$ زاویه محاطی است؛ پس:

$$\hat{B} = 50^\circ = \frac{\widehat{AL}}{2} \quad (\text{۵/۵}) \Rightarrow \widehat{AL} = 100^\circ \quad (\text{۵/۵})$$

مجموع کمان‌های دایره برابر 360° است؛ پس:

$$\begin{aligned} \widehat{AL} + \widehat{BL} + \widehat{AB} &= 360^\circ \quad (\text{۵/۵}) \\ \Rightarrow 100^\circ + 120^\circ + \widehat{AB} &= 360^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 140^\circ \quad (\text{۵/۵}) \end{aligned}$$

حالا چون زاویه x یک زاویه ظلی است، می‌توانیم بگوییم:

$$x = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ \quad (\text{۵/۵})$$

۸. بازتاب $A'B'C'$ نسبت به محور d_1 برابر $A''B''C''$ است.

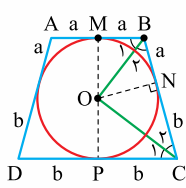
الف می‌دانیم هر محور بازتاب، عمودمنصف پاره خط بین نقطه و تصویر آن است؛ پس:

$$AH = A'H, A'H' = A''H' \quad (\text{۵/۵})$$

پس AA'' برابر است با:

$$\begin{aligned} AA'' &= \overline{AH} + \overline{A'H} + \overline{A'H'} + \overline{A''H'} = 2A'H + 2A'H' \\ &= 2(\overline{A'H} + \overline{A'H'}) = 2m \quad (\text{۵/۵}) \end{aligned}$$

ب اگر هر نقطه از مثلث ABC را تحت برداری به طول 2m و عمود بر محورهای بازتاب d_1 و d_2 انتقال دهیم، به مثلث $A''B''C''$ می‌رسیم؛ پس نتیجه می‌گیریم «ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال با برداری برابر فاصله بین آن دو محور موازی است. (۵/۵)



۱۱. می دانیم دوزنقه محاطی، حتماً متساوی الساقین است (۵/۵). از طرفی اگر نیمسازهای B و C را رسم کنیم، یکدیگر را در مرکز دایره محاطی قطع می کنند (۵/۵):

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_p + \hat{C}_p = 90^\circ \quad (۵/۵)$$

در نتیجه مثلث OBC قائم الزاویه است و داریم: حال اگر ارتفاع وارد بر وتر این مثلث را رسم کنیم (ON)، طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$ON^2 = a \times b \quad (۵/۵) \xrightarrow{ON=r} \text{ شعاع دایره محاطی } r^2 = a \times b$$

$$\xrightarrow{MP=r} \left(\frac{MP}{r}\right)^2 = ab \quad (۵/۵) \Rightarrow MP = \sqrt{ra \times rb}$$

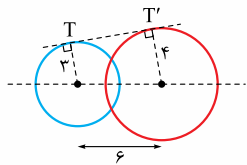
$$\Rightarrow MP = \sqrt{AB \times DC} \quad (۵/۵)$$

حالا مساحت دوزنقه برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2} (MP) \quad (۵/۵)$$

$$= \frac{AB+DC}{2} \times \sqrt{AB \times DC} \quad (۵/۵)$$

میانگین هندسی
میانگین حسابی



$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad (۵/۵)$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{6^2 - (4-3)^2} = \sqrt{35} \quad (۵/۵)$$

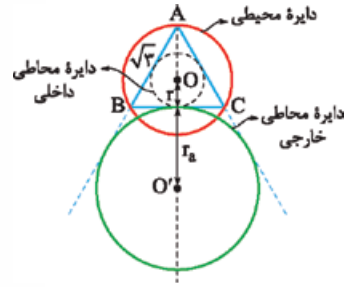
۱۲. دوران تبدیلی ایزومتري است؛ پس:

$$|AB| = |BC| \quad (۵/۵)$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (a+1)^2} = \sqrt{4+4} \quad (۵/۵)$$

$$\sqrt{2a^2 + 2} = \sqrt{8} \xrightarrow{\text{توان}} 2a^2 = 6 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

که سؤال مقدار مثبت a را می خواهد، پس: $a = +\sqrt{3} \quad (۵/۵)$



$$OO' = r + r_a \quad (۵/۵)$$

$$r = \frac{S}{P} \quad (۵/۵)$$

$$\frac{S = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (۵/۵)}{P = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (۵/۵)} \Rightarrow r = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \quad (۵/۵)$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} \quad (۵/۵) \Rightarrow r_a = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2} \quad (۵/۵)$$

$$OO' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \quad (۵/۵)$$

۱۵. اگر S مساحت و P نصف محیط باشد، شعاع دایره های محاطی داخلی و خارجی برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{S}{P} \quad (۵/۵) \\ r_a &= \frac{S}{P-a} \quad (۵/۵) \\ r_b &= \frac{S}{P-b} \quad (۵/۵) \\ r_c &= \frac{S}{P-c} \quad (۵/۵) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S}$$

$$= \frac{rP - (a+b+c)}{S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r} \quad (۵/۵)$$