



تقدیم به همسر عزیزم؛ «محمد جانم»

که وجودش انگیزه‌ای است برای ادامه زندگی ...

مقدمه ناشر

گپی راجع به مجموعه «ماجرای بیست»

تا حالا به این فکر کردین که یه دانش آموز توی ۲۴ ساعت شبانه روز چی کار می‌کنه؟

● هفت هشت ساعت می‌خوابه و استراحت می‌کنه.

● حداقل هفت ساعت تو مدرسه‌ست که شیش ساعتش رو سر کلاس و (احتمالاً) داره درس گوش می‌ده.

● حدود یک ساعت تو راه خونه به مدرسه و مدرسه به خونه‌ست.

● سه چهار ساعتی هم توی خونه با کتابا و درساش مشغوله و گشتی می‌گیره.

● چهار پنج ساعت از وقتش هم می‌ره برای غذاخوردن، حضور در آغوش گرم خانواده و کارای شخصی مهم و بازی‌گوشی (که شامل گوش‌بازی هم می‌شه!).

حُب! با این حساب و کتابا معلوم می‌شه یه دانش آموز، ۷۵/۶۲۵ درصد از زمان بیداریش رو با درس و مشق و کتاب و مدرسه و معلم می‌گذرونه با کلی اتفاقات تلخ و شیرین؛ پس بی‌راه نیست که بگیم:

«ماجرای بیست» ماجرای اصلی زندگی یه دانش آموزه.

ما توی خیلی‌سبز این مجموعه رو آماده کردیم چون واقعاً دلمون می‌خواد داستان مدرسه‌رفتن و درس‌خوندن شما و این عمری که به پاش گذاشتین، پایان خیلی خوش و شکوهمندی داشته باشه!

اگه ماجراهای جالب خودتون با درساتون رو به صورت مطلب، عکس، سلفی، خاطره، فیلم و فیلم‌نامه و ... برامون بفرستین، خیلی رو سرمون منت گذاشتین. ما حتمن ماجراهاتون رو یه جایی (مثلن تو سایت خیلی‌سبز یا شاید هم چاپ بعدی کتاب) منتشر می‌کنیم.

ماجرای من و هندسه

یه معلم هندسه داشتیم که خیلی خوب درس می‌داد و با بچه‌ها رابطه خوبی داشت؛ ولی سخت‌گیر هم بود. مثلن بچه‌هایی که تکلیفشون رو انجام نداده بودن باید ۲ برابر جریمه می‌نوشتن و اسم این جریمه رو گذاشته بود: «خشم اقلیدس»!

اما جالب‌تر از خشم اقلیدس چک کردن تکلیف بچه‌ها بود که توی سه مرحله انجام می‌شد:

مرحلهٔ شهود: ایشون یه وقتی به صورت شهودی حس می‌کردن که احتمالاً بچه‌ها تکلیفشون رو درست انجام ندادن و ماجرا با یک جملهٔ خوف شروع می‌شد: «امروز یه حسی بهم می‌گه باید تکلیفاً رو ببینم».

مرحلهٔ استقرا: تکلیفای دو سه نفر از بچه‌ها رو می‌دیدن و اگه شهودشون اشتباه نکرده بود، وارد فاز سوم می‌شدن.

مرحلهٔ استدلال: یکی‌دوتا از سخت‌ترین سؤالای تکلیف رو از ما به صورت کتبی امتحان می‌گرفتن و هر کی نمی‌تونست نمرهٔ کامل بگیره، به خشم اقلیدس گرفتار می‌شد ...

پیام اصلی این ماجرا (و شاید هم پیام اصلی درس هندسه) اینه که برای قضاوت‌کردن و تصمیم‌گرفتن، احساسات و شهود هرگز کافی نیست و باید استدلال کرد. وقتی دارید مسئله‌های هندسه رو اثبات می‌کنید، یادتون بیاد که هندسه فقط یه درس نیست؛ یه دیدگاه و یه روش زندگیه.

در ماجراجویی‌های هندسیتون موفق باشید.

مقدمه مؤلف

«هیچ اتفاقی، اتفاقی نیست.»

یادمه سال‌های دور وقتی دانش‌آموز بودم، اکثر دوستانم با درس و کلاس هندسه مشکل داشتن و همیشه اونی که عاشق هندسه بود، من بودم. شاید به خاطر ذهن خیال‌پرداز و داستان‌سرایی که داشتم، همیشه هندسه و تجسمی که برای درکش نیاز داره، برای من جذابیتی فراتر از هر درس و کتاب دیگه‌ای داشت و این علاقه اون‌قدر ادامه پیدا کرد که الان در خدمت شما هستم با تألیف کتاب هندسه دهم ماجرا ... یعنی همه‌چیز با یه عشق ساده شروع شد ... 😊

توی کتاب ماجرای بیست هندسه دهم، سعی کردم ماجرای هر درس هندسه دهم رو به یه طوری روان و ساده با هم پیش ببریم که هم دانش‌آموزان قوی و هم اون‌هایی که فکر می‌کنن یه کم توی این درس ضعیف‌ترن، آخر سال تحصیلی بدون این‌که خودشون بفهمن، عاشق هندسه شده باشن و نمره ۲۰ رو بغل کنن ...

حواستون باشه، سؤال‌های با علامت 🧐 سخت‌ترین سؤال‌های هر بخشن. اگه به کمتر از ۲۰ راضی نمی‌شین، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، برید سراغ اون‌ها.

و اما حرف آخر، می‌خوام تشکر کنم از دوستان و عزیزانی که در تألیف این کتاب مدیون لطف و زحمت اون‌ها هستم:

- آقای مهدی هاشمی، مدیر تألیف توانمند کتاب‌های ماجرای بیست که بدون کمک و راهنمایی‌های ایشون اصلاً کتابی در کار نبود.
- خانم مریم طاهری، مسئول پروژه کتاب و دوست عزیزم که در تمام مراحل کار یار و یاورم بود.
- و همه دوستان تألیف و تولید انتشارات خیلی‌سبز که شبانه‌روز در تلاش‌اند تا بهترین کتاب‌ها رو به دست بهترین و سخت‌کوش‌ترین بچه‌های دنیا (شما رو می‌گم) برسونن ...

مرداد ۱۴۰۲

زهرا جالینوس



صفحه سؤال‌های امتحانی	صفحه درس‌نامه
۱۰	۷
۱۳	۱۰
۱۵	۱۳
۱۹	۱۵
۲۳	۲۰
۲۶	

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال
درس‌نامه ۱: ترسیم‌های هندسی - بخش اول
درس‌نامه ۲: ترسیم‌های هندسی - بخش دوم
درس‌نامه ۳: ترسیم‌های هندسی - بخش سوم
درس‌نامه ۴: استدلال - بخش اول
درس‌نامه ۵: استدلال - بخش دوم
 پاسخ سؤال‌های امتحانی



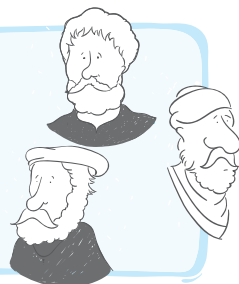
صفحه سؤال‌های امتحانی	صفحه درس‌نامه
۳۶	۳۳
۴۱	۳۸
۴۶	۴۳
۴۹	۴۷
۵۲	۵۰
۵۴	

فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
درس‌نامه ۱: نسبت و تناسب در هندسه
درس‌نامه ۲: قضیه تالس
درس‌نامه ۳: تشابه مثلث‌ها
درس‌نامه ۴: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه
درس‌نامه ۵: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها
 پاسخ سؤال‌های امتحانی



صفحه سؤال‌های امتحانی	صفحه درس‌نامه
۶۴	۶۲
۶۷	۶۵
۷۳	۶۸
۷۶	۷۴
۸۰	۷۶
۸۴	۸۲
۸۷	۸۵
	۸۸

فصل سوم: چندضلعی‌ها
درس‌نامه ۱: مقدمه و تعاریف اولیه
درس‌نامه ۲: متوازی‌الاضلاع
درس‌نامه ۳: خانواده متوازی‌الاضلاع
درس‌نامه ۴: دوزنقه
درس‌نامه ۵: مساحت مثلث و کاربردهای آن
درس‌نامه ۶: مساحت چهارضلعی‌ها و کاربرد آن‌ها
درس‌نامه ۷: نقاط شبکه و مساحت
 پاسخ سؤال‌های امتحانی



صفحه سؤال‌های امتحانی	صفحه درس‌نامه
۱۰۴	۹۸
۱۰۷	۱۰۶
۱۱۱	۱۰۸
۱۱۵	۱۱۳
۱۱۷	

فصل چهارم: تجسم فضایی
درس‌نامه ۱: نقطه، خط و صفحه
درس‌نامه ۲: رسم نما
درس‌نامه ۳: برش
درس‌نامه ۴: دوران حول محور
 پاسخ سؤال‌های امتحانی

شماره صفحه پاسخ	شماره صفحه امتحان
۱۲۷	۱۲۶
۱۳۰	۱۲۹
۱۳۴	۱۳۲
۱۳۸	۱۳۷
۱۴۲	۱۴۱
۱۴۶	۱۴۴

امتحان شماره (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول
 امتحان شماره (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول
 امتحان شماره (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
 امتحان شماره (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
 امتحان شماره (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم
 امتحان شماره (۶): امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳



نسبت و تناسب در هندسه

فہرست

مثلاً فرض کنید مطابق شکل زیر نقطه M طوری روی پاره خط AB قرار داشته باشد که $AM = 3$, $BM = 7$ ؛ به شرطی که هر دو یک واحد اندازه‌گیری داشته باشند، در این حالت می‌توانیم بگوییم که $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{7}$. *حالا یعنی چی؟* یعنی نسبت پاره خط AM به پاره خط BM برابر $\frac{3}{7}$ است (با نقطه M پاره خط AB را به نسبت 3 به 7 تقسیم کرده است).

قناسب

مثلاً اگر نسبت طول (a) به عرض (b) یک مستطیل ۳ به ۲ باشد، آن‌گاه تناسب آن‌ها به صورت $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ نوشته می‌شود یا اگر زاویه‌های α ، β و γ با عددهای ۳، ۴ و ۵ متناسب باشند، داریم: $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5}$.

استفاده کنیم. مثلاً اگر $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{7}$ می‌توانیم بگوییم: $\begin{cases} \alpha = 2X \\ \beta = 7X \end{cases}$

پاسخ: در شکل روبه‌رو اگر زاویه رأس برابر α و زاویه ساق برابر β باشد، آنگاه نسبت آن‌ها برابر است با: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{7}$ یا می‌توانیم بگوییم اگر $\alpha = 4x$ باشد، β برابر $7x$ است. از طرفی مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است، پس داریم:

$$\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 180^\circ \Rightarrow 4x + 2(7x) = 180^\circ \Rightarrow 18x = 180^\circ \Rightarrow x = 10^\circ$$

پس بزرگ‌ترین زاویه برابر است با: $\gamma_X = 70^\circ$

تناسب، چند ویژگی مهم دارد که دانستن آن‌ها به حل مسائل خیلی کمک می‌کند. جدول زیر را حتماً بلد باشید:

مثال	توضیح	ویژگی
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 6 \times 5$	طرفین وسطین کردن	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{5} = \frac{6}{3} \\ \frac{3}{6} = \frac{5}{10} \end{cases}$	تعویض جای طرفین یا وسطین	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$	می‌توانیم هر دو طرف تناسب را معکوس کنیم.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{3 \pm 5}{5} = \frac{6 \pm 10}{10}$	ترکیب یا تفضیل نسبت در صورت کسرها	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{3}{3 \pm 5} = \frac{6}{6 \pm 10}$	ترکیب یا تفضیل نسبت در مخرج کسرها	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$
$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3+6}{5+10} = \frac{3-6}{5-10}$	می‌توانیم صورت‌ها را با هم جمع (تفریق) و مخرج‌ها را هم با هم جمع (تفریق) کنیم.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$

حالت کلی ویژگی ۶: طبق ویژگی شماره ۶، گفتیم که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ، آن‌گاه: $\frac{a+c}{b+d} = k$. این ویژگی در حالت کلی برای تناسب

$$\frac{a_1}{a_r} = \frac{b_1}{b_r} = \frac{c_1}{c_r} = \dots = \frac{z_1}{z_r} = k \quad \text{هم برقرار است و می‌توانیم بنویسیم:}$$

$$\frac{a_1}{a_r} = \frac{b_1}{b_r} = \frac{c_1}{c_r} = \dots = \frac{z_1}{z_r} = k \Rightarrow \frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots + z_1}{a_r + b_r + c_r + \dots + z_r} = k$$

مثال: ویژگی ترکیب در صورت را اثبات کنید. $(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d})$

پاسخ: فرض می‌کنیم: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. حالا به دو طرف تساوی مقدار ثابت ۱ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

مثال: از عبارت $\frac{7x+1}{2} = \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{5}$ مقدار x و y را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا بخش اول تناسب $(\frac{7x+1}{2} = \frac{x-3}{3})$ را طرفین وسطین می‌کنیم تا مقدار x را پیدا کنیم:

$$\frac{7x+1}{2} = \frac{x-3}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3(7x+1) = 2(x-3) \Rightarrow 21x+3 = 2x-6 \Rightarrow 19x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{19}$$

حالا مقدار x را در بخش دوم تناسب $(\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{5})$ جای گذاری کرده و y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{-\frac{9}{19}-3}{3} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow \frac{-\frac{57}{19}}{3} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow y = \frac{-148}{19}$$

مثال: اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

پاسخ: با استفاده از حالت کلی ویژگی (۶) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x+y+z}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow x+y+z = \frac{33}{5}$$

میانگین (واسطه) هندسی

اگر طرفین یا وسطین یک تساوی با هم برابر باشد، مثلاً $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ ، آن‌گاه b را واسطه هندسی بین a و c می‌نامیم و همواره داریم: $b^2 = ac$

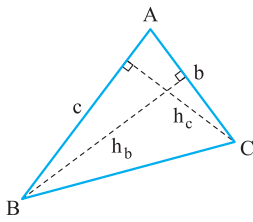
مثلاً ۸ واسطه هندسی بین اعداد ۴ و ۱۶ است؛ زیرا: $8^2 = 4 \times 16$

مثال: اگر $2x$ واسطه هندسی بین $3x-3$ و $3x+1$ باشد، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ: از آنجا که $2x$ واسطه هندسی بین $3x-3$ و $3x+1$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$(3x)^2 = (3x+1)(3x-3) \Rightarrow 9x^2 = 9x^2 - 6x - 3 \Rightarrow 6x = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

رابطه نسبت دو ارتفاع یک مثلث با نسبت قاعده‌های نظیر آنها



در مثلث ABC روبه‌رو، ارتفاع‌های h_b و h_c را رسم می‌کنیم و مساحت مثلث ABC را یک بار با ارتفاع h_b و قاعده b و بار دیگر با ارتفاع h_c و قاعده c می‌نویسیم. می‌دانیم مساحت مثلث در هر دو

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}c \times h_c = \frac{1}{2}b \times h_b \Rightarrow c \cdot h_c = b \cdot h_b \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c} \quad \text{پس: حالت برابر است، پس:}$$

یعنی: در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آنها برابر است.

نتیجه: همیشه بزرگ‌ترین ارتفاع به کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود:

$$a > b > c \Leftrightarrow h_a < h_b < h_c$$

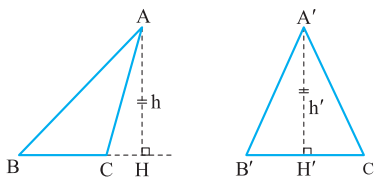
مثال: طول اضلاع مثلثی برابر ۴، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ است و طول کوتاه‌ترین ارتفاع آن ۱ است. طول دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم در هر مثلث، بزرگ‌ترین ارتفاع، نظیر کوچک‌ترین ضلع است؛ یعنی در این‌جا داریم: $4 > \sqrt{7} > \sqrt{3} \Rightarrow 1 < h_a < h_b$ پس ضلع C برابر ۴ و ارتفاع آن $h_c = 1$ است. حالا ارتفاع وارد بر دو ضلع دیگر مثلث را به دست می‌آوریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{h_a}{h_c} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{h_a}{1} \Rightarrow h_a = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} \quad \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{h_b}{1} \Rightarrow h_b = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌ارتفاع

اگر دو مثلث، ارتفاع‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر است با نسبت اندازه قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

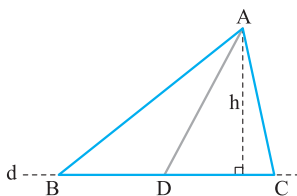


$$h = h' \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}BC \times h}{\frac{1}{2}B'C' \times h'} = \frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه: در شکل روبه‌رو، اگر دو مثلث مثل ABD و ADC در رأس A مشترک باشند و قاعده‌های مقابل به رأس A یعنی BD و DC روی یک خط مثل d باشند، آن‌گاه ارتفاع این دو مثلث برابر می‌شود. در نتیجه

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times h}{\frac{1}{2}DC \times h} = \frac{BD}{DC}$$

نسبت مساحت آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌ها است، ببینید:

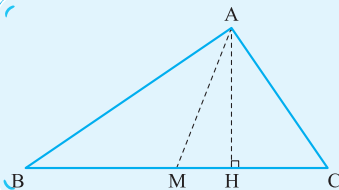


این رابطه را می‌توانیم برای مثلث‌های هم‌ارتفاع دیگر هم بنویسیم:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC}, \quad \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DC}{BC}$$

نکته

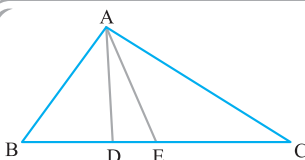
میانۀ هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند. مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:



$$AM \Rightarrow BM = MC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle AMB}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times MC}{\frac{1}{2} \times AH \times MB} = 1 \Rightarrow S_{\triangle AMC} = S_{\triangle AMB}$$

مثال: در شکل مقابل، مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت

مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید. (تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)



پاسخ: تعیین نسبت $\frac{DE}{BD}$: گفته‌های صورت سؤال را به صورت ریاضی می‌نویسیم تا ببینیم چی می‌گه:

$$S_{\triangle ACE} = 3S_{\triangle ADE} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ADE}} = 3$$

چون مثلث‌های ACE و ADE در رأس A مشترک‌اند و ارتفاع‌های برابر دارند، نسبت مساحت آن‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است و داریم:

$$\frac{CE}{DE} = 3 \Rightarrow DE = \frac{1}{3}CE \quad (1)$$

همین موضوع برای دو مثلث ACE و ABD هم برقرار است:

$$\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{CE}{BD} = 2 \Rightarrow BD = \frac{1}{2}CE \quad (2)$$

حالا نسبت‌های خواسته‌شده مسئله را به دست می‌آوریم. با تقسیم‌کردن طرفین طبق رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

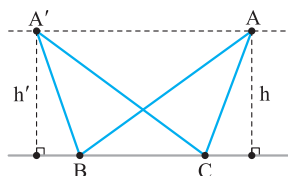
$$\frac{DE}{BD} = \frac{\frac{1}{3}CE}{\frac{1}{2}CE} = \frac{2}{3}$$

تعیین نسبت $\frac{BC}{DE}$: از آنجا که ضلع BC برابر $BD + DE + EC$ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + CE}{DE} = \frac{\frac{1}{2}CE + \frac{1}{3}CE + CE}{\frac{1}{3}CE} = \frac{\frac{11}{6}CE}{\frac{1}{3}CE} = \frac{11}{2}$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

اگر دو مثلث، قاعده‌های برابر داشته باشند و رأس سوم آن‌ها روی خطی موازی با قاعده قرار بگیرد، در این صورت، مساحت‌های این دو مثلث با هم برابرند. مثلاً به شکل زیر دقت کنید. برای دو مثلث ABC و A'BC که قاعده‌های مشترک دارند، داریم:

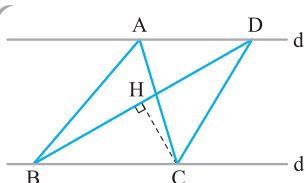


$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \times h$$

$$S_{\triangle A'BC} = \frac{1}{2}BC \times h'$$

فاصله بین دو خط موازی همواره یکسان است. ($h=h'$)

$$\rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC}$$



مثال: در شکل مقابل، $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC برابر ۸ است. اگر $BD = 6$ باشد، فاصله نقطه C از BD چقدر است؟
(تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

پاسخ: فاصله بین خطوط موازی همواره برابر است، بنابراین در شکل بالا ارتفاع دو مثلث ABC و DBC برابر است. قاعده هر دو مثلث هم BC است؛ پس مساحت مثلث‌های ABC و DBC برابر است، حالا مسئله مقدار CH را از ما می‌خواهد:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC} = 8 \Rightarrow S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}CH \times BD \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times CH \times 6 \Rightarrow CH = \frac{8}{3}$$

در امتحان چه خبر؟

بریم سراغ تیپ سوال‌هایی که معلم‌هاتون توی این درس بهش علاقه دارن.

تیپ ۱: یک تناسب با مقادیر مجهول در سؤال وجود دارد و از شما می‌خواهند مقدار یک کسر شامل آن مقادیر مجهول را به دست آورید. برای حل این سؤال‌ها کافی است جدول مربوط به ویژگی‌های تناسب را خوب تمرین کرده باشید.

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۱ و ۲ / ۷ / ۸ / ۱۰ تا ۱۳

تیپ ۲: میانگین هندسی: دیگه واضح‌تر از این سؤال نداریم. فرمول $b^2 = ac$ رو سرلوفه حل این سؤال‌ها بنذار، بقیه‌ش مناسباته ...

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۳ / ۱۴ و ۱۵

تیپ ۳: برای حل سؤال‌های مربوط به مساحت مثلث‌ها که قاعده برابر یا ارتفاع برابر یا ... دارند، فقط همان چندتا نکته داخل درس‌نامه کافی است. (تنوع این سؤال‌ها زیاده ولی کافیه مثلث‌های درست رو انتخاب کنی!)

حالاتوکل کن: سؤال‌های ۴ تا ۶ / ۹ / ۱۶ تا ۲۶

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب پر کنید.

۱- اگر $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ آن‌گاه $\frac{a+b}{a}$ برابر است.

۲- $\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$

۳- اگر b میانگین هندسی بین a و c باشد، آن‌گاه $b^2 = \dots\dots\dots$

۴- در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع با عکس نسبت وارد بر آن‌ها برابر است.

۵- اگر دو مثلث قاعده‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با

(مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

(مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

درستی و نادرستی عبارتهای زیر را بیان کنید، برای نادرستها علت بنویسید.

۶- در مثلث ABC ، اگر AM میانه باشد، نسبت مساحت مثلثهای ABM و ACM برابر یک است.

۷- اگر بدانیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آن گاه $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$.

۸- در یک مثلث، نسبت زاویههای داخلی ۱، ۲ و ۹ است. اندازه کوچکترین زاویه این مثلث برابر 10° است.

۹- در مثلث ABC ، پارهخطهای BH و CH' به ترتیب ارتفاعهای وارد بر AC و AB هستند. اگر $AC = 2AB$ آن گاه $BH = 2CH'$.

به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.

۱۰- اگر $\frac{2a}{3} = \frac{b-3}{3} = \frac{2c+1}{4}$ و $3a+b+2c=11$ باشد، مقادیر a ، b و c را به دست آورید. (مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

۱۱- اگر برای اعداد غیر صفر a ، b و c داشته باشیم: $\frac{2a+c}{b} = \frac{a+2b}{c} = \frac{b+2c}{a}$ ، آن گاه حاصل $\frac{(a+2b)(b+2c)(2a+c)}{abc}$ را به دست آورید.

۱۲- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل $\frac{2a-2c+8}{3b-2d+10}$ را به دست آورید.

۱۳- پاره خط AB به طول ۱۵ و دو نقطه C و D را روی این پاره خط طوری در نظر می گیریم که $\frac{AC}{CB} = \frac{BD}{AD} = 3$ باشد. طول پاره خط DC را به دست آورید.

۱۴- طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره خط به طولهای ۸ و ۱۰ باشد. (تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

۱۵- اگر M واسطه هندسی بین دو عدد ۲، ۸ و N واسطه هندسی ۹ و M باشد، واسطه هندسی M و N را بیابید.

۱۶- ثابت کنید در هر مثلث نسبت اندازههای هر دو ضلع برابر عکس نسبت ارتفاعهای وارد بر آنهاست. (فعالیت صفحه ۳۰ کتاب درسی)

۱۷- ثابت کنید هرگاه ارتفاعهای نظیر دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت آنها برابر با نسبت اندازه قاعدههایی است که این ارتفاعها به آنها

وارد می شود. (فعالیت صفحه ۳۱ کتاب درسی)

۱۸- ثابت کنید اگر در دو مثلث، یک رأس مشترک و قاعدههای مقابل به این رأسها روی یک خط باشند، نسبت مساحتهای آنها برابر با نسبت

اندازه قاعدهها است. (کار در کلاس صفحه ۳۱ کتاب درسی)

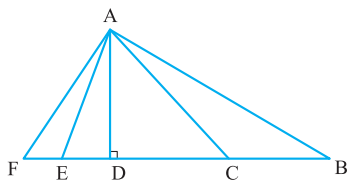
۱۹- ثابت کنید اگر دو مثلث قاعده مشترک داشته باشند و رأس روبه روی این قاعدهها روی خطی موازی قاعده باشد، مساحت این دو مثلث برابر است.

۲۰- طول ارتفاعهای یک مثلث ۱۲، ۱۵، ۳۳ و طول کوچکترین ضلع آن ۱۱ است. محیط این مثلث را به دست آورید.

۲۱- ثابت کنید هر میانه در مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت برابر تقسیم می کند. (کار در کلاس صفحه ۳۲ کتاب درسی)

۲۲- در شکل زیر رأس همه مثلثها در A مشترک است. نسبت مساحتهای مثلثهای داده شده را بنویسید.

(کار در کلاس صفحه ۳۱ کتاب درسی)



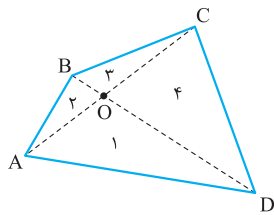
$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABF}} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AFC}} \quad \text{الف)}$$

۲۳- در چهارضلعی محدب شکل مقابل، با رسم قطرها ۴ مثلث ایجاد می شود. ثابت کنید:

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

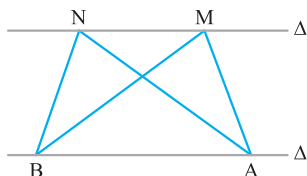
$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$



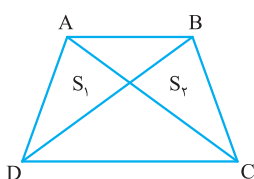
۲۴- در شکل مقابل، اگر Δ و Δ' موازی باشد و مساحت مثلث ABM برابر ۲۰ باشد و $NB = 4$ ،

(مشابه تمرین صفحه ۳۳ کتاب درسی)

فاصله A تا ضلع NB چه قدر است؟

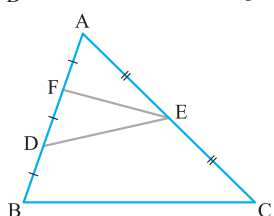


۲۵- در دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل قطرها رسم شده اند، ثابت کنید: $S_1 = S_2$. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



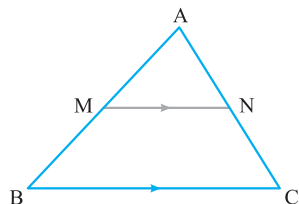
۲۶- در مثلث ABC مطابق شکل، E وسط AC و $AF = DF = BD$ است. ثابت کنید مساحت مثلث

$$DEF, \frac{1}{6} \text{ مساحت مثلث } ABC \text{ است.}$$



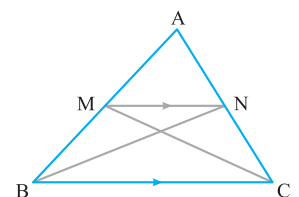
آقای تالس دانشمند و ریاضی‌دان متولد قبل از میلاد مسیح و حتی قبل از آقای فیثاغورس بوده که کلی نظریه داشته. یکی از آن‌ها، معروف به قضیه تالس است. توی این درس می‌خوایم قضیه تالس و هر پی مربوط به اون می‌شه رو یاد بگیریم.

قضیه تالس



هرگاه در مثلثی، خطی موازی یکی از اضلاع رسم کنیم تا دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه چهار پاره‌خط ایجاد شده روی این دو ضلع متناسب‌اند، مثلاً در مثلث ABC مقابل داریم:

$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



اثبات: برای اثبات این قضیه: ابتدا دو خط NB و MC را رسم می‌کنیم. می‌دانیم اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده‌های آن‌ها روی یک خط باشد، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است، پس در مثلث‌های AMN و MNC که در رأس M مشترک و هم ارتفاع‌اند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNC}} = \frac{AN}{NC} \quad (1)$$

به همین ترتیب نسبت مساحت‌های مثلث‌های AMN و MNB که در رأس M مشترک و هم ارتفاع‌اند، برابر است با:

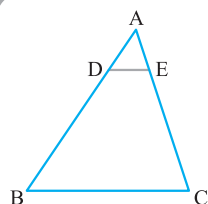
$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNB}} = \frac{AM}{MB} \quad (2)$$

از طرفی چون در مثلث‌های MNB و MNC، قاعده MN مشترک و فاصله B و C از قاعده MN یکسان است (MN \parallel BC)، پس:

$$S_{\triangle MNB} = S_{\triangle MNC}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \quad (\text{قضیه تالس})$$

$$\text{در نتیجه} \quad \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNC}} = \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle MNB}} \quad \text{و طبق روابط (1) و (2) می‌توانیم بنویسیم:}$$

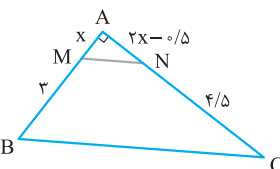


مثال: در شکل مقابل، BC \parallel DE، AD = ۱، DB = ۳ و AE = ۸/۵. به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید.

(کار در کلاس صفحه ۳۴ کتاب درسی)

پاسخ: طبق تالس اگر BC \parallel DE باشد، داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{8/5}{EC} \Rightarrow EC = 24/5 \Rightarrow AC = AE + EC = 8/5 + 24/5 = 32/5$$



مثال: در شکل مقابل BC \parallel MN است. به کمک قضیه تالس، مقدار x و سپس مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

(مشابه کار در کلاس صفحه ۳۴ کتاب درسی)

پاسخ: وجود دوتا خط موازی در یک شکل باید سریع ما را به یاد قضیه تالس بیندازد:

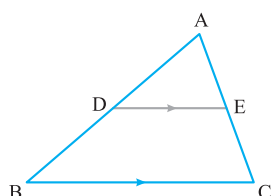
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{2x - 5/5}{4/5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 6x - 1/5 = 4/5x \Rightarrow x = 1$$

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

پس اضلاع AB و AC به ترتیب برابر ۴ و ۶ است و مساحت ABC برابر است با:

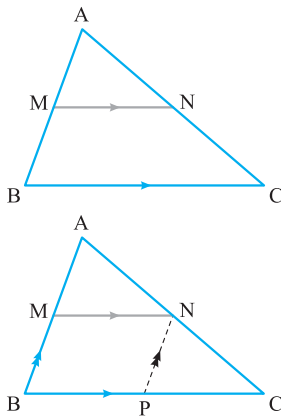
نتایج قضیه تالس

به کمک ویژگی‌های تناسب، قضیه تالس به شکل‌های زیر هم نوشته می‌شود که خیلی هم کاربرد دارند:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{جزء به کل})$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC} \quad (\text{جزء به کل})$$



اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی تشکیل می‌شود که اندازه ضلع‌های آن با ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند. مثلاً در مثلث ABC مقابل، خط MN دو ضلع AB و AC را قطع کرده و با BC موازی است. نسبت اضلاع مثلث AMN و ABC را ببینید:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

اثبات: برای اثبات این قضیه، مطابق شکل از نقطه N خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در P قطع کند. چون داشتیم $BC \parallel MN$ و حالا می‌دانیم $AB \parallel NP$ ، در نتیجه چهارضلعی با داشتن دو ضلع روبه‌روی موازی MNPB متوازی‌الاضلاع است و اضلاع مقابل با هم برابرند: $MN = BP$ (*)

$$\begin{cases} MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} & (1) \\ NP \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC} & (2) \end{cases}$$

حالا یک بار در مثلث ABC و با پاره‌خط‌های موازی MN و BC و بار دیگر در مثلث ABC و با پاره‌خط‌های موازی NP و AB تالس جزءبه‌کل را می‌نویسیم:

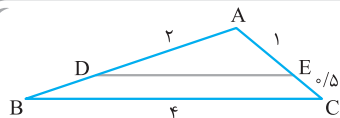
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC}$$

از رابطه (1) و (2) نتیجه می‌گیریم:

و چون طبق (*), مقدار BP برابر MN بود، پس:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (\text{تعمیم قضیه تالس})$$

توجه: دقت کنید تعمیم قضیه تالس معمولاً جاهایی استفاده می‌شود که طول پاره‌خط‌های موازی مدنظر سؤال باشد.



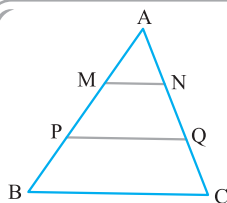
مثال: در شکل مقابل: $DE \parallel BC$. طول‌های DE و AB را به دست

آورید. (تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)

پاسخ: طول پاره‌خط موازی DE را می‌خواهیم پس از تعمیم تالس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+2} = \frac{3}{3+5} \Rightarrow AB = 3 \\ \frac{1}{1+2} = \frac{DE}{4} \Rightarrow DE = \frac{4}{3} \end{cases}$$

یکم سؤال‌ها رو سخت‌تر کنیم:



مثال: در شکل مقابل، $AM = MP = PB$ و $BC \parallel MN \parallel PQ$ است. ثابت کنید: $MN + PQ = BC$.

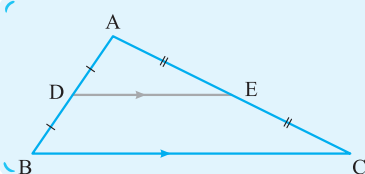
پاسخ: کافی است دو بار تعمیم قضیه تالس را بنویسیم. ببینید:

$$\triangle APQ : MN \parallel PQ \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AP} = \frac{MN}{PQ} \xrightarrow{\frac{AM=MP}{AP=2AM}} \frac{1}{2} = \frac{MN}{PQ} \Rightarrow 2MN = PQ \quad (1)$$

$$\triangle ABC : MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \xrightarrow{\frac{AM=MP=PB}{AB=3AM}} \frac{1}{3} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow 3MN = BC \quad (2)$$

$$MN + PQ = MN + 2MN = 3MN = BC$$

حالا طبق (1) و (2) داریم:

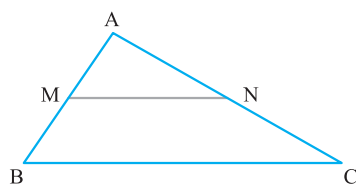


در مثلث ABC مقابل، اگر از D در وسط ضلع AB پاره‌خط DE را موازی ضلع BC رسم کنیم، آن‌گاه از E از وسط AC می‌گذرد و پاره‌خط DE نصف ضلع BC است:

$$AD = DB, DE \parallel BC \Rightarrow AE = EC, \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

تالس یک قضیه دوشرطی است و عکس آن هم همواره برقرار است، یعنی:

«اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.»



مثلاً در مثلث روبه‌رو، اگر خط MN ، ضلع‌های AB و AC را قطع کند و رابطه $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ برقرار باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

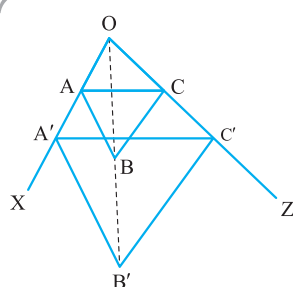
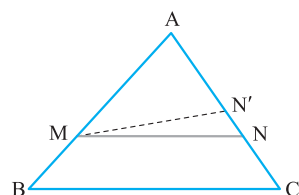
$$MN \parallel BC$$

اثبات: برای اثبات این قضیه از **برهان خلف** استفاده می‌کنیم. در مثلث زیر می‌دانیم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد و داشته باشیم $MN \nparallel BC$.

پس می‌توانیم از نقطه M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم کنیم. به طوری که N' منطبق بر N نباشد، حالا با توجه به قضیه تالس داریم:

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

از مقایسه این تناسب با فرض مسئله داریم $\frac{AN}{AC} = \frac{AN'}{AC}$ پس باید: $AN = AN'$ و N بر N' منطبق باشد، پس MN' همان MN است و موازی BC است.



مثال: در شکل مقابل، می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ ، با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$.

(تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

پاسخ: باید قضیه تالس را برای دو جفت مثلث بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OA'B' \Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'} \\ \triangle OC'B' \Rightarrow BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'}$$

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'} \Rightarrow AC \parallel A'C'$$

حالا طبق عکس قضیه تالس در مثلث $OA'C'$ داریم:

(مشابه تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

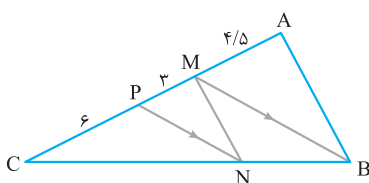
مثال: در شکل زیر $MB \parallel PN$ ، با توجه به اندازه‌های روی شکل ثابت کنید: $AB \parallel MN$.

پاسخ: اگر $MB \parallel PN$ باشد طبق تالس در مثلث CMB داریم:

$$\frac{CN}{CB} = \frac{CP}{CM} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\text{از طرفی طبق اندازه‌های روی شکل می‌دانیم: (۲) } \frac{CM}{CA} = \frac{9}{13/5} = \frac{2}{3}$$

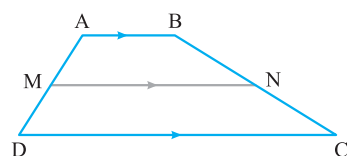
پس طبق روابط (۱) و (۲): $\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{CA} = \frac{2}{3}$ و با استفاده از عکس قضیه تالس می‌توانیم بگوییم در مثلث ABC داریم: $MN \parallel AB$.



تالس در ذوزنقه

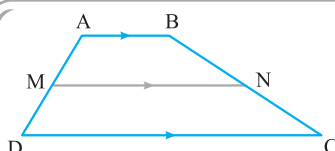
در هر ذوزنقه، اگر خطی موازی دو قاعده آن رسم شود، روی ساق‌ها، پاره‌خط‌های متناظر متناسب ایجاد می‌کند، مثلاً در ذوزنقه $ABCD$ روبه‌رو داریم:

$$AB \parallel MN \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$



(تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

مثال: قضیه تالس را در ذوزنقه مقابل ثابت کنید.

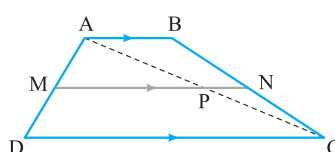


پاسخ: برای اثبات قضیه تالس در ذوزنقه $ABCD$ ، ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم سپس در مثلث‌های ایجادشده قضیه تالس را می‌نویسیم:

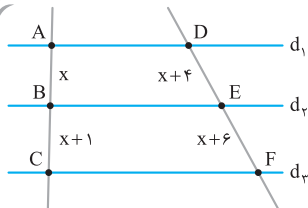
$$\triangle ABC : AB \parallel PN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CN}{BN} = \frac{CP}{AP} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{BN}{CN} = \frac{AP}{CP} \quad (۱)$$

$$\triangle ADC : MP \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MD} = \frac{AP}{CP} \quad (۲)$$

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \quad \text{حالا طبق (۱) و (۲) داریم:}$$



مثال: در شکل روبه‌رو $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$. مقدار x را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)



پاسخ: اگر $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ ، پس می‌توانیم بگوییم که شکل $ACFD$ یک دوزنقه است، آن‌گاه طبق قضیهٔ تالس در دوزنقه داریم:

$$AD \parallel BE \parallel CF \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+4}{x+6} \Rightarrow x^2 + 6x = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x = 4$$

جمع‌بندی: بیایید به بار هر پی از تالس یادگرفتیم رو مرور کنیم.

قضیهٔ تالس		$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} 1) \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \text{ (جزء به جزء)} \\ 2) \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \text{ (جزء به کل)} \end{cases}$
تعمیم تالس		$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
عکس تالس		$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$
تالس در دوزنقه		$AB \parallel MN \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

در امتحان چه خبر؟

بریم ببینیم از تالس چه سؤال‌هایی توی امتحان‌ها میاد:

تیپ ۱: ساده‌ترین تیپ سؤال در این درس، مربوط به اثبات خود قضیه‌ها یا درستی و نادرستی فرمول‌های اصلی است. کاری نداره! فقط باید به درس‌نامهٔ این کتاب مسلط باشید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۲۷ تا ۳۸ و ۴۸

تیپ ۲: یک مثلث با یک سری اضلاع معلوم و مجهول و صد البته یک یا چند خط موازی داخل آن وجود دارد که شما باید مقادیر مجهول را به دست بیاورید. گفتیم هر جا خط‌های موازی داخل مثلث دیدید به تالس یا تعمیم آن مشکوک شوید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۳۹ تا ۴۷ و ۴۹

تیپ ۳: تیپ آخر سؤالات این درس هم مربوط به تالس در دوزنقه است که هم باید اثبات آن را بلد باشید و هم بتوانید از رابطهٔ درس‌نامه سؤال‌های کمی سخت‌تر را حل کنید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۵۰ تا ۵۲

سؤال‌های امتحانی

■ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

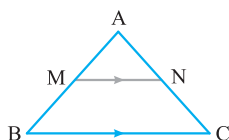
۲۷- اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن چهار پاره‌خط متناسب ایجاد کند، آن‌گاه با ضلع سوم است.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\text{..... (الف)}}{AC} = \frac{MN}{\text{..... (ب)}}$$

۲۸- اگر در مثلث ABC ، MN را موازی BC رسم کنیم، آن‌گاه:

■ در شکل مقابل، پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)



$$\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad -35$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad -36$$

$$AM \times NC = AN \times MB \quad -37$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{BC} \quad -32$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA} \quad -33$$

$$\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{CA} = \frac{MN}{BC} \quad -34$$

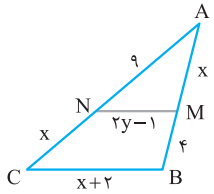
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC} \quad -29$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad -30$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad -31$$

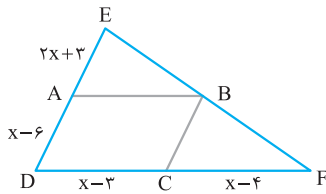
۳۸- قضیه تالس و عکس آن را بیان و اثبات کنید.

۳۹- در شکل روبه‌رو، $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را به دست آورید.



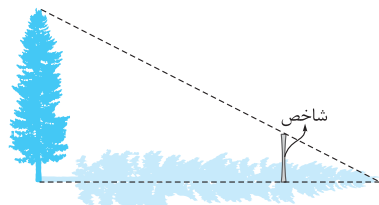
(تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)

۴۰- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. مقدار x را محاسبه کنید.

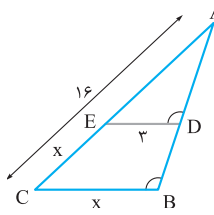


۴۱- در شکل روبه‌رو، اگر طول سایه درخت ۶۰ متر، طول سایه شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چه قدر است؟

(تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

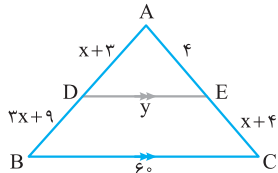


۴۲- در شکل روبه‌رو، زاویه‌های D و B برابرند. مقدار x را به دست آورید.



(مشابه تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)

۴۳- محیط چهارضلعی DECB را بیابید.

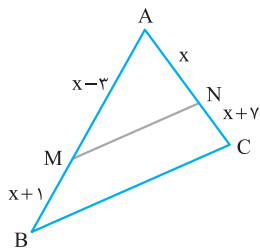


(مشابه تمرین صفحه ۳۶ کتاب درسی)

۴۴- در شکل روبه‌رو، اگر $MN \parallel BC$ باشد، آن گاه:

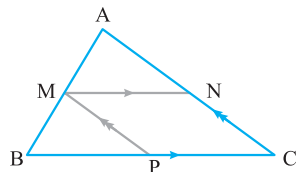
الف) طول ضلع AC را به دست آورید.

ب) اگر $MN = 10$ باشد، طول ضلع BC را بیابید.



۴۵- در مثلث ABC ، از نقطه M روی ضلع AB دو خط موازی اضلاع BC و AC رسم شده است. ثابت کنید: $\frac{MN}{BC} + \frac{MP}{AC} = 1$.

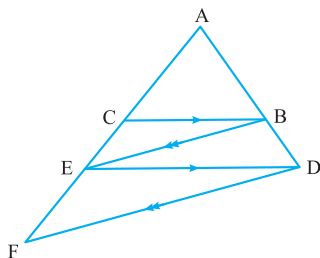
(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

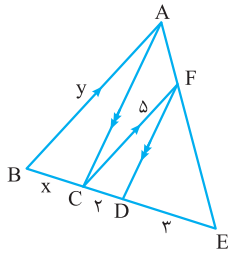


۴۶- در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$. به کمک قضیه تالس ثابت کنید که

(تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

AE واسطه هندسی بین AC و AF است.

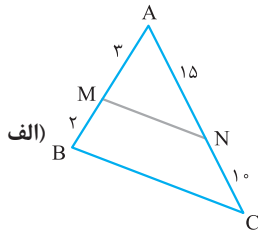




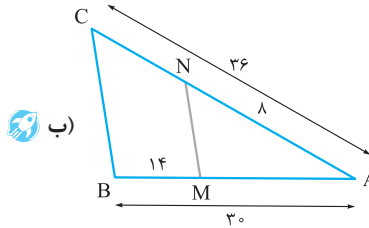
۴۸- ثابت کنید، خطی که از وسط یک ضلع از مثلث موازی ضلع دیگر رسم می‌شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد و اندازه آن، نصف ضلع موازی است.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۴۹- با دلیل مشخص کنید در کدام یک از شکل‌های زیر $MN \parallel BC$ است؟

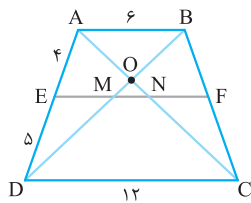
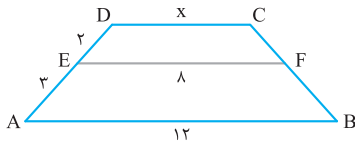


(الف)



(ب)

۵۰- در شکل روبه‌رو اگر $AB \parallel EF \parallel CD$ باشد، طول DC را به دست آورید.



(مشابه تمرین صفحه ۳۷ کتاب درسی)

۵۱- در دوزنقه $ABCD$ ، $AB \parallel EF$ است، اندازه MN را بیابید.

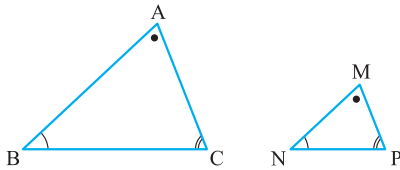
۵۲- ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی دو قاعده است و طول آن برابر میانگین طول‌های دو قاعده دوزنقه است.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

تشابه مثلث‌ها



از آموخته‌های سال‌های قبل می‌دانیم دو مثلث زمانی با هم متشابه‌اند که زاویه‌های برابر و اندازه ضلع‌های متناسب داشته باشند. حالا این یعنی چی؟ یعنی اگر دو مثلث ABC و MNP متشابه باشند، همواره داریم:



$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{M}, \hat{B} = \hat{N}, \hat{C} = \hat{P} \\ \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k \end{cases}$$

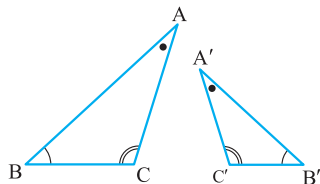
پس اگر مثلث MNP را بگیریم و اضلاع آن را k برابر کنیم یا برعکس، ABC را بگیریم و اضلاع را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم به مثلث دیگر می‌رسیم.

به k یا $\frac{1}{k}$ که همان نسبت اضلاع نظیر در مثلث‌های متشابه است، **نسبت تشابه** می‌گوییم.

توجه: بایید برای نوشتن نسبت اضلاع متناسب در دو مثلث همین اول درس به قانون بذاریم که دیگه قاطی نکنیم!

«زاویه‌های مساوی در دو مثلث را پیدا کنید و اضلاع روبه‌رو به آن‌ها را در یک کسر قرار دهید.» فقط مواستون باشه، همیشه صورت کسرها متعلق به یک مثلث و مخرج‌ها متعلق به مثلث دیگر است.

مثلاً در مثلث‌های مقابل، A و A' برابرند، پس: $\frac{BC}{B'C'}$ و B و B' برابرند، پس: $\frac{AC}{A'C'}$ و C و C' برابرند،



پس: $\frac{AB}{A'B'}$ در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{B'C'} &= \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \triangle ABC \text{ اضلاع} \\ \frac{B'C'}{BC} &= \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \triangle A'B'C' \text{ اضلاع} \end{aligned}$$

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱۲- روش اول: اگر در یک تناسب، صورت و مخرج در عدد ثابتی ضرب شود، آن نسبت تغییر نمی‌کند؛ یعنی در این‌جا:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{3a}{3b} = \frac{4}{5} \\ \frac{c}{d} &= \frac{-2c}{-2d} = \frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{طبق ویژگی‌ها}} \frac{3a-2c+8}{3b-2d+10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2 \times 4}{2 \times 5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

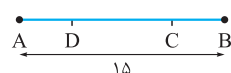
روش دوم:

نکته

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ باشد، هر نسبت خطی از صورت‌ها به روی همان نسبت خطی در مخرج‌ها برابر k است، یعنی

$$\frac{na+mc}{nb+md} = k \quad \text{مثلاً:}$$

حالا در این سؤال هم می‌بینید که صورت و مخرج کسرهای نسبت در یک عدد خاص ضرب شده‌اند، پس داریم:



$$\frac{AC}{CB} = 3 \Rightarrow AC = 3BC$$

$$AC + CB = AB = 15 \Rightarrow BC = \frac{15}{4}$$

$$AD = \frac{15}{4} \quad \text{به همین ترتیب:}$$

پس مقدار DC برابر است با:

$$AD + CB + DC = 15 \Rightarrow DC = 15 - 2 \times \frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

۱۴- اگر طول پاره‌خط را b در نظر بگیریم، داریم:

$$8, b, 10 \Rightarrow b^2 = 8 \times 10 = 80 \Rightarrow b = \sqrt{80}$$

۱۵- M واسطه هندسی بین ۲ و ۸ است؛ پس:

$$M^2 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow M = 4$$

N هم واسطه هندسی بین M و ۹ است و داریم:

$$N^2 = 9 \times M = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow N = 6$$

حالا اگر واسطه هندسی بین M و N برابر P باشد:

$$P^2 = 4 \times 6 = 24 \Rightarrow P = \sqrt{24}$$

۱۶- به صفحه ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۷- به صفحه ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۸- به صفحه ۳۵ درس‌نامه مراجعه شود.

۱۹- به صفحه ۳۶ درس‌نامه مراجعه شود.

۲۰- کوچک‌ترین ضلع مثلث همیشه روبه‌روی بزرگ‌ترین ارتفاع

$$a = 11 \Rightarrow h_a = 33 \quad \text{است، پس:}$$

$$-1 \left(\frac{7}{3} \right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{عکس}} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{b+a}{a} = \frac{4+3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$-2 (14)$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{2+5+7} = \frac{3}{14}$$

$$-3 \quad b^2 = ac$$

-۴ ارتفاع‌های

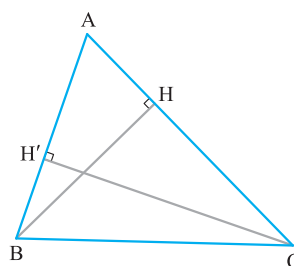
-۵ نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌ها

-۶ درست

-۸ نادرست

کوچک‌ترین زاویه	مجموع زوایا
۱	۱۲
x	180°

$$\Rightarrow x = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$



-۹ نادرست، نسبت ارتفاع‌ها

عکس نسبت اضلاع نظیر است.

$$\frac{AC}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{BH}{CH'} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{1}{2} CH'$$

۱۰- طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{3a}{2} = \frac{b-3}{3} = \frac{2c+1}{4} = \frac{3a+b-3+2c+1}{2+3+4}$$

$$= \frac{3a+b+2c-2}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

حالا هر کسر را می‌توانیم برابر ۱ قرار دهیم:

$$\frac{3a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\frac{b-3}{3} = 1 \Rightarrow b = 6$$

$$\frac{2c+1}{4} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

۱۱- طبق ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{3a+c}{b} = \frac{a+2b}{c} = \frac{b+2c}{a} = \frac{3a+c+a+2b+b+2c}{a+b+c}$$

$$= \frac{3a+2b+2c}{a+b+c} = 3$$

حالا کسر مورد نظر صورت سؤال برابر است با:

$$\frac{(a+2b)(b+2c)(2a+c)}{abc} = \frac{a+2b}{c} \times \frac{b+2c}{a} \times \frac{2a+c}{b}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 27$$

از طرفی چون $AE = EC$ ، پس: $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

طبق (۱) داریم: $3S_r = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_r = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$

موازی -۲۷

الف) AN (ب) BC -۲۸

-۲۹ نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

-۳۱ درست

-۳۰ درست

-۳۲ نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

-۳۳ درست

-۳۴ نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

-۳۵ نادرست، حالت درست این رابطه به شکل زیر است:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

-۳۷ درست

-۳۶ درست

-۳۸ به صفحه ۳۸ و ۳۹ درس نامه مراجعه شود.

-۳۹ اگر $MN \parallel BC$ ، آن گاه طبق

تالس جزء به جزء در مثلث ABC روبه‌رو

داریم:

$$\frac{AN}{CN} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

حالا برای به دست آوردن مقدار y تالس جزء به کل می‌نویسیم:

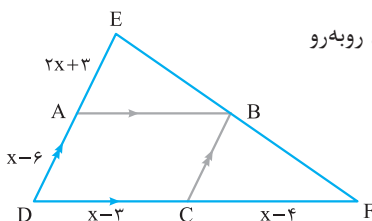
$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{9}{6+9} = \frac{2y-1}{6+2} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{2y-1}{8}$$

$$\Rightarrow 2y-1 = \frac{24}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{9}$$

-۴۰ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$

شکل مقابل، ضلع‌های روبه‌رو

موازی‌اند، پس داریم:



$$AB \parallel DF \xrightarrow[\text{جزء به جزء}]{\text{تالس}} \frac{2x+3}{x-6} = \frac{EB}{BF} \quad (1)$$

$$BC \parallel ED \xrightarrow[\text{جزء به جزء}]{\text{تالس}} \frac{x-4}{x-3} = \frac{BF}{EB} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق (۱) و (۲)}} \frac{2x+3}{x-6} = \frac{x-3}{x-4}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^2 - 5x - 12 = x^2 - 9x + 18$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{136}}{2}$$

حالا طول دو ضلع دیگر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a} \Rightarrow \frac{11}{b} = \frac{12}{33} \Rightarrow b = \frac{121}{4}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a} \Rightarrow \frac{11}{c} = \frac{15}{33} \Rightarrow c = \frac{121}{5}$$

پس محیط مثلث برابر است با:

$$P = a + b + c = 11 + \frac{121}{4} + \frac{121}{5} = 65 \frac{45}{20}$$

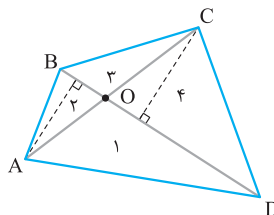
-۲۱ به نکته صفحه ۳۵ درس نامه مراجعه شود.

-۲۲

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AFC}} = \frac{FE}{FC} \quad \text{الف)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{DC}{BF} \quad \text{ب)}$$

-۲۳ در چهارضلعی مقابل:



مثلث‌های BOC و DOC رأس مشترک و ارتفاع‌های یکسان دارند:

$$\frac{S_r}{S_f} = \frac{BO}{DO} \quad (1)$$

مثلث‌های ADO و ABO رأس مشترک و ارتفاع‌های یکسان دارند:

$$\frac{S_r}{S_1} = \frac{BO}{DO} \quad (2)$$

طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{S_r}{S_f} = \frac{S_r}{S_1} \Rightarrow S_1 \cdot S_r = S_r \cdot S_f$$

-۲۴ در شکل زیر، $\Delta \parallel \Delta'$ ، M روی Δ است و قاعده‌های

مثلث‌های NBA و MBA روی یک خط قرار دارند، پس مساحت

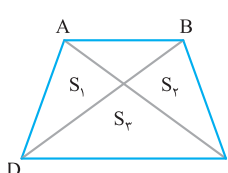
این مثلث‌ها با هم برابر است و داریم:

$$S_{\triangle ABN} = S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AH \times NB = 20$$

$$\xrightarrow{NB=4} AH=10$$

-۲۵ در دوزنقه $ABCD$ زیر، داریم $AB \parallel CD$ پس مساحت

مثلث‌های ADC و BDC برابر است، بنابراین:



$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2$$

-۲۶ در مثلث ABC زیر، از E به B وصل می‌کنیم:

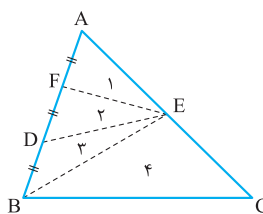
در سه مثلث، (۱) و (۲) و (۳) قاعده‌ها و

ارتفاع برابرند. پس مساحت‌های آن با

هم برابر است:

$$S_1 = S_2 = S_3$$

$$\Rightarrow 3S_r = S_{\triangle ABE} \quad (1)$$



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \quad (۱)$$

$$MP \parallel AC \Rightarrow \frac{MP}{AC} = \frac{MB}{AB} \quad (۲)$$

حالا اگر دو طرف رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، داریم:

$$\frac{MN}{BC} + \frac{MP}{AC} = \frac{AM}{AB} + \frac{MB}{AB} = \frac{AM+MB}{AB} = \frac{AB}{AB} = ۱$$

۴۶- مطابق شکل مقابل، با استفاده از قضیه تالس در دو مثلث ADE و ADF داریم:

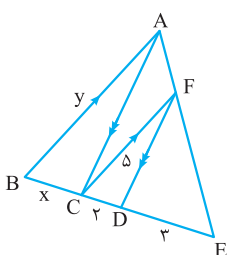
$$\Delta ADE : BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \quad (۱)$$

$$\Delta ADF : BE \parallel FD \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} \quad (۲)$$

چون طرف دوم روابط (۱) و (۲) هم با هم برابرند می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \times AF$$

یعنی AE واسطه هندسی بین AC و AF است.



۴۷- چون در مثل AEB، پس $CF \parallel AB$ و $AC \parallel DF$ پس EC واسطه هندسی ED و EB است و داریم:

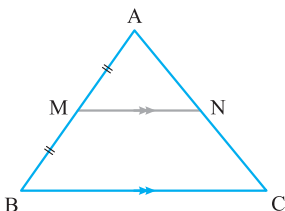
$$(EC)^2 = ED \times EB$$

$$\Rightarrow 5^2 = 3 \times (5+x) \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

حالا طبق تعمیم قضیه تالس در AEB داریم:

$$FC \parallel AB \Rightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{FC}{y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\frac{25}{3} \times 5}{5} = \frac{25}{3}$$



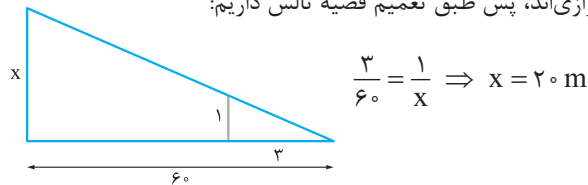
۴۸- در مثلث ABC مقابل، M را وسط AB در نظر گرفته و از M خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در N قطع کند، آن‌گاه:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\xrightarrow{AB=2AM} \frac{1}{2} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

چون $2AN = AC$ پس N وسط AC است و همچنین داریم $MN = \frac{1}{2} BC$.

۴۱- مطابق اطلاعات مسئله، در شکل ساده‌شده زیر، شاخص و درخت موازی‌اند، پس طبق تعمیم قضیه تالس داریم:



۴۲- در مثلث ABC زیر داریم: $\hat{B} = \hat{D}$ آن‌گاه طبق عکس قضیه موازی مورب می‌توانیم بگوییم $ED \parallel CB$ ، بنابراین طبق قضیه تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{16-x}{16} = \frac{3}{x} \Rightarrow 16x - x^2 - 48 = 0$$

$$x^2 - 16x + 48 = 0 \Rightarrow x = 12, 4$$

۴۳- مطابق شکل، $DE \parallel BC$ ، پس طبق قضیه تالس (جزء به جزء) در مثلث ABC داریم:

$$\frac{x+3}{3x+9} = \frac{4}{x+4} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{x+4} \Rightarrow x = 8$$

$$\xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{y}{6} = \frac{4}{16} \Rightarrow y = 15$$

و محیط چهارضلعی DECB برابر است با:

$$P = 15 + 12 + 6 + 3 = 36$$

۴۴- الف) می‌دانیم $MN \parallel BC$ است، پس در مثلث ABC، از رابطه تالس جزء به جزء مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{x-3}{x+1} = \frac{x}{x+7}$$

$$\Rightarrow x^2 + x = x^2 + 4x - 21 \Rightarrow x = 7$$

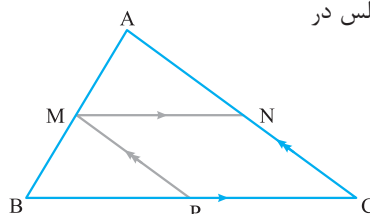
$$\text{ضلع } AC = x + x + 7 = 21$$

ب) چون اندازه یکی از اضلاع موازی را خواسته، از رابطه تعمیم تالس استفاده می‌کنیم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{x}{x+x+7} = \frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{10}{BC} \Rightarrow BC = 30$$

۴۵- طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC مقابل داریم:



برای اثبات این حکم، ابتدا قطر BD را رسم می‌کنیم. طبق عکس قضیه تالس در دوزنقه داریم:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel DC$$

از طرفی در دو مثلث ABD و BDC تعمیم تالس را می‌نویسیم:

$$\Delta ABD : MO \parallel AB \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{MO}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow MO = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

$$\Delta BCD : NO \parallel CD \Rightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{NO}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow NO = \frac{DC}{2} \quad (2)$$

$$(1) + (2) = MO + NO = MN = \frac{AB + DC}{2}$$

۵۳- نسبت تشابه

۵۴- متشابه

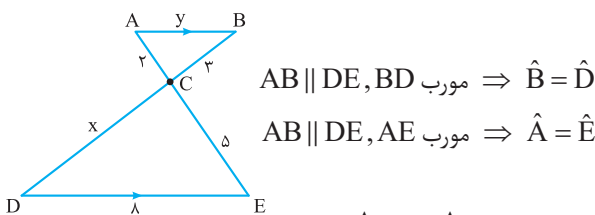
۵۵- متناسب

۵۶- به صفحه ۴۴ درس‌نامه مراجعه شود.

۵۷- به صفحه ۴۴ درس‌نامه مراجعه شود.

۵۸- به صفحه ۴۶ درس‌نامه مراجعه شود.

۵۹- طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:



پس دو مثلث ABC و DCE به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند:

$$\left. \begin{matrix} \hat{A} = \hat{E} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{matrix} \right\} \xrightarrow[\text{زاویه}]{\text{برابری دو}} \Delta ABC \sim \Delta DCE$$

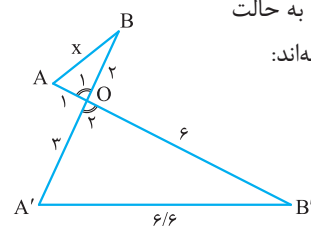
در نتیجه نسبت اضلاع آن‌ها متناسب است:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{y}{8} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

۶۰- دو مثلث OAB و OA'B' به حالت

تناسب دو ضلع و زاویه بین متشابه‌اند:



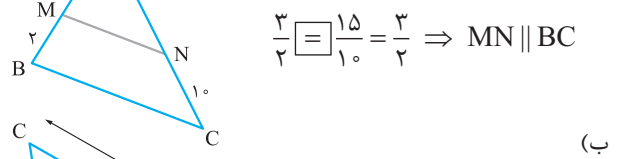
$$\left. \begin{matrix} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \end{matrix} \right\} \xrightarrow[\text{و برابری زاویه بین}]{\text{تناسب دو ضلع}} \Delta OAB \sim \Delta OA'B'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow AB = x = \frac{6/6}{3} = \frac{2}{2}$$

۴۹- باید طبق عکس قضیه تالس نسبت ضلع‌های متناظر برابر باشد،

در نتیجه:

$$\frac{3}{2} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow MN \parallel BC \quad (\text{الف})$$



$$\frac{2}{9} = \frac{8}{36} \Rightarrow \frac{30-14}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow MN \parallel BC$$

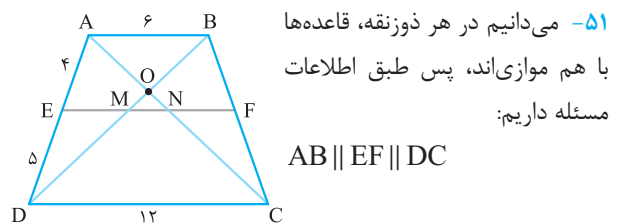
۵۰- برای حل این سؤال ابتدا از رأس D خطی موازی BC رسم می‌کنیم

تا AB را در M قطع کند، چون $DM \parallel CB$ و $DC \parallel MB$ است؛ پس DBCM متوازی‌الاضلاع است و داریم: $DC = NF = MB = x$

حالا قضیه تالس را در مثلث AMD می‌نویسیم:

$$\Delta AMD : EN \parallel AM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{2}{5} = \frac{8-x}{12-x}$$

$$\Rightarrow 24 - 2x = 40 - 5x \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$



حالا طبق تعمیم تالس در مثلث‌های ADB و ADC داریم:

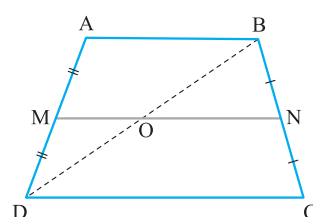
$$\Delta ADC : EN \parallel DC \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{EN}{12} \Rightarrow EN = \frac{16}{3}$$

$$\Delta ADB : EM \parallel AB \Rightarrow \frac{5}{9} = \frac{EM}{6} \Rightarrow EM = \frac{10}{3}$$

پس مقدار MN برابر است با:

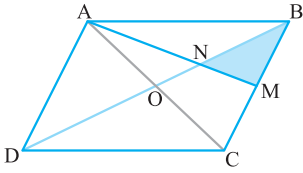
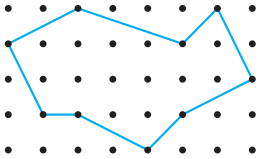
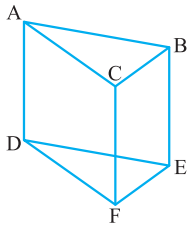
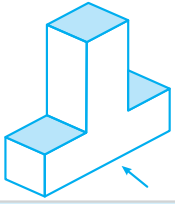
$$MN = EN - EM = \frac{16}{3} - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

۵۲- در دوزنقه ABCD زیر، MN از وسط ساق‌های BC و AD می‌گذرد:

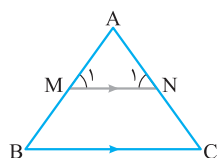


$$\text{حکم: } MN \parallel AB, MN \parallel DC, MN = \frac{AB + DC}{2}$$

نمونه آزمون نیم سال دوم		رشته: ریاضی و فیزیک		هندسه ۱ (دهم)
ردیف	امتحان شماره ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳	Kheylisabz.com
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی محدب، 360° درجه است. (ب) در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع، با نسبت ارتفاع وارد بر آن ها برابر است. (پ) اگر دو قطر یک چهارضلعی هم اندازه باشند، آن چهارضلعی مستطیل است. (ت) در فضا دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی اند.	۱		
۲	جاهای خالی را با عبارات (کلمات) مناسب کامل کنید. (الف) عمودمنصف وتر یک دایره از دایره می گذرد. (ب) اگر نسبت مساحت های دو شکل متشابه $\frac{9}{25}$ باشد، در این صورت نسبت تشابه برابر با است. (پ) واسطه هندسی مثبت بین دو عدد ۳ و ۱۲ برابر با است. (ت) شکل حاصل از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع می باشد. (ث) خط راستی که اشتراک دو صفحه متقاطع است، آن دو صفحه نامیده می شود.	۱/۲۵		
۳	با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه رو به زاویه بزرگ تر، بزرگ تر است از ضلع روبه رو به زاویه کوچک تر.	۱		
۴	روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید. (با رسم شکل)	۱		
۵	آیا گزاره «هر دو مثلث که مساحت های برابر داشته باشند، همنهشت اند.» درست است؟ چرا؟	۰/۵		
۶	در شکل مقابل، مقادیر x و y را بیابید.	۱/۲۵		
۷	در دوزنقه زیر MN با قاعده ها موازی است. با رسم قطر AC ، تناسب داده شده را ثابت کنید: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$	۰/۷۵		
۸	قضیه اساسی تشابه: در شکل زیر MN موازی BC است. ثابت کنید مثلث AMN با مثلث ABC متشابه است.	۱/۵		
۹	در مثلث قائم الزاویه زیر ثابت کنید دو مثلث ABH و ACH متشابه اند و به کمک آن نشان دهید AH واسطه هندسی بین BH و HC است.	۱/۷۵		
۱۰	طول اضلاع یک مثلث ۷، ۸ و ۱۲ سانتی متر بوده و طول بزرگ ترین ضلع مثلثی متشابه با آن ۱۶ سانتی متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.	۱		
۱۱	ثابت کنید در متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مجاور مکمل اند.	۰/۷۵		
۱۲	ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه میانه وارد بر وتر، نصف اندازه وتر است.	۱/۲۵		
۱۳	در یک لوزی، اندازه هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.	۱/۲۵		

۱۴	در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC بوده و پاره خط AM قطر BD را در نقطه N قطع کرده است. نشان دهید:	۱/۲۵
		$S_{\triangle BNM} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$
۱۵	با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت شکل زیر را محاسبه کنید.	۱
		
۱۶	در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید. (الف) دوران یک مستطیل حول طول آن. (ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه.	۱/۲۵
۱۷	منشور سه‌پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. (الف) یک خط متنافر با CF نام ببرید. (ب) یک خط موازی با CF نام ببرید. (پ) دو صفحه موازی نام ببرید.	۰/۷۵
		
۱۸	(الف) سطح مقطع استوانه با صفحه مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟ تصویر مناسبی رسم کنید. (ب) در شکل مقابل نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.	۱/۵
		
۲۰	جمع نمرات	

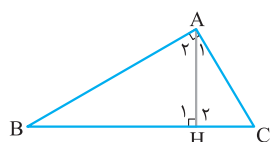
پاسخ نامه تشریحی



$$(*) \begin{cases} 1) MN \parallel BC, \overset{\text{مورب}}{AB} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{B} & (0/25) \\ 2) MN \parallel BC, \overset{\text{مورب}}{AC} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{C} & (0/25) \\ 3) \hat{A} = \hat{A} & (0/25) \end{cases}$$

$$(**) \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad (0/5)$$

طبق تعریف دو مثلث متشابه، مثلث‌های AMN و ABC متشابه می‌باشند و اثبات قضیه کامل می‌شود. (0/25)



$$(*) \begin{cases} \hat{B} = \hat{B}_1 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_r & (0/5) \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ACH \quad (0/25) \\ \hat{C} = \hat{C}_r \end{cases}$$

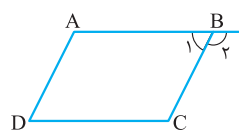
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} \quad (0/75)$$

$$\Rightarrow AH^2 = BH \times HC \quad (0/25)$$

$$1) \text{نسبت تشابه } k = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \quad (0/25)$$

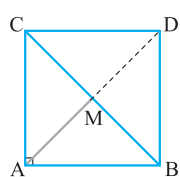
$$2) \frac{P_1}{P_r} = \frac{3}{4} \quad (0/25)$$

$$3) \frac{27}{P_r} = \frac{3}{4} \quad (0/25) \Rightarrow P_r = 36 \quad (0/25)$$



$$\begin{cases} AB \parallel CD, \overset{\text{مورب}}{BC} \Rightarrow \hat{B}_r = \hat{C} & (0/25) \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_r = 180^\circ & (0/25) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C} = 180^\circ \quad (0/25)$$



راه حل اول:

۱- فرض کنید AM میانه وارد بر وتر BC باشد، AM را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه D برسیم. (0/25)

۲- در چهارضلعی ABCD، از آنجا که قطرهای یکدیگر را نصف کرده‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. (0/25)

-۸

ب) نادرست (0/25)

ت) نادرست (0/25)

ب) $\frac{3}{5}$ (0/25)

ت) مستطیل (0/25)

۱- الف) درست (0/25)

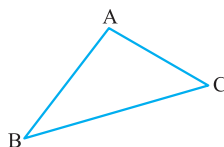
پ) نادرست (0/25)

۲- الف) مرکز (0/25)

پ) ۶ (0/25)

ث) فصل مشترک (0/25)

-۳



$$\begin{cases} A > B & \text{فرض} \\ BC > AC & \text{حکم} \end{cases} \quad (0/25)$$

در صورتی که حکم برقرار نباشد، دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

حالت اول: اگر $BC = AC$ ، در این صورت $\hat{A} = \hat{B}$ که خلاف فرض است. (0/25)

حالت دوم: اگر $BC < AC$ ، در این صورت $\hat{A} < \hat{B}$ که این نیز خلاف فرض است. (0/25)

بنابراین حکم ثابت است. (0/25)

-۴

مرحله اول: به مرکز نقطه M، دایره‌ای به گونه‌ای رسم کنید که خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. (0/25)

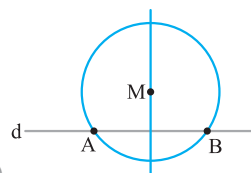
مرحله دوم: عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید. (0/25)

مرحله سوم: عمودمنصف

پاره خط AB خطی است که

از نقطه M می‌گذرد و بر خط

d عمود است. (0/25)



(0/25)

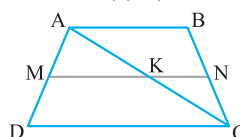
-۵

خیر. (0/25) به عنوان مثال، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع قائمه ۴ و ۶ و مثلث متساوی‌الساقینی با اندازه قاعده ۸ و اندازه ساق ۵ دارای مساحت‌های برابرند ولی این دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت نیستند. (0/25)

-۶

$$\begin{cases} MN \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow \underbrace{MN \parallel BC}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}}_{(0/25)} \Rightarrow \underline{x=3} \quad (0/25)$$

$$(*) \underbrace{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}_{(0/25)} \Rightarrow \underline{y=2} \quad (0/25)$$



-۷

$$\begin{cases} MK \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC} & (0/25) \\ KN \parallel AB \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{BN}{NC} & (0/25) \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \quad (0/25)$$

۳- میانه‌های یک مثلث، آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.

(۵/۲۵)

۴- بنابراین مساحت مثلث MNB، $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است.

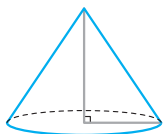
(۵/۲۵)

۵- از آن‌جا که مساحت مثلث ABC، $\frac{1}{4}$ مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است، بنابراین مساحت مثلث MNB، $\frac{1}{12}$ مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است. (۵/۲۵)

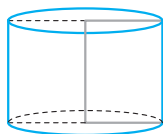
$$\begin{cases} S = \frac{b}{2} - 1 + i \text{ (۵/۲۵)} \\ b = 9, i = 13 \text{ (۵/۲۵)} \end{cases} \Rightarrow S = \frac{9}{2} - 1 + 13 = 16 \text{ / } 5 \text{ (۵/۲۵)}$$

-۱۵

(ب) مخروط (۵/۲۵)



-۱۶ الف) استوانه (۵/۲۵)



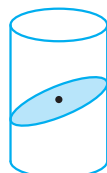
-۱۷

(ب) AD یا BE (۵/۲۵)

الف) AB یا DE (۵/۲۵)

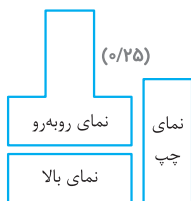
پ) DEF و ABC (۵/۲۵)

-۱۸ الف) بیضی (۵/۲۵)



(۵/۵)

(ب)



(۵/۲۵)

(۵/۲۵)

۳- متوازی‌الاضلاعی که یک زاویه ۹۰ درجه دارد، مستطیل است.

(۵/۲۵)

۴- در مستطیل قطرها با هم برابرند (۵/۲۵) و لذا خواهیم داشت:

$$BC = AD \Rightarrow \frac{BC}{2} = AM \text{ (۵/۲۵)}$$

راه حل دوم:

از نقطه M عمود MH را بر ضلع AB رسم

می‌کنیم. (۵/۲۵) در این صورت داریم:

$$\hat{H} = \hat{A} = 90 \Rightarrow MH \parallel AC \text{ (۵/۲۵)}$$

$$\xrightarrow{\text{بنا به قضیه تالس}} \frac{BM}{MC} = \frac{BH}{AH} = 1 \Rightarrow BH = AH \text{ (۵/۲۵)}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم M روی عمودمنصف AB است (۵/۲۵) و لذا:

$$AM = BM \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} \text{ (۵/۲۵)}$$

-۱۳

$$\frac{BD}{AC} = \frac{1}{3} \text{ (۵/۲۵)} \Rightarrow \begin{cases} BH = x \\ AH = 3x \end{cases} \text{ (۵/۲۵)}$$

$$B \Rightarrow AB^2 = x^2 + 9x^2 \text{ (۵/۲۵)} \Rightarrow x = 2 \text{ (۵/۲۵)}$$

$$BD = 4, AC = 12$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = 24 \text{ (۵/۲۵)}$$

-۱۴

۱- نقطه N محل هم‌رسی میانه‌های AM و OB است. (۵/۲۵)

۲- از آن‌جا که میانه‌های یک مثلث هم‌رس‌اند، میانه نظیر ضلع AB

نیز از N می‌گذرد. (۵/۲۵)