

مقدمه ناشر

خیلیا برای فرار از درس ریاضی و خیلیا به عشق درس ریاضی رشته‌شون رو انتخاب می‌کنن. گروه اول همیشه در شگفت‌اند که این ریاضی مگه چی داره که بعضیا دیوانه‌وار عاشقش و باهاش حال می‌کنن؟! ولی گروه دوم، مثل خود شما که رشتشون ریاضیه بهتر از هر کس می‌دونین که «لذتی که در حل مسئله هست حتی در انتقام هم نیست!». اون لحظه باشکوه، حس عجیبی به آدم می‌ده. همون لحظه که میگی «آهان! فهمیدم!». همون لحظه کشف جواب! انگار با آرپی جی زدی وسط تانک دشمن. هر چی مسئله چغرت و بد بدن تر، این حس قوی تر و لذت بخش تر. نمی‌دونم توی اون لحظه کدوم محرک باعث می‌شه که چه بخشی از مغزمون دستور صادر کنه تا چه هورمونی از کجای بدنمون فوران کنه! ولی هر چی که هست معرکه است. مخصوصن اگه با یه مسئله هندسه طرف باشیم. امیدواریم این کتاب براتون پر از این لحظه‌های ناب باشه و با خوندنش هم حسابی کیف کنید و هم توی کنکورها حسابی بترکونید.

برای به ثمر رسیدن این کتاب آدمای مهم و زیادی زحمت کشیدن. دم همتون گرم. مصطفی جان و علیرضا جان، خسته نباشین! انصافن خوب کتابی شد. رسول خان، ممنون که از اول تا آخر خط کنارمون بودی. زنده باد دوستای خستگی‌ناپذیرمون در واحد تألیف و تولید خیلی سبز و درود بر ویراستارای خوب و دقیقمون.

**بروبچه‌های ریاضی، دم شما هم گرم
مواظب خودتون باشید!**

مقدمه مولف

به کتاب پرسش‌های چهارگزینه‌ای هندسهٔ جامع خوش آمدید.

حتماً می‌دانید که درس هندسه در کنکورهای نظام جدید (از سال ۱۳۹۸ به بعد) بیشتر از قبل اهمیت پیدا کرده و سهم قابل توجهی از تست‌های ریاضیات را به خود اختصاص داده است. پس لازم است برای رسیدن به یک نتیجهٔ عالی به این درس توجه ویژه‌ای داشته باشید. این کتاب هم برای همین کار تألیف شده است و قرار است شما را برای آزمون‌های آزمایشی، امتحانات مدرسه و در نهایت برای کنکور آماده کند.

دربارهٔ کتاب:

- درس‌نامه‌ها با دقت و وسواس زیاد و تا حد ممکن خودآموز و کاربردی نوشته شده است. تلاش کردیم از چهارچوب مباحث نظام جدید خارج نشویم.
- برای طراحی تست‌ها، تمام فعالیت‌ها و تمرین‌های کتاب درسی و سؤالات کنکور بیست سال اخیر را به دقت بررسی کردیم و برای دسته‌بندی و چیدمان تست‌ها روند آموزشی مناسب را معیار قرار داده‌ایم.
- پاسخ‌های تشریحی به صورت گام به گام و با توضیح کافی نوشته شده‌اند.
- در تست‌های هر درس، کنار تست‌های عادی یک آیکون (☹) گذاشته‌ایم. قرار است شما بعد از حل هر تست و بررسی پاسخ‌نامهٔ آن این آیکون را به یکی از سه آیکون زیر تبدیل کنید:
(😊) یعنی تست آسان (😐) یعنی تست متوسط (☹) یعنی تست دشوار
- این نمادگذاری باعث می‌شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که کدام تست‌ها را باید حل کنید.
- شمارهٔ تست‌های مهم را رنگی کرده‌ایم. از این تست‌ها برای مرور و جمع‌بندی مباحث استفاده کنید. برای بعضی از تست‌ها هم نماد (🔍) داریم. این نماد نشان‌دهندهٔ تست‌های دشوار است.
- برای سه فصل اول، که مربوط به کل کتاب درسی هندسهٔ دوازدهم هستند و حجم زیادی دارند، یک آزمون جامع در پایان فصل قرار داده‌ایم.

قدردانی:

- مخاطب اولین تشکر دکتر کامیل نصری است؛ بابت اعتمادشان به ما.
- از دکتر کورش اسلامی، مهندس سروش موئینی و دکتر علی‌اصغر شریفی بابت نظرات و پیشنهادهای سازنده‌شان تشکر می‌کنیم.
- تشکر ویژه از مدیر تألیف باهوش و باسواد، مهندس نوید شاهی و دوست عزیزمان مهندس رسول محسنی‌منش که سهم ویژه‌ای در تولید کتاب، از ابتدا تا انتها داشتند. طی جلسات متعددی، ساعت‌های زیادی صرف ویرایش و اصلاح نوشته‌هایمان کردیم تا کتاب به شکلی که می‌بینید، درآید. جلسه‌های دوشنبه عصر برای ما بسیار شیرین بود.
- از تیم اجرایی، به ویژه خانم هدی ملک‌پور گرامی و واحد تولید خیلی‌سبز، خیلی خیلی ممنونیم. دمتان گرم.

فهرست

درس نامه	تست	فصل اول ماتریس و کاربردها
۸	۴۲	درس ۱: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
۲۳	۵۰	درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان
درس نامه	تست	فصل دوم آشنایی با مقاطع مخروطی
۶۸	۱۰۱	درس ۱: مکان هندسی
۷۰	۱۰۲	درس ۲: دایره
۸۲	۱۰۷	درس ۳: بیضی
۹۳	۱۱۲	درس ۴: سهمی
درس نامه	تست	فصل سوم بردارها
۱۲۱	۱۴۱	درس ۱: معرفی فضای R^3
۱۳۳	۱۴۸	درس ۲: ضرب داخلی دو بردار
۱۳۷	۱۵۴	درس ۳: ضرب خارجی دو بردار
درس نامه	تست	فصل چهارم ترسیم‌های هندسی و استدلال
۱۵۹	۱۶۸	
درس نامه	تست	فصل پنجم قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردها
۱۷۶	۱۸۸	
درس نامه	تست	فصل ششم چندضلعی‌ها
۱۹۹	۲۲۱	
درس نامه	تست	فصل هفتم تجسم فضایی
۲۳۵	۲۴۷	
درس نامه	تست	فصل هشتم دایره
۲۵۶	۲۷۰	
درس نامه	تست	فصل نهم تبدیل‌های هندسی و کاربردها
۲۸۱	۲۹۱	
درس نامه	تست	فصل دهم روابط طولی در مثلث
۳۰۰	۳۱۴	
درس نامه	تست	پاسخ‌نامهٔ تشریحی
	۳۲۴	

دترمینان ماتریس ۳×۳

دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ را با دو روش کلی می‌توانیم حساب کنیم: ۱) ساروس ۲) بسط دترمینان برحسب یک سطر یا ستون که هر کدام از این‌ها را مفصل بحث می‌کنیم:

۱) ساروس: فرض کنید دترمینان ماتریس A را می‌خواهیم به دست آوریم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. در ابتدا ستون‌های اول و دوم ماتریس را در سمت راست

ماتریس می‌نویسیم، سپس مجموع حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی و دو خط موازی آن را منهای مجموع حاصل ضرب درایه‌های روی قطر فرعی و دو خط موازی آن می‌کنیم:

$$|A| \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ با روش ساروس به صورت زیر، به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (-2 + 40 + 0) - (-15 + 4 + 0) = 38 - (-11) = 49$$

تست ۱ برای محاسبه دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ با روش ساروس از مدل زیر، استفاده شده است. مقدار دترمینان A کدام است؟

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & x & 2 \\ -1 & y & 0 & -1 & y \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (-2 + 40 + 0) - (-15 + 4 + 0) = 38 - (-11) = 49$$

۱) -۱۶
۲) -۱۷
۳) -۱۸

پاسخ ۴ در روش ساروس باید ۲ ستون اول را در سمت راست ماتریس بنویسیم، پس $x = 1$ و $y = 5$ داده است. حالا روش ساروس را می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (10 - 3) - (30 - 4) = -19$$

۲) روش بسط دترمینان:

دترمینان ۳×۳ را می‌توانیم برحسب یک سطر یا یک ستون دلخواه بنویسیم. مثلاً در ماتریس زیر دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

و دقت کنید که دترمینان ۲×۲ ای که در a_{11} ضرب شد در واقع باقی‌مانده ماتریسی بود که از حذف سطر و ستون اول باقی مانده بود و همین‌طور می‌توانیم برحسب سطر دوم، ستون سوم و ... بنویسیم.

مثلاً ۱ دترمینان ماتریس روبه‌رو را با روش بسط برحسب سطر اول به صورت زیر، حساب می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 4) - 2(-1 - 8) + 0 = 17$$

حالا همین دترمینان را یک بار دیگر با بسط برحسب ستون دوم حساب می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2 \times \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2(-9) + 3(1) - (4) = 17$$

حواستون باشه که در روش بسط، علامت روی قطر اصلی، مثبت و بقیه یکی درمیان مثبت و منفی هستند. مثلاً در روش بسط با ستون سوم، عدد ۰ مثبت،

عدد ۴ منفی و عدد ۱ که روی قطر اصلی است، مثبت است و برای یک ماتریس ۳×۳ داریم:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

تست ۱ حاصل $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) -۲۲۴ (۲) -۲۲۶ (۳) -۲۲۸ (۴) -۲۳۰

پاسخ ۲ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3(-30) + 4(-44) + (38) = -228$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 3 & 2a & 1 \end{bmatrix}$$

تست ۱ اگر دترمینان ماتریس روبه‌رو -۴ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ ۲ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$|A| = 2 \times \begin{vmatrix} a & a \\ 2a & 1 \end{vmatrix} - a \times \begin{vmatrix} a & a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 2(2 - 2a^2) - a(a - 3a) = 4 - 4a^2 + 2a^2 = 4 - 2a^2 = -4 \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

و چون مقدار مثبت a را می‌خواهیم $a = 2$ قابل قبول است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

تست ۱ مجموع جواب‌های معادله روبه‌رو کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ ۲ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 \times \begin{vmatrix} 4 & x+5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & x+5 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x-1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-4 - 6x - 30) - 2(2 - x^2 - 4x + 5) + 3(-12 - 4x + 4) = 0$$

$$-6x - 34 + 2x^2 + 8x - 14 - 24 - 12x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 72 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 - 5x - 36 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 9, -4$$

حالا معادله را مرتب می‌کنیم:

و جمع جواب‌ها برابر ۵ است.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

تست ۱ با حل معادله روبه‌رو، یک معادله خط برحسب x و y به دست می‌آید. شیب آن کدام است؟

(۱) $\frac{d-b}{a-c}$ (۲) $\frac{a-b}{c-d}$ (۳) $\frac{a-c}{b-d}$ (۴) $\frac{b-d}{a-c}$

پاسخ ۴ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} b & 1 \\ d & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(b-d) - y(a-c) + (ad-bc) = 0$$

(مهم نیست)

$$\Rightarrow y(a-c) = x(b-d) + \Delta \Rightarrow y = \frac{b-d}{a-c}x + \bigcirc$$

حالا باید y را تنها کنیم و ضریب x ، شیب خط می‌شود:

بسط دترمینان براساس یک سطر یا یک ستون خاص

معمولاً دترمینان‌های 3×3 را با ساروس و یا برحسب سطر اول می‌نویسیم مگر در حالت‌های زیر:

۱ حالت اول: در برخی ماتریس‌ها در یک سطر یا ستون تعدادی صفر داریم که بهتر است براساس آن سطر یا ستون بنویسیم تا کارمان در محاسبات راحت‌تر باشد.

در محاسبه دترمینان ماتریس روبه‌رو بهتر است بسط برحسب ستون سوم بنویسیم، چون دو درایه آن صفر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 2(-2 - 20) = -44$$



تست ۱ در معادله روبه‌رو مقدار x کدام است؟

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 16$$

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

پاسخ ۱ با توجه به این که در ستون اول دوتا صفر داریم پس برای راحتی محاسبات بهتر است دترمینان را براساس ستون اول بنویسیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 = 2(\Delta x + 3) = 16 \Rightarrow \Delta x + 3 = 8 \Rightarrow x = 1$$

۲ حالت دوم: به‌جز حالتی که در یک سطر یا یک ستون تعدادی صفر داشته باشیم، گاهی صورت سؤال طوری طراحی شده که ما مجبور می‌شویم برحسب سطر یا ستون خاص بسط ماتریس را بنویسیم.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + x$$

مثلاً فرض کنید صورت تست رابطه روبه‌رو را داده و از ما x را می‌خواهد:

در این‌جا باید دترمینان را برحسب سطر سوم یا ستون اول بنویسیم تا ۴ در بسط باشد و بقیه بسط مقدار x را می‌دهد، که در این‌جا برحسب سطر سوم می‌نویسیم. (اگر برحسب ستون اول هم بنویسیم فرقی نمی‌کند.)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow x = -1 \times (\Delta + 3) + 2(3 + 7) = 12$$

تست ۱ اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = A + x \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ باشد، مقدار A کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)
۵ (۵)
۶ (۶)

پاسخ ۱ **راه I** بسط ماتریس را برحسب ستون اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A = 1 \times (-2 - 1) - 2(4 - 7) = 3$$

راه II می‌توانیم به x صفر بدهیم تا از جریان محاسبات خارج شود و دترمینان ماتریس روبه‌رو را به دست آوریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2 - 1) - 2(4 - 7) = 3$$

بسط حول ستون اول:

نکته اگر در ماتریس 3×3 به یک درایه عددی اضافه و یا کم کنیم و دترمینان تغییری نکند، دترمینان ۲ در ۲ با حذف سطر و ستون آن درایه باید صفر باشد.

مثلاً در ماتریس زیر اگر به x سه واحد اضافه کنیم و دترمینان تغییر نکند، با حذف سطر و ستون مربوط به x به دترمینان ۲ در ۲ زیر می‌رسیم که باید صفر باشد و مقدار y به دست می‌آید:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & y \\ x & 5 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y - 12 = 0 \Rightarrow y = 6$$

تست ۱ در دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ اگر به عنصر واقع بر سطر سوم و ستون سوم ۴ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییری نکند، آن‌گاه a کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

پاسخ ۲ سطر سوم و ستون سوم را حذف می‌کنیم و دترمینان باقی‌مانده باید صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

تست ۱ اگر درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ را دو برابر کنیم، از حاصل دترمینان آن ۳ واحد کم می‌شود. مقدار a کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)



پاسخ ۱ ابتدا اطلاعات مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3$$

حالا چون هم a در سطر دوم است و هم صفر داریم، دترمینان را بر حسب سطر دوم می‌نویسیم:

$$0 + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2a \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \Rightarrow 6a = 2a - 3 \Rightarrow 4a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

قوانین دترمینان

دترمینان ویژگی‌هایی دارد که با کمک آن‌ها مسئله‌ها ساده‌تر حل می‌شوند و گاهی نیازی به روش ساروس یا بسط دترمینان نیست.

$ A^n = A ^n$	دترمینان ماتریس A^n برابر است با دترمینان ماتریس A به توان n .	۱
$ A \times B = A \times B $	اگر دترمینان ماتریس $A \times B$ را بخواهیم، لازم نیست که خود ماتریس $A \times B$ را حساب کنیم و کافی است دترمینان A را در دترمینان B ضرب کنیم.	۲
$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$	دترمینان ماتریس‌های قطری و بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است.	۳
$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix} = abc$		
$\begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$		
$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abc$	دترمینان ماتریس شبه‌قطری و شبه بالا مثلثی و شبه پایین مثلثی مطابق جدول روبه‌رو برابر منفی حاصل ضرب درایه‌های روی قطر فرعی است.	۴
$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & d \\ c & e & f \end{vmatrix} = -abc$		
$\begin{vmatrix} e & d & a \\ f & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -abc$		
$ KA_{2 \times 2} = K^2 A $	اگر در تمام درایه‌های یک ماتریس 2×2 عدد K ضرب شود، دترمینان، K^2 برابر می‌شود.	۵
$ KA_{3 \times 3} = K^3 A $	اگر تمام درایه‌های یک ماتریس 3×3 در عدد K ضرب شود، دترمینان، K^3 برابر می‌شود.	۶
$K \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ka & Kb & Kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & Kb & c \\ d & Ke & f \\ g & Kh & i \end{vmatrix} = \dots$	اگر عدد K در یک دترمینان ضرب شود، تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون دلخواه را در K ضرب می‌کنیم:	۷
	و برعکس: می‌توان از یک سطر یا یک ستون دترمینان عامل مشترکی را فاکتور گرفت و به بیرون دترمینان انتقال داد.	
	اگر دو ماتریس برابر باشند، دترمینان آن‌ها با هم برابر است ولی عکس این قضیه برقرار نیست.	۸
$ AB = BA = A B $	دترمینان ماتریس‌های AB و BA با هم برابر است:	۹
$ A+B \neq A + B $	دترمینان جمع و تفریق دو ماتریس تفکیک‌پذیر نمی‌باشد:	۱۰

مثنا

اگر دترمینان ماتریس A را برابر ۳ داشته باشیم، برای محاسبه دترمینان ماتریس A^4 ، لازم نیست که ماتریس A را به توان ۴ برسانیم، فقط کافی است که دترمینان A را به توان ۴ برسانیم، یعنی داریم:

$$|A^4| = |A|^4 = 3^4 = 81$$

مثنا

اگر A ماتریس زیر باشد، دترمینان A برابر $(-1)(2)(-3)$ و برابر ۶ است و دترمینان ماتریس A^2 هم بدون حساب کردن خود ماتریس A^2 به راحتی برابر $|A|^2 = 6^2$ و برابر ۳۶ است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

تست ۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A^2 - 2A^T$ کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) -۲۷ (۳) ۹ (۴) -۹

پاسخ ۱ می‌دانیم دترمینان ماتریس پایین مثلثی A برابر $-3 = (-1)(1)(3)$ است. حالا از عبارت $A^2 - 2A^T$ یک A^T فاکتور می‌گیریم:

$$|A^2 - 2A^T| = |A^T(A - 2I)| = |A^T| \times |A - 2I| = 9 \times |A - 2I| = 9|A - 2I|$$

حالا ماتریس $A - 2I$ را هم تشکیل می‌دهیم: (البته معلوم است که باز هم پایین مثلثی می‌شود).

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

پس $|A - 2I|$ هم برابر $3 = (-1)(-1)(3)$ می‌شود و بنابراین دترمینان ماتریس $A^2 - 2A^T$ برابر می‌شود با:

$$|A^2 - 2A^T| = |A^T| \times |A - 2I| = 9 \times 3 = 27$$

تست ۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -a & -2 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ و $|2A^T| = 64$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ ۲ ابتدا دترمینان A را با بسط بر حسب سطر اول حساب می‌کنیم:

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} -a & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 = -a + 2a = a \Rightarrow |2A^T| = 2^3 \times |A|^3 = 8|A|^3 = 8a^3 = 64 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

تست ۳ دترمینان ماتریس مرتبه ۲، A برابر -۲ است. دترمینان ماتریس $|A| \times A^3$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۸ (۳) -۱۶ (۴) -۳۲

پاسخ ۴ می‌دانیم اگر عدد k در ماتریس $A_{2 \times 2}$ ضرب شود، دترمینان، k^2 برابر می‌شود:

$$\Rightarrow \underbrace{|A|}_{k^2} \times A^3 = \underbrace{|A|}_{k^2} \times |A|^3 = |A|^3 \times |A|^3 = |A|^6 = (-2)^6 = -32$$

تست ۴ ماتریس A از مرتبه ۲ و می‌دانیم $|A| = 10$ و $|A| + |A| = |A|$ است. $|A^2|$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴) ۲۵

پاسخ ۲ طبق قوانین دترمینان، داریم:

$$||A| + |A|| + |A| = |A|^2 \times |A| + \frac{9}{|A|^2} \times |A| = |A|^2 + \frac{9}{|A|} = 10|A|$$

حالا اگر طرفین را در $|A|$ ضرب کنیم و $|A|^2$ را x بگیریم، داریم:

$$\xrightarrow{\times |A|} |A|^4 + 9 = 10|A|^2 \xrightarrow{|A|^2 = x} x^2 + 9 = 10x \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-9) = 0 \Rightarrow x = 1, 9$$

بنابراین $|A|^2$ برابر ۱ یا ۹ است.

تست ۱ اگر $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \Delta d & 10e & \Delta f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 20$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 2c & 2d & 12f \\ e & f & 2i \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۲۲ (۴) ۲۴

پاسخ ۱ در ابتدا از سطر دوم عبارت $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \Delta d & 10e & \Delta f \\ g & 2h & i \end{vmatrix}$ را فاکتور می‌گیریم و با ۲۰ ساده می‌کنیم و سپس از ستون دوم هم از عدد ۲ فاکتور می‌گیریم و ساده می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \Delta d & 10e & \Delta f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 20 \xrightarrow{\div \Delta} \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \xrightarrow{\div 2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

حالا این دترمینان را در 4×3 ضرب می‌کنیم و ضرب ۳ را به سطر دوم و ضرب ۴ را به ستون سوم می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\times 12} 4 \times 3 \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times 2 = 24 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 24 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 3d & 3e & 12f \\ g & h & 2i \end{vmatrix} = 24$$

تست ۲ برای ماتریس A مربعی مرتبه ۳ رابطه روبه‌رو برقرار است. دترمینان ماتریس A^2 کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

پاسخ ۲ از دو طرف حاصل ضرب، دترمینان می‌گیریم و ماتریس سمت چپ، پایین‌مثلثی و برای ماتریس سمت راست هم دترمینان، منفی حاصل ضرب قطر فرعی است:

$$\Rightarrow (1 \times (-4) \times 1) \times |A| \times (-2)(1)(-1) = |4I| = 4^3 |I| = 64 \Rightarrow |A| = -8 \Rightarrow |A^2| = 64$$

دترمینان ماتریس وارون

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

با توجه به رابطه $A \times A^{-1} = I$ ، اگر از دو طرف، دترمینان بگیریم به رابطه بسیار مهم زیر می‌رسیم:

مثلاً ۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، با توجه به این که $\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$ است، پس بدون محاسبه A^{-1} می‌توانیم متوجه شویم که دترمینان A^{-1} برابر $\frac{1}{|A|}$ یا همان $-\frac{1}{2}$ است:

$$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2}$$

تست ۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $B^4 A^{-1} B^{-2} A^2$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۳۶

پاسخ ۳ در ابتدا دقت کنید که $|A| = 2$ و $|B| = -3$ است. حالا دترمینان ماتریس $B^4 A^{-1} B^{-2} A^2$ را به صورت ضرب دترمینان‌ها می‌نویسیم:

$$\Rightarrow |B^4 A^{-1} B^{-2} A^2| = |B|^4 \times |A^{-1}| \times |B|^{-2} \times |A|^2 = |B|^4 \times \frac{1}{|A|} \times \frac{1}{|B|^2} \times |A|^2 = |B|^2 \times |A| = (-3)^2 \times 2 = 18$$

تست ۴ اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و $|A| = -3$ و $|I + A| = 15$ باشد، حاصل $|A^{-1} + I|$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۱۵ (۴) -۱۵

پاسخ ۴ در ابتدا دقت کنید که $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{3}$ است. حالا دو طرف عبارت $|I + A| = 15$ را در $|A^{-1}|$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow |A^{-1}| \times |I + A| = 15 |A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}(I + A)| = 15 \left(-\frac{1}{3}\right) = -5$$

$$\Rightarrow |A^{-1}I + \underbrace{A^{-1}A}_I| = -5 \Rightarrow |A^{-1} + I| = -5$$

روش عددگذاری در دترمینان

یک سری از تست‌های دترمینان از بقایای تست‌های مرسوم نظام قدیم هستند. در این جور مسائل با دترمینان‌هایی سروکار داریم که درایه‌های ماتریس را پارامترها تشکیل می‌دهند. در نظام قدیم بچه‌ها برای حل این تیپ سؤال‌ها یک سری قوانین در کتاب درسی داشتند که اتفاقاً دست و پا گیر بودند و استفاده از آن‌ها خیلی هم راحت نبود. ما در حل این تیپ سؤال‌ها که در ادامه می‌بینید از عددگذاری استفاده می‌کنیم یعنی به جای پارامترها عددهای ۰، ۱، -۱ و ۲ و کلاً اعداد کوچک را چک می‌کنیم که در بین این‌ها صفر از همه بهتر است. البته باید نیم نگاهی به گزینه‌ها هم داشته باشیم که با جای گذاری مثلاً ۰ یا ۱، گزینه‌ها یکسان نشوند. اگر چندتا متغیر هم داشتیم بهتر است تا حد ممکن همه آن‌ها را یکسان قرار دهیم.

مثلاً اگر $a + b + c = 1$ باشد و بخواهیم دترمینان روبه‌رو را حساب کنیم:

$$D = \begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & c+2 \end{vmatrix}$$

و گزینه‌ها هم همگی عدد باشند و ربطی به a ، b و c نداشته باشند، کافی است $a = 1$ و $b = c = 0$ قرار دهیم تا هم شرط مسئله ($a + b + c = 1$) برقرار باشد و هم محاسبه دترمینان به دلیل وجود صفرها راحت‌تر شود:

$$\xrightarrow[b=c=0]{a=1} D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{پایین مثلثی}} \xrightarrow{\text{حاصل ضرب روی قطر اصلی}} 3(2)(2) = 12$$

تست ۱ مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} b+c & a+c & b+a \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $a + b + c$ ۳) $2(a + b + c)$ ۴) $3(a + b + c)$

پاسخ ۱ در ابتدا به گزینه‌ها نگاه می‌کنیم. اگر هر سه‌تای a ، b و c را صفر بگذاریم، گزینه‌ها یکی می‌شوند، پس این عددگذاری مناسب نیست. حالا اگر $a = 1$ و $b = c = 0$ بگذاریم، گزینه‌ها با هم فرق می‌کنند، پس جای گذاری می‌کنیم:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط دترمینان بر حسب سطر دوم}} -1 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

حالا در گزینه‌ها با جای گذاری $a = 1$ و $b = c = 0$ ، تنها ۱ است که صفر می‌شود و جواب مسئله است.

تست ۲ حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c+2 \\ 3a & 3b+2 & 3c+3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $3a$ ۲) $-a$ ۳) a ۴) abc

پاسخ ۲ باز هم گزینه‌ها را نگاه می‌کنیم و $a = 0$ انتخاب خوبی نیست (چون هر ۴ گزینه یکسان می‌شوند)، پس به جای a ، ۱ می‌گذاریم ولی برای راحتی کار b و c را صفر در نظر می‌گیریم:

$$\xrightarrow[b=c=0]{a=1} D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط دترمینان بر حسب سطر اول}} 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 1 \times (3 - 4) = -1$$

حالا باید ببینیم کدام گزینه با جای گذاری $a = 1$ و $b = c = 0$ عدد -۱ را می‌دهد، که جواب $-a$ و ۲ است.

تست ۳ اگر دترمینان $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ باشد، آن‌گاه دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ a & b & -1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-D - 2$ ۲) $-D - 1$ ۳) $-D$ ۴) $-D + 1$

پاسخ ۱ باز هم عددگذاری می‌کنیم، مثلاً $a = b = 0$ را در نظر می‌گیریم و D را حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب سطر دوم}]{\text{بسط دترمینان}} -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 = -1 \times (5 - 4) = -1$$

و دترمینان دوم را هم با جای گذاری $a = b = 0$ حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow D' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب سطر سوم}]{\text{بسط دترمینان}} -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

حالا باید ببینیم که در کدام گزینه اگر به جای D مقدار -1 بگذاریم به جواب $D' = -1$ می‌رسیم، که جواب $-D - 2$ و **۱** است.

$$-D - 2 = -(-1) - 2 = -1$$

تست ۱ اگر داشته باشیم $24 = \begin{vmatrix} a+b+3c & a & b \\ c & 3a+b+c & b \\ c & a & a+3b+c \end{vmatrix}$ ، مقدار $(a+b+c)$ کدام است؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

پاسخ ۲ در این مسئله نمی‌توانیم هر سه مقدار a ، b و c را عدد بدهیم چون باید جواب دترمینان حتماً 24 شود. پس c و b را صفر قرار می‌دهیم و مقدار دترمینان را برحسب a به دست می‌آوریم و مساوی 24 قرار می‌دهیم تا a به دست آید و سپس حاصل $(a+b+c)$ مشخص شود:

$$\xrightarrow{b=c=0} \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 3a & 0 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب ستون اول}]{\text{بسط دترمینان}} a \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ a & a \end{vmatrix} + 0 = a(3a^2) = 3a^3 \Rightarrow 3a^3 = 24 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

و در نتیجه:

$$a + b + c = 2 + 0 + 0 = 2$$

(حواستون باشد در مسئله فرقی نمی‌کرد که c و b را صفر قرار دهیم و a را به دست آوریم و یا مثلاً c و a را صفر قرار دهیم و b را به دست آوریم، در هر حالت جواب $a + b + c = 2$ به دست می‌آید.)

دترمینان ماتریس 3×3

۲۱۴- مقدار $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱-۱ (۱) ۲-۱ (۲) ۳-۲۰ (۳) ۴-۲۰ (۴)

۲۱۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ ، مقدار دترمینان A کدام است؟

۱-۲ (۱) ۲-۱ (۲) ۳-۲ (۳) ۴-۱ (۴)

۲۱۶- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱-۱۲ (۱) ۲-۱۵ (۲) ۳-۲۲ (۳) ۴-۲۵ (۴)

۲۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -11 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $A \times B$ کدام است؟

۱-۳ (۱) ۲-۲ (۲) ۳-۱ (۳) ۴-صفر (۴)

۲۱۸- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} 2 & i < j \\ 0 & i = j \\ -1 & i > j \end{cases}$ مفروض است. $|A|$ کدام است؟

۱-۱ (۱) ۲-۱ (۲) ۳-۲ (۳) ۴-۲ (۴)

۲۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -a & -2 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ و $|A| = 4$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱-۱ (۱) ۲-۲ (۲) ۳-۳ (۳) ۴-۴ (۴)

۲۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، حاصل $|A|^3 \times |B|^2$ کدام است؟

۱-۸ (۱) ۲-۸ (۲) ۳-۴ (۳) ۴-۴ (۴)

۲۲۱- اگر حاصل دترمینان مقابل a باشد، a کدام است؟

۱-۳ (۱) ۲-۲ (۲) ۳-۴ (۳)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}$$

(خارج ۹۸)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

۲۲۲- به ازای کدام مقدار a ، حاصل دترمینان روبه‌رو برابر ۲ است؟

- (۱) ۲۵
(۲) ۲۶
(۳) ۲۷
(۴) ۲۸

۲۲۳- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $3y - x - 2$
(۲) $3x - y - 2$
(۳) $3y + x - 2$
(۴) $3x + y - 2$

۲۲۴- مجموع دترمینان $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & z \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & t \end{vmatrix}$ برابر است با:

- (۱) $xy(z - t)$
(۲) $xy(t - z)$
(۳) صفر
(۴) $2xyzt$

۲۲۵- اگر $\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ باشد، کدام رابطه بین x و y برقرار است؟

- (۱) $y = 2x - 2$
(۲) $y = -2x + 2$
(۳) $y = -2x - 2$
(۴) $y = 2x + 2$

۲۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 12 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 9 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان حاصل از حذف سطر چهارم و ستون سوم ماتریس C کدام است؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۱
(۴) ۱۲

۲۲۷- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} A & 3 \\ \dots & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

۲۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = 3A - 2I$ و $C = \begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix}$ ، دترمینان حاصل از حذف سطر دوم و ستون سوم ماتریس C کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) صفر
(۴) -۱

۲۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} A^T + I & 1 \\ \dots & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان B کدام است؟

- (۱) -۳۳
(۲) -۳۵
(۳) -۳۷
(۴) -۳۹

۲۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \dots & 0 \\ 2A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) -۴

۲۳۱- به ازای کدام مقدار k ، معادله دترمینان $\begin{vmatrix} x & 0 & k \\ 1 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ فقط یک ریشه دارد؟

- (۱) $k = 1$
(۲) $k = -1$
(۳) $k = 0$
(۴) $k = 2$

۲۳۲- معادله $\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 \\ 1 & -2x & 1 \\ 1 & -4x & 2 \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۳
(۲) بی‌شمار
(۳) ۱
(۴) صفر

۲۳۳- جواب‌های معادله $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- (۱) -۴ و ۱
(۲) ۱ و ۴
(۳) ۱ و ۵
(۴) ۲ و ۵

۲۳۴- جواب‌های معادله $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- (۱) -۹ و ۴
(۲) -۸ و ۳
(۳) -۹ و -۴
(۴) -۳ و ۸

(سراسری ۹۹)

(خارج ۹۹)

۲۳۵- معادله دترمینانی $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^2 \\ 1 & x^2 & x \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۳ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) بی شمار

۲۳۶- اگر $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -x & 3 \\ 2x-1 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه به ازای چند مقدار حقیقی x داریم: $|A| = 5$

- (۱) هیچ مقدار (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

۲۳۷- اگر $A = [i^2 + 2j]_{3 \times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} m & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقدار m رابطه $|AB| = 2$ برقرار است؟

- (۱) هیچ مقدار (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

بسط دترمینان براساس سطر یا ستونی خاص

۲۳۸- حاصل دترمینان $D = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) a^2 (۳) a (۴) $5a^2$

۲۳۹- اگر $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = A + x \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ باشد، مقدار A کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴) -۶

۲۴۰- اگر $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & x & 5 \end{vmatrix} = A - x \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ ، مقدار A کدام است؟

- (۱) -۲۰ (۲) -۱۵ (۳) -۱۰ (۴) -۵

۲۴۱- اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$ باشد، دترمینان $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & 4 & b \\ 2 & 15 & 1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۲۴۲- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $|A| = -2$ باشد، دترمینان $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \cdots & \cdots & -1 \\ A & & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۶ (۴) ۱۲

۲۴۳- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 12 \\ a & 2b & 5 \\ 6 & c^3 & 2 \end{bmatrix}$ ، اگر با اضافه کردن a واحد به عدد ۳- دترمینان تغییر نکند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۲۴۴- به کدام درایه از ماتریس مقابل می توان ۴ واحد اضافه کرد بدون آن که دترمینان تغییر کند؟

- (۱) a_{11} (۲) a_{22} (۳) a_{33} (۴) a_{22}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

۲۴۵- اگر از هر درایه واقع در سطر دوم دترمینان زیر، ۲ برابر شماره ستون آن کم شود، به مقدار دترمینان اولیه، چه قدر افزوده می شود؟ (سراسری ۹۷)

(۱) ۱۳۲ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۴۸ (۴) ۱۵۶

۲۴۶- اگر به تمام درایه های ستون دوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ یک واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان اولیه کدام عدد اضافه می شود؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۶ (سراسری ۹۶)

۲۴۷- در دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & a & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ اگر به عنصر واقع در سطر سوم و ستون سوم ۵ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییر نکند، a کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۵ (۳) -۴ (۴) -۳

۲۴۸- اگر با اضافه کردن ۴ واحد به درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & a \end{bmatrix}$ دترمینان آن تغییری نکند، آن‌گاه دترمینان ماتریس زیر کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) -۷ (۳) -۸ (۴) -۹
- $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -11 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & a \end{bmatrix}$$

۲۴۹- چه قدر به درایه سطر دوم و ستوم سوم ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & 13 \end{bmatrix}$ اضافه کنیم تا مقدار دترمینان آن ۱۰ واحد کاهش یابد؟

- (۱) -۵ (۲) ۵ (۳) -۱۰ (۴) ۱۰

۲۵۰- در دترمینان $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & a \end{vmatrix}$ اگر به جای عدد ۲- مقدار ۱۵ را بگذاریم، دترمینان تغییری نمی‌کند. مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴) ۱

دترمینان ماتریس‌های خاص را می‌توان به کمک جدولی در درس‌نامه به راحتی محاسبه کرد.

۲۵۱- اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & a+1 & 0 \\ -1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$ برابر $a^3 + a + 2$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۲۵۲- اگر k_1 و k_2 $\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = k_1$ و $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = k_2$ کدام رابطه درست است؟

- (۱) $k_2 - k_1 = bc$ (۲) $k_1 - k_2 = bc$ (۳) $k_1 + k_2 = bc$ (۴) $k_1 + k_2 = -bc$

۲۵۳- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ $a_{ij} = \begin{cases} 2|A|^2 & i < j \\ |A| & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}$ در این صورت مقدار مثبت $|A|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۵۴- اگر A ماتریس مربعی باشد که در رابطه $A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} = 10I_3$ صدق کند، دترمینان ماتریس A کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۰ (۴) ۱

۲۵۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ |A| & 2|A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$ و $|B| = 54$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۲۵۶- اگر دترمینان ماتریس اسکالر $A_{3 \times 3}$ برابر ۲۷ باشد، مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس $2A$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۲۵۷- اگر A یک ماتریس اسکالر مرتبه ۳ و داشته باشیم $|A + 2I| = 1$ دترمینان ماتریس $A^2 + I$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۲۵۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ و $b_{ij} = -a_{ji}$ باشد، دترمینان ماتریس $B + 2I$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

قوانین دترمینان

۲۵۹- اگر A ماتریس 3×3 و $|A| = 4$ باشد، آن‌گاه دترمینان ماتریس $|A|A$ کدام است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۹۶ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶



۲۶۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||2A^2 - 3A||$ کدام است؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۱۴۴ (۳) -۳۶ (۴) -۱۸

۲۶۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان ماتریس $A^2 | A^3 | A^2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) -۳

۲۶۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $|A^2|$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۸ (۳) ۱ (۴) -۸

۲۶۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & x^2 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس A^2 کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲

۲۶۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -a & -2 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix}$ و $|A^4| = 25$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$ (۳) $-\sqrt{5}$ (۴) صفر

۲۶۵- اگر $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) -۳

۲۶۶- اگر $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} a_1 & 3b_1 & c_1 \\ -2a_2 & 6b_2 & -2c_2 \\ a_3 & -3b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) -۱۲ (۲) -۶ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۲۶۷- دو سطر یک ماتریس 4×4 را در عدد ۲ و سه ستون آن را در ۳ ضرب کرده‌ایم. دترمینان حاصل چند برابر شده است؟

- (۱) -۶ (۲) -۳۶ (۳) -۵۴ (۴) -۱۰۸

۲۶۸- دترمینان ماتریس $A_{3 \times 3}$ برابر ۳ است. اگر همهٔ درایه‌های ماتریس به غیر از a_{11} و a_{22} را در ۲ ضرب کنیم، دترمینان ماتریس جدید کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۲۶۹- برای ماتریس مربعی A از مرتبهٔ ۳ رابطهٔ روبه‌رو برقرار است. مقدار $|A|$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 2I$$

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$

- (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۷۰- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ |A| & -1 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $\frac{|A|A^2}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۹ (۴) ۲۷

۲۷۱- اگر A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ و $4 = |A| + \left| \frac{2}{|A|} A^{-1} \right|$ باشد، آن‌گاه $|(A^2)^{-1}|$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۷۲- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} -1 & i < j \\ 0 & i = j \\ 2 & i > j \end{cases}$ باشد، حاصل $|2|A|A^2|$ کدام است؟

- (۱) -۲۵۶ (۲) -۱۲۸ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶

۲۷۳- ماتریس‌های A و B مربعی از مرتبهٔ 3×3 هستند. اگر $|A| = 3$ و $|A|B| = -54$ باشد، حاصل $|B|^2 A$ کدام است؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۹۲ (۳) -۱۲۸ (۴) -۱۹۲

۲۷۴- ماتریس A مربعی از مرتبهٔ ۴ است. اگر دترمینان آن برابر ۲ باشد، دترمینان ماتریس $|A^2| A |A^2|$ کدام است؟

- (۱) 2^{39} (۲) 2^{40} (۳) 2^{41} (۴) 2^{42}

- ۲۷۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $CA = 3B - C$ باشد، دترمینان ماتریس C کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲
- ۲۷۶- اگر $A_{3 \times 3}$ داشته باشیم $A^T + A + I = \bar{O}$ ، حاصل $|A^T|$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۷۷- اگر A ماتریس 3×3 و $A^T = 2I + 4A$ باشد، دترمینان ماتریس $(2I - A)^T$ کدام است؟
 (۱) -۲۱۶ (۲) ۲۱۶ (۳) -۳۶ (۴) ۳۶
- ۲۷۸- اگر A یک ماتریس 2×2 و داشته باشیم $(A - I)^T = A + 2I$ ، دترمینان ماتریس $A^T - 3A$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸
- ۲۷۹- اگر A مرتبه ۳ و $A^T = -I$ باشد، آن گاه حاصل $\frac{|A+I|}{|A^T-I|}$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳
- ۲۸۰- اگر A ماتریس 3×3 و $3|A| = 24$ و $||A|A^T| - \frac{2}{|A|}A^T| = 24$ باشد، حاصل $|3A - |A||$ کدام است؟
 (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴
- ۲۸۱- اگر $A^T = \begin{bmatrix} -2 & x^2+1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||A|A + A||$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۴ (۴) -۸
- ۲۸۲- اگر $3A = \begin{bmatrix} 4 & |A| \\ -|A| & 2 \end{bmatrix}$ باشد، بیشترین مقدار $|- \frac{1}{4}A|$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$
- ۲۸۳- اگر $2A^T = \begin{bmatrix} |2A| & |A| \\ |A^{-1}| & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|2A| + 1$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۸۴- اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 3|A| \\ 0 & |A| & 0 \\ -|A| & 0 & -2|A| \end{bmatrix}$ و A وارون پذیر باشد، مقدار دترمینان $|A|^T \times A^4$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۸۵- اگر $A_{2 \times 2}$ و $A^T = \bar{O}$ و $|A+I| = 3$ باشد، دترمینان ماتریس $A - I$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) -۳
- ۲۸۶- اگر A ماتریس 3×3 و $A^T = \bar{O}$ و $|A - 2I| = 32$ باشد، دترمینان ماتریس $(A + 2I)$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۴ (۴) -۸
- ۲۸۷- اگر A ماتریس مربعی مرتبه ۳ و $A^T = 2I$ و $|A^T + A + I| = 4$ باشد، دترمینان ماتریس $(A - I)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

دترمینان ماتریس وارون

- ۲۸۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان A^{-1} کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$
- ۲۸۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان $(A^T)^{-1}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{1}{125}$ (۴) $\frac{1}{625}$
- ۲۹۰- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||A^{-1}|A||$ کدام است؟
 (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۴ (۴) -۸

۲۹۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $(2A)(\Delta A)$ چند برابر دترمینان A^{-1} است؟

- ۱۰ (۱) 10^2 (۲) 10^3 (۳) 10^4 (۴)

۲۹۲- اگر A ماتریس 2×2 و وارون پذیر و $A \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \times A^T = A \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times A^T$ باشد، دترمینان ماتریس $(A^T)^{-1}$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{27}$ (۴)

۲۹۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل دترمینان ماتریس $A^T B^{-1} B^T A^{-1}$ کدام است؟

- ۱۸ (۱) 12 (۲) 9 (۳) 6 (۴)

۲۹۴- اگر A ماتریس مربعی 2×2 و وارون پذیر و k یک عدد حقیقی و داشته باشیم $\det((kA)^{-1}) = \frac{\Delta}{k^2 \det(A)}$ ، مقدار k کدام است؟ ($k \neq 0$)

- ۱ (۱) 2 (۲) 4 (۳) 8 (۴)

۲۹۵- اگر A یک ماتریس مربعی 2×2 و معکوس پذیر و داشته باشیم $A^T = 4A + 2I$ ، دترمینان A^{-1} کدام است؟

- $-\frac{1}{4}$ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -2 (۳) -4 (۴)

۲۹۶- اگر ماتریس‌های مربعی 2×2 و وارون پذیر A و B در رابطه $(A^{-1}BA)^5 = \begin{bmatrix} -64 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس B کدام است؟

- -1 (۱) -2 (۲) -4 (۳) -16 (۴)

۲۹۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $P = 2 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(P^{-1}AP)^6$ کدام است؟

- ۱ (۱) 2 (۲) 4 (۳) 6 (۴)

۲۹۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ و B ماتریس مربعی مرتبه ۲ باشد و داشته باشیم $(A^{-1}BA)^T = A + 2I$ ، دترمینان ماتریس $(B^T)^{-1}$ کدام است؟

- ۳ (۱) 1 (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴)

۲۹۹- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $-\frac{1}{3}A^T A^{-1}$ کدام است؟

- ۴ (۱) 9 (۲) -8 (۳) -27 (۴)

۳۰۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل عبارت $|A| \times |2A^{-1} + 2B^{-1}| \times |B|$ کدام است؟

- ۶ (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴)

۳۰۱- اگر دترمینان ماتریس مربعی $A + B$ برابر ۵ باشد، دترمینان ماتریس $A(A^{-1} + B^{-1})B$ کدام است؟

- $\frac{1}{5}$ (۱) 1 (۲) 5 (۳) 25 (۴)

۳۰۲- اگر A ماتریس مربعی و وارون پذیر مرتبه ۲ باشد و $A^T = \bar{O}$ و $|A + I| = 4$ باشد، $|A - I|$ کدام است؟

- ۱ (۱) $0/75$ (۲) $0/5$ (۳) $0/25$ (۴)

۳۰۳- اگر A ماتریس مربعی و وارون پذیر باشد، حاصل $|I + 2A^{-1}|$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $\frac{|2I - A|}{|A|}$ (۲) $\frac{|2I + A|}{|A|}$ (۳) $\frac{|A|}{|2I - A|}$ (۴) $\frac{|A|}{|2I + A|}$

۳۰۴- اگر A و B ماتریس مربعی و وارون پذیر و $|I + ABA^{-1}| = 4$ باشد، دترمینان ماتریس $(B + I)^T$ کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) 2 (۲) 4 (۳) 16 (۴)

۳۰۵- اگر A و B دو ماتریس 3×3 و $|2A + 2B| = 3$ و $|A^{-1}| = \frac{1}{3}$ باشد، دترمینان $2A^{-1}B + 3I$ کدام است؟

- ۱ (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴)

۳۰۶- اگر A وارون پذیر و $A(A - I) = \bar{O}$ باشد، دترمینان ماتریس $(2A^T + 3A)^{-1}$ کدام است؟

- $\frac{1}{25}$ (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) 5 (۳) 25 (۴)

۳۰۷- اگر A و B دو ماتریس مربعی و $|A + B| = 10$ و $|B| = 2$ باشد، دترمینان $I + AB^{-1}$ کدام است؟

- ۲۰ (۱) 10 (۲) 5 (۳) 2 (۴)

روش عددگذاری در دترمینان

(خارج ۸۸)

۳۰۸- حاصل $D = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) a (۲) $4a$ (۳) صفر (۴) ۱

(سراسری ۹۳)

۳۰۹- اگر دترمینان $D = \begin{vmatrix} 6 & 3x & 2x \\ 3x & 2x & 6 \\ 2x & 6 & 3x \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $D' = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 6 \\ 9 & 2x & 9 \\ 3x & 4 & 4 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $-2D$ (۲) $-D$ (۳) $\frac{1}{2}D$ (۴) D

۳۱۰- حاصل دترمینان $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $-a^2$ (۲) a^2 (۳) $1-a$ (۴) $1+a$

(سراسری ۹۳)

۳۱۱- اگر $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ ac & ab & bc \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $-D$ (۲) D (۳) $(a+b+c)D$ (۴) $abcD$

(خارج ۸۹)

۳۱۲- اگر a, b, c سه عدد متمایز باشند، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4(a+b) \\ 1 & a+1 & a^2(b+2) \\ 1 & b+1 & b^2(a+2) \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $4ab$ (۳) $(a-2)(b-2)(c-2)$ (۴) $2(a-2)(b-2)(c-2)$

(خارج ۸۶)

۳۱۳- اگر a, b, c سه عدد حقیقی متمایز باشند، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & a & bc-a^2 \\ 1 & b & ac-b^2 \\ 1 & c & ab-c^2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) abc (۳) $a+b+c$ (۴) $(a-b)(b-c)(c-a)$

(سراسری ۸۸)

۳۱۴- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$ با شرط $y = x+z$ کدام است؟

(۱) $2x(x+z)$ (۲) $x(x+z)$ (۳) $x^2(x+z)$ (۴) $2x^2(x+z)$

۳۱۵- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix} b+c & a+c & b+a \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $a+b+c$ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) $2(a+b+c)$

۳۱۶- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c+2 \\ 3a & 3b+2 & 3c+3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $3a$ (۲) $2a$ (۳) $-2a$ (۴) $-a$

۳۱۷- اگر $k = \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 3 & 1 & a \\ 1 & b & 2 \end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} 2a-2 & 0 & 0 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $2k$ (۲) $-2k$ (۳) $-k$ (۴) k

۳۱۸- اگر $k = \begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a & b & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & -3 \\ 2a & 2b & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

(۱) $2k$ (۲) $-2k$ (۳) $\frac{k}{2}$ (۴) $-\frac{k}{2}$

$$\text{۳۱۹- اگر } k = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ a & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ باشد، حاصل دترمینان } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ کدام است؟}$$

$$2k + 15 \quad (4)$$

$$2k + 14 \quad (3)$$

$$2k + 1 \quad (2)$$

$$2k \quad (1)$$

$$\text{۳۲۰- اگر } k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \text{ باشد، حاصل } \begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2a+1 & 2b & 2c \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ کدام است؟}$$

$$-8k - 12 \quad (4)$$

$$-8k + 12 \quad (3)$$

$$8k - 12 \quad (2)$$

$$8k + 12 \quad (1)$$

$$\text{۳۲۱- اگر } k = \begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ باشد، حاصل دترمینان } \begin{vmatrix} 6 & 4 & a+1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} \text{ کدام است؟}$$

$$4k + 36 \quad (4)$$

$$4k - 36 \quad (3)$$

$$-4k - 36 \quad (2)$$

$$-4k + 36 \quad (1)$$

$$\text{۳۲۲- اگر } k_1 = \begin{vmatrix} 2 & a & 3a \\ 2 & 2a & 4a \\ 2 & 0 & 5a \end{vmatrix} \text{ و } k_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3a & a \\ 4 & 4a & a \\ 5 & 2a & a \end{vmatrix} \text{ باشد، کدام گزینه صحیح است؟}$$

$$k_1 = k_2 \quad (4)$$

$$k_1 = -k_2 \quad (3)$$

$$k_1 = 2k_2 \quad (2)$$

$$k_1 = -2k_2 \quad (1)$$

$$\text{۳۲۳- اگر } k = \begin{vmatrix} a & b & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ باشد، حاصل } \begin{vmatrix} a-2 & b+2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \text{ کدام است؟}$$

$$k + 3 \quad (4)$$

$$-k - 3 \quad (3)$$

$$-k - 5 \quad (2)$$

$$k + 5 \quad (1)$$

$$\text{۳۲۴- اگر } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \text{، آنگاه دترمینان } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 2 \\ a & b & -1 \end{vmatrix} \text{ کدام است؟}$$

$$2D + 1 \quad (4)$$

$$2D - 1 \quad (3)$$

$$-2D + 2 \quad (2)$$

$$-2D - 4 \quad (1)$$

$$\text{۳۲۵- اگر } A = \begin{vmatrix} -a & b & 0 \\ -1 & -b & a \\ a & -b & b \end{vmatrix} \text{، مقدار } \begin{vmatrix} b-a & 1 & 0 \\ -b-1 & -1 & 2a \\ a-b & -1 & 2b \end{vmatrix} \text{ چیست؟}$$

$$\frac{2}{b} A \quad (4)$$

$$2bA \quad (3)$$

$$-2bA \quad (2)$$

$$-\frac{2}{b} A \quad (1)$$

$$\text{۳۲۶- اگر } A = \begin{bmatrix} 5+a & b & c \\ a & 5+b & c \\ a & b & 5+c \end{bmatrix} \text{ باشد و } a+b+c=7 \text{، دترمینان ماتریس } (5A^{-1}) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{25}{7} \quad (4)$$

$$\frac{25}{12} \quad (3)$$

$$\frac{5}{7} \quad (2)$$

$$\frac{5}{12} \quad (1)$$

$$\text{۳۲۷- در ماتریس } A = \begin{bmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{bmatrix} \text{ اگر مجموع تمام درایه‌ها برابر ۶ و مقدار } |A| = 8 \text{ باشد، } x \text{ کدام است؟}$$

$$\pm 3 \quad (4)$$

$$\pm 2 \quad (3)$$

$$\pm 1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

آزمون

$$\text{۳۲۸- در ماتریس } A = [i+j-1]_{n \times n} \text{ درایه سطر اول و ستون آخر، ۲ برابر درایه سطر دوم و ستون سوم است. در این ماتریس } a_{nn} \text{ کدام است؟}$$

$$12 \quad (4)$$

$$11 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

$$\text{۳۲۹- اگر } I = \begin{bmatrix} 1 & 3a \\ 4 & 2 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ باشد، حاصل } a+b \text{ کدام است؟}$$

$$-1 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$



(خارج ۹۴)

۳۳۰- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ، اگر $a_{ij} = \begin{cases} 2 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^2 - 4A$ برابر کدام است؟

- (۱) $2I$ (۲) $3I$ (۳) $4I$ (۴) $5I$

۳۳۱- مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس اسکالر A از مرتبه ۳، برابر ۳ است. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^T کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۲۷ (۴) ۳۶

۳۳۲- اگر A ماتریس وارون‌پذیر و $\bar{O} = A^2 - 2A + 2I$ باشد، حاصل $((A - I)^{-1})^2$ کدام است؟

- (۱) I (۲) $2I$ (۳) $-I$ (۴) $-2I$

۳۳۳- اگر $AB = 3A + 2B$ و A و B وارون‌پذیر باشند، حاصل $2A^{-1} + B^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $2A^{-1}B^{-1}$ (۲) $3I$ (۳) $3B^{-1}A^{-1}$ (۴) $3AB$

۳۳۴- اگر $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $x + y$ کدام است؟

- (۱) -5 (۲) -4 (۳) 4 (۴) 5

۳۳۵- اگر A و B ماتریس‌های مربعی و $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $BA = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ باشد، $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۳۶- ماتریس A از مرتبه ۳ است. اگر مقدار دترمینان A برابر ۳ باشد، دترمینان ماتریس $\frac{3}{|A^{-1}|}A$ کدام است؟

- (۱) 3^6 (۲) 3^7 (۳) 3^8 (۴) 3^9

۳۳۷- یک ماتریس وارون‌پذیر از مرتبه ۲ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & |A| \end{bmatrix}$ و $A^{-1}B = 2I$ باشد، $|A^2|$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) ۱ (۳) -2 (۴) ۲

۳۳۸- اگر $K = \begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a & b & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix}$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & -3 \\ 2a & 2b & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

- (۱) $2k$ (۲) $-2k$ (۳) $\frac{k}{2}$ (۴) $-\frac{k}{2}$



حال برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$|AB| = -3 \begin{vmatrix} 5 & -23 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 11 & -23 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3(20 - 23) + 2(44 - 46) + 5(-11 + 10) = 9 - 4 - 5 = 0$$

۲۱۸. گزینه ۴ مطابق تعریف ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{برحسب}} |A| = 0 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(0 + 2) + 2(1 - 0) = -4 + 2 = -2$$

۲۱۹. گزینه ۴ بسط دترمینان برحسب سطر اول را می‌نویسیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -a & -2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -a & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 = (-a + 2a) = a$$

حالا داریم: $|A| = 4 \Rightarrow a = 4$

۲۲۰. گزینه ۲ در گام اول، دترمینان A را برحسب ستون دوم می‌نویسیم:

$$|A| = -1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times (4 - 6) = 2$$

و در گام دوم، دترمینان B را هم برحسب ستون دوم می‌نویسیم:

$$|B| = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times (8 - 9) = -1$$

$$\Rightarrow |A|^3 |B|^2 = 2^3 \times (-1)^2 = 8$$

۲۲۱. گزینه ۲ برحسب ستون سوم بسط می‌دهیم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-a) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(-1 - 1) - 0 + (-a)(1 - 0) = -2a - a = -3a = 6 \Rightarrow a = -2$$

۲۲۲. گزینه ۲ بسط دترمینان را برحسب ستون دوم می‌نویسیم:

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -0 + a \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= a(0 + 1) - 3(4 - 4) = a - 24 = 2 \Rightarrow a = 26$$

۲۲۳. گزینه ۱ دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$= (0 + y) - 1 \times (2 + x) + (2y + 0) = 3y - x - 2$$

۲۲۴. گزینه ۲ هر کدام از دترمینان‌ها را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & z \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط برحسب}} -x \begin{vmatrix} y & z \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -x(0) = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}} y \times \begin{vmatrix} x & x \\ z & t \end{vmatrix} = y \times (xt - xz)$$

فاکتور از xy(t-z)

$$D_1 + D_2 = 0 + xy(t - z) = xy(t - z)$$

و در نهایت:

۲۱۴. گزینه ۳

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب سطر اول}]{\text{بسط دترمینان}} 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (9 - 1) - 1 \times (3 - 1) + 1 \times (1 - 3) = 24 - 2 - 2 = 20$$

۲۱۵. گزینه ۲

$$\xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط برحسب}} |A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 0 + 1 \times \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-9 + 12) + (-16 + 12) = -1$$

۲۱۶. گزینه ۴ بسط دترمینان را برحسب سطر دوم که یک درایه صفر دارد، می‌نویسیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 5 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -3(-1 - 24) - 5(12 - 2) = 75 - 50 = 25$$

۲۱۷. گزینه ۴ | راه I ماتریس A × B را تشکیل می‌دهیم و

دترمینان می‌گیریم:

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -11 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 11 & 5 & -23 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



۲۲۵. گزینه ۲ دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= x(1+1) - y(1-2) = 2x + y \Rightarrow 2x + y = 2 \Rightarrow y = -2x + 2$$

۲۲۶. گزینه ۱ ماتریس C را تشکیل می‌دهیم:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

سطر چهارم و ستون سوم را حذف می‌کنیم و دترمینان می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (0+1) + (4+4) = 9$$

۲۲۷. گزینه ۲ اگر A وارون‌پذیر نباشد، باید $|A| = 0$ باشد:

$$|A| = 4 \times 1 - (-2)a = 0 \Rightarrow a = -2$$

حالا دترمینان B را تشکیل می‌دهیم:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (6+2) + 2(-2+3) = 6+2 = 8$$

۲۲۸. گزینه ۳ در گام اول، ماتریس B را تشکیل می‌دهیم:

$$B = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

در گام دوم، ماتریس C را تشکیل می‌دهیم:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

و در گام آخر، سطر دوم و ستون سوم را حذف می‌کنیم و دترمینان را برحسب

سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

۲۲۹. گزینه ۳ در گام اول، ماتریس $A^T + I$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T + I = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T + I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

در گام دوم، ماتریس B را می‌نویسیم و دترمینان می‌گیریم:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5(0-6) - 0 + 1 \times (-9+2) = -30-7 = -37$$

۲۳۰. گزینه ۴ راه I در گام اول A^{-1} را حساب می‌کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \times 5 - 2 \times 3} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

در گام دوم دترمینان B را تشکیل می‌دهیم:

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 20 - 24 = -4$$

راه II در ماتریس B برحسب ستون سوم می‌نویسیم:

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times |2A^{-1}| = 2^2 \times |A^{-1}| = \frac{2^2}{|A|} = \frac{4}{-1} = -4$$

۲۳۱. گزینه ۲ بسط دترمینان را برحسب ستون دوم که تا صفر دارد

می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & k \\ 1 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} x & k \\ 2 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)(x^2 + 2x - 2k) = 0$$

معادله دارای ریشه $x = -1$ هست، پس معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 2k = 0$

یا نباید ریشه داشته باشد یا ریشه آن فقط $x = -1$ باشد:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 4 + 8k < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{2} \\ \text{یا} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2k = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب $k \leq -\frac{1}{2}$ است که در گزینه‌ها فقط $k = -1$ در این شرط

صدق می‌کند.

۲۳۲. گزینه ۲ بسط دترمینان را برحسب ستون اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 \\ 1 & -2x & 1 \\ 1 & -4x & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -2x & 1 \\ -4x & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ -4x & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ -2x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-4x + 4x) - 1 \times (4x - 4x) + 1 \times (2x - 2x) = 0$$

و مستقل از تعداد x، دترمینان همیشه صفر است، پس x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد و معادله بی‌شمار جواب دارد.

۲۳۳. گزینه ۳ بسط دترمینان برحسب سطر اول را می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4 \times \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4(6+x^2-5x-2) - (3-x-3) + (2-6+3x) = 0$$

$$\Rightarrow -16-4x^2+20x+x-4+3x = 0$$

$$\Rightarrow -4x^2+24x-20=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } (-4)} x^2-6x+5=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5)=0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ یا } 5$$



۲۳۴. گزینه ۳ دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1 \times \begin{vmatrix} 4 & x+5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -2 & x+5 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x-1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-4 - 6x - 30) + (-2)(2 - x^2 - 4x + 5) + 3(-12 - 4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow -6x - 34 + 2x^2 + 8x - 14 - 24 - 12x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 10x - 72 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 5x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x-9)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 9, x = -4$$

۲۳۵. گزینه ۱ بسط دترمینان را برحسب ستون اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & x^2 & x^2 \\ 1 & x^3 & x \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ x^3 & x \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} x & x^3 \\ x^3 & x \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} x & x^3 \\ x^2 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - x^5) - (x^2 - x^6) + (x^2 - x^5) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از } x^2 \text{ فاکتور می‌گیریم}} x^2(x - x^3 - 1 + x^4 + x - x^3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x^4 - 2x^3 + 2x - 1) = 0$$

حالا عبارت داخل پرانتز را تجزیه می‌کنیم:

$$\Rightarrow x^2[(x^4 - 1) - 2x(x^2 - 1)] = 0$$

$$\Rightarrow x^2[(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)] = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

۲۳۶. گزینه ۱ می‌دانیم اگر $A_{3 \times 3} = B_{3 \times 3} \times C_{3 \times 3}$ باشد، همواره دترمینان A برابر صفر است و هیچ‌گاه رابطه $|A| = 5$ برقرار نیست.

۲۳۷. گزینه ۱ می‌دانیم که اگر $C_{3 \times 3} = A_{3 \times 3} \times B_{3 \times 3}$ باشد، دترمینان C همواره برابر صفر است و به ازای هیچ مقداری از m مقدار دترمینان ۲ نمی‌شود.

۲۳۸. گزینه ۲ چون در سطر سوم ۲ تا صفر داریم، پس بسط دترمینان برحسب سطر سوم را می‌نویسیم:

$$D = a \begin{vmatrix} a & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = a(3a - 2a) = a^2$$

۲۳۹. گزینه ۴ با توجه به صورت تست متوجه می‌شویم که باید دترمینان را برحسب ستون اول یا سطر سوم بنویسیم. (و فرقی هم نمی‌کند) که ما این‌جا برحسب ستون اول می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (-4 - 4) - 2(6 - 7) = -8 + 2 = -6$$

۲۴۰. گزینه ۲ بسط دترمینان را برحسب سطر سوم می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & x & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{2(3+2) + 5(-5-0) - x}_{A} \Rightarrow A = 10 - 25 = -15$$

۲۴۱. گزینه ۳ بسط دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$0 + 1 \times \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 1 \times 4 = 4$$

۲۴۲. گزینه ۳ بسط دترمینان را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$|B| = 0 - 0 + 3|A| = 3(-2) = -6$$

۲۴۳. گزینه ۳ می‌دانیم که باید با حذف سطر و ستون مربوط به $a_{12} = -3$ ، دترمینان ماتریس باقی‌مانده صفر شود.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 12 \\ a & 2b & 5 \\ 6 & c^2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 30 = 0 \Rightarrow a = 15$$

۲۴۴. گزینه ۴ باید درایه‌ای را انتخاب کنیم که با حذف سطر و ستون آن، دترمینان باقی‌مانده صفر شود. تمام گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. با انتخاب ۴ داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{a_{22}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times (6) - 2 \times (3) = 0$$

۲۴۵. گزینه ۴ ابتدا دترمینان اولیه را حساب می‌کنیم:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط برحسب ستون اول}} 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-4+5) + 2(-4+3) = 3$$

و سپس دترمینان دوم:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & -2 \times 1 & 1 - 2 \times 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & -7 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر اول}} 5 \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5(47) - 4(22) - 3(-4) = 159$$

و بنابراین داریم:

$$D_2 - D_1 = 159 - 3 = 156$$

۲۴۶. گزینه ۱ ابتدا $|A|$ را حساب می‌کنیم:

$$|A| \xrightarrow{\text{بسط برحسب ستون دوم}} -3 \times \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 = -3(30 - 21) = -27$$

و حالا یک واحد به درایه‌های ستون دوم اضافه می‌کنیم و دوباره دترمینان می‌گیریم:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ساروس}} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (12 + 84 + 80) - (12 + 14 + 120) = -30$$

$$\xrightarrow{|B| - |A|} -30 - (-27) = -3$$

۲۴۷. گزینه ۱ یعنی اگر $a_{33} = -2 + 5 = 3$ به $a_{33} = -2$ تغییر کند، دترمینان ثابت می‌ماند. پس باید دترمینان 2×2 ای که از حذف طرف سطر سوم و ستون سوم باقی می‌ماند، صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + 12 = 0 \Rightarrow a = -6$$

۲۴۸. گزینه ۴

نکته

می‌دانیم که در ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اگر به تمامی درایه‌ها k واحد اضافه کنیم و دترمینان تغییر نکند، باید $a + d = b + c$ باشد.

$$\Rightarrow 2 + a = 3 + 5 \Rightarrow a = 6$$

حالا بسط دترمینان A را برحسب سطر اول که دوتا صفر دارد می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{a=6} |A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -11 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 3(12 - 15) = -9$$

۲۴۹. گزینه ۳ بسط دترمینان را برحسب سطر دوم در دو حالت می‌نویسیم:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

و در حالت دوم $a_{23} = 2 + x$ در نظر می‌گیریم:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & 2+x \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط برحسب سطر دوم}} 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} - (x+2) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

که دو عبارت اول در بسط D_1 و D_2 یکسان است، پس داریم:

$$D_1 - D_2 = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (x+2) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - x - 2 = -x = 10 \Rightarrow x = -10$$

۲۵۰. گزینه ۲ می‌دانیم که باید دترمینان 2×2 ای که با حذف سطر دوم

و ستون اول باقی می‌ماند صفر باشد:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 20 = 0 \Rightarrow a = 10$$

۲۵۱. گزینه ۱ چون ماتریس پایین‌مثلثی است، پس دترمینان آن برابر

حاصل ضرب قطر اصلی است:

$$\Rightarrow |A| = a(a+1)(a-1) = a(a^2-1) = a^3 - a = a^3 + a + 2$$

$$\Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

۲۵۲. گزینه ۳ می‌دانیم k_1 برابر منفی حاصل ضرب قطر فرعی و k_2 برابر

با حاصل ضرب قطر اصلی است:

$$\begin{cases} k_1 = -abc \\ k_2 = (a+1)bc = abc + bc \end{cases} \xrightarrow{(+)} k_1 + k_2 = bc$$

۲۵۳. گزینه ۲ ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} |A| & 2|A|^2 & 2|A|^3 \\ 0 & |A| & 2|A|^2 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

و چون ماتریس A بالامثلثی است، پس داریم:

$$|A| = |A| \times |A| \times |A| = |A|^3 \Rightarrow |A|^3 - |A| = 0$$

$$\Rightarrow |A|(|A|^2 - 1) = 0 \Rightarrow |A| = 0, 1, -1$$

که مقدار مثبت دترمینان A برابر ۱ است.

۲۵۴. گزینه ۲

نکته

$$|ABC| = |A||B||C|$$

و دترمینان سمت چپ A حاصل ضرب قطر اصلی و دترمینان ماتریس راست A برابر منفی حاصل ضرب قطر فرعی است.

$$\Rightarrow (-2) \times |A| \times (-5) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1000 \Rightarrow |A| = 100$$

۲۵۵. گزینه ۲ دترمینان B برابر حاصل ضرب قطر اصلی می‌شود:

$$\Rightarrow |B| = 2|A|^3 = 54 \Rightarrow |A|^3 = 27 \Rightarrow |A| = 3$$

و از طرفی داریم: $|A| = 1(-1) - 2m = -1 - 2m = 3 \Rightarrow m = -2$

۲۵۶. گزینه ۲ ماتریس A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = k^3 = 27 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

و جمع درایه‌های ستون اول ماتریس $2A$ برابر ۶ است.

۲۵۷. گزینه ۴ ماتریس A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

و $A + 2I$ را می‌سازیم:

$$\Rightarrow A + 2I = \begin{bmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A + 2I| = (k+2)^3 = 1 \Rightarrow k+2 = 1 \Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

و دترمینان $A^2 + I$ برابر $2^3 = 8$ است.

۲۵۸. گزینه ۳ ابتدا ماتریس $B + 2I$ را تشکیل می‌دهیم.

در ماتریس B همه درایه‌های A منفی می‌شوند و بالامثلثی تبدیل به پایین‌مثلثی

می‌شود (مثلاً $b_{23} = -a_{23}$):

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

و حالا $B + 2I$ را می‌نویسیم:

$$B + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

و بنابراین: $|B + 2I| = 1(1)(-2) = -2$

۲۵۹. گزینه ۴ می‌دانیم: $|kA_{n \times n}| = k^n |A|$

$$|A| = 4^3 |A| = 4^3 \times 4 = 4^4 = 256$$



و در گام دوم، سطر دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\rightarrow 2 \times \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 6$$

ضرب در سطر دوم

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 12$$

۲۶۶. گزینه ۱ در دترمینان مورد نظر از سطر دوم عدد (-2) و از ستون دوم عدد (-3) فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & -2b_1 & c_1 \\ -2a_2 & 6b_2 & -2c_2 \\ a_3 & -3b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-2)(-3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-3)(-2) = -12$$

۲۶۷. گزینه ۴ می‌دانیم که اگر هر سطر یا هر ستون ماتریس را در k ضرب کنیم، دترمینان k برابر می‌شود، پس در این جا داریم:

$$\frac{D'}{D} = \underbrace{(2)}_{\text{سطر ۲}} \underbrace{(-3)}_{\text{ستون ۳}} \underbrace{(-3)}_{\text{ستون ۳}} = -108$$

۲۶۸. گزینه ۱ مطابق شکل زیر یعنی فقط ستون دوم ضرب نشده است و ستون اول و دوم در ۲ ضرب شده و در نتیجه دترمینان $2 \times 2 = 4$ برابر شده است.

$$\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{11} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{دترمینان جدید} = 4 \times |A| = 4 \times 3 = 12$$

۲۶۹. گزینه ۳ از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \times |A| \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = |2I| = 2^3 |I| = 8$$

و در نتیجه:

$$\Rightarrow -2|A| \times 6 = 8 \Rightarrow |A| = -\frac{2}{3}$$

۲۷۰. گزینه ۳ در گام اول، دترمینان A^3 را حساب می‌کنیم:

$$|A^3| = \begin{vmatrix} 27 & 0 \\ |A| & -1 \end{vmatrix} = 27(-1) - 0 = -27 \Rightarrow |A|^3 = 27$$

$$\Rightarrow |A| = 3$$

در گام دوم، طبق رابطه $|kA_{n \times n}| = k^n |A|$ داریم:

$$\left| \frac{|A|}{3} A^2 \right| = \left(\frac{|A|}{3} \right)^2 |A^2| = 1 \times |A|^2 = |A|^2 = 3^2 = 9$$

۲۷۱. گزینه ۴ برای راحتی محاسبه $|A| = x$ در نظر می‌گیریم:

$$|xA| + \left| \frac{1}{x} A^{-1} \right| = x^2 |A| + \frac{1}{x^2} |A^{-1}| = x^2(x) + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x}$$

$$= x^3 + \frac{1}{x^3} = 4 \xrightarrow{\times x^3} x^6 + 1 = 4x^3$$

$$\Rightarrow x^6 - 4x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x^3 - 2)^2 = 0 \Rightarrow x^3 = 2$$

$$\Rightarrow |A|^3 = 2$$

در گام نهایی طبق خواص دترمینان داریم:

$$|(A^2)^{-1}| = |(A^{-1})^2| = |A^{-1}|^2 = \left(\frac{1}{|A|} \right)^2 = \frac{1}{|A|^2} = \frac{1}{2}$$

۲۶۰. گزینه ۲ در ابتدا $|A|$ را حساب می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - (1)(5) = 1$$

$$|kA_{2 \times 2}| = k^2 |A|$$

یادآوری

و سپس داریم:

$$|2A^2| = 2^2 \times |A|^2 = 4 \times |A|^2 = 4$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} |-3A| |2A^2| = |-3A \times 4| = |-12A|$$

$$= (-12)^2 |A| = 144 \times 1 = 144$$

۲۶۱. گزینه ۱ در گام اول $|A|$ را حساب می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-2) - (1)(5) = 1$$

و در گام دوم از رابطه $|A^n| = |A|^n$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow |A^3| = |A|^3 = 1^3 = 1$$

۲۶۲. گزینه ۴ یادآوری

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط بر حسب}} 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 2 - 4 = -2$$

و در نتیجه:

$$|A^2| = |A|^2 = (-2)^2 = 4$$

۲۶۳. گزینه ۱ در گام اول دترمینان A را حساب می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط بر حسب}} -2 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -2(4 - 2) = -4$$

و در نهایت:

$$|A^2| = |A|^2 = (-4)^2 = 16$$

۲۶۴. گزینه ۲ در گام اول دترمینان A را حساب می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -a & -2 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر اول}]{\text{بسط بر حسب}} 1 \times \begin{vmatrix} -a & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= (-a + 2a) = a$$

و در نتیجه:

$$|A^4| = |A|^4 = a^4 = 25 \Rightarrow a = \pm \sqrt{5}$$

۲۶۵. گزینه ۱

یادآوری

$$k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

اگر در یک ماتریس یک سطر یا یک ستون ماتریس را k برابر کنیم، دترمینان k برابر می‌شود.

در گام اول، سطر اول ماتریس را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2 \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \xrightarrow{\text{ضرب در سطر اول}} \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

۲۷۲. گزینه ۱ ماتریس A را می نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} |A| = 0 + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (0+2) - (4-0) = -2$$

حالا داریم:

$$\begin{aligned} |2A| &= 2^3 |A| = 8(-2) = -16 \\ |A^{-1}| &= \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۲۷۳. گزینه ۲

$$|kA_{n \times n}| = k^n |A|$$

نشانده

$$\Rightarrow ||A|B| = |2B| = 2^3 |B| = -54 \xrightarrow{\div 27} |B| = -2$$

$$\Rightarrow ||B|^2 A| = |4A| = 4^3 |A| = 64 \times 3 = 192$$

۲۷۴. گزینه ۲ یادآوری

$$\begin{aligned} |kA_{n \times n}| &= k^n |A| \\ |A| &= 2 \Rightarrow ||A^2 A|A|A^2| = |4A|A^2| \\ &= |4^4 \times |A||A^2| = |2^9 A^3| = (2^9)^4 |A^3| \\ &= 2^{36} \times 2^3 = 2^{39} \end{aligned}$$

۲۷۵. گزینه ۳ در گام اول عبارت را ساده می کنیم:

$$CA = 3B - C \Rightarrow CA + C = 3B \Rightarrow C(A+I) = 3B \quad (*)$$

در گام دوم ماتریس A+I را حساب می کنیم:

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A+I| = 9$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

و در گام نهایی از دو طرف عبارت (*) دترمینان می گیریم:

$$|C(A+I)| = |3B_{2 \times 2}| \Rightarrow |C| \times |A+I| = 3^2 |B| \Rightarrow |C| = -1$$

۲۷۶. گزینه ۱ از چاق و لاغر کمک می گیریم:

$$A^2 + A + I = \bar{O} \xrightarrow{\times(A-I)} \frac{(A-I)(A^2 + A + I)}{A^2 - I^2} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2 = I \Rightarrow |A|^2 = |I| = 1 \Rightarrow |A| = 1$$

و در نهایت داریم:

۲۷۷. گزینه ۲ اتحاد $(2I - A)^2$ را باز می کنیم:

$$(2I - A)^2 = 4I + A^2 - 4A$$

حالا به جای A^2 طبق فرض مسئله $2I + 4A$ می گذاریم:

$$\Rightarrow (2I - A)^2 = 4I + (2I + 4A) - 4A = 6I$$

$$\Rightarrow |(2I - A)^2| = |6I_2| = 6^2 |I| = 216 \times 1 = 216$$

۲۷۸. گزینه ۳ در گام اول اتحاد را ساده می کنیم:

$$(A - I)^2 = A + 3I \Rightarrow A^2 - 2A + I = A + 3I$$

$$\Rightarrow A^2 - 3A = 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A^2 - 3A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 = 4$$

۲۷۹. گزینه ۲ در ابتدا دترمینان A را حساب می کنیم:

$$A^2 = -I \Rightarrow |A^2| = |-I| = -1 \Rightarrow |A|^2 = -1 \Rightarrow |A| = -1$$

و در گام دوم به جای $-I$ در عبارت خواسته شده A^2 می گذاریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{|A+I|}{|A^2 - I|} &= \frac{|A+I|}{|A^2 + A^2|} = \frac{|A+I|}{|A^2(A+I)|} = \frac{|A+I|}{|A^2| \times |A+I|} \\ &= \frac{1}{|A^2|} = \frac{1}{|A|^2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1 \end{aligned}$$

۲۸۰. گزینه ۳ گفتیم که اگر A ماتریس 3×3 باشد، داریم:

$$|kA| = k^3 |A|$$

$$\Rightarrow ||A|A^2| - \frac{2}{|A|} A^2| = |A|^2 \times |A^2| - \frac{2}{|A|} \times |A^2|$$

$$= |A|^2 \times |A|^2 - \frac{2}{|A|} \times |A|^4 = |A|^4 - 2 = 24$$

$$\Rightarrow |A|^4 = 24 \Rightarrow |A| = 2$$

حالا به جای |A| مقدار ۲ قرار می دهیم:

$$\Rightarrow |3A - \frac{2}{|A|} A| = |3A - 2A| = |A| = 2$$

۲۸۱. گزینه ۲ با حساب کردن دترمینان A^3 ، دترمینان A هم حساب می شود:

$$|A^3| = \begin{vmatrix} -2 & x^2+1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 0 = -8$$

$$\Rightarrow |A|^3 = -8 \Rightarrow |A| = -2$$

بنابراین داریم:

$$|\frac{1}{2}A + A| = |-2A + A| = |-A| = |A| = -2$$

۲۸۲. گزینه ۲ در گام اول دترمینان A را حساب می کنیم:

$$|3A| = \begin{vmatrix} 4 & |A| \\ -|A| & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 8 \times |A| = 4(2) + |A|^2$$

$$\Rightarrow |A|^2 - 9|A| + 8 = 0 \Rightarrow (|A| - 1)(|A| - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = 8 \end{cases}$$

در گام دوم $-\frac{1}{4}A$ را حساب می کنیم:

$$|-\frac{1}{4}A| = (-\frac{1}{4})^2 \times |A| = \frac{|A|}{16}$$

که بیشترین مقدار مربوط به $|A| = 8$ و جواب برابر $\frac{1}{2}$ است.

۲۸۳. گزینه ۳ از طرفین تساوی داده شده دترمینان می گیریم:

$$|2A^2| = \begin{vmatrix} |2A| & |A| \\ |A^{-1}| & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 4|A|^2 = \frac{|2A|}{4|A|} \times 1 - \frac{|A|}{1} \times \frac{1}{|A|}$$

$$\Rightarrow 4|A|^2 - 4|A| + 1 = 0 \Rightarrow (2|A| - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2|A| - 1 = 0 \Rightarrow |A| = \frac{1}{2}$$

$$|2A| + 1 = 2^2 \times |A| + 1 = 4(\frac{1}{2}) + 1 = 3$$

در نتیجه داریم:



۲۹۱. گزینه ۳: ماتریس $(\Delta A)(2A^{-1})$ را ساده می‌کنیم:

$$(\Delta A)(2A^{-1}) = 1 \cdot AA^{-1} = 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det((\Delta A)(2A^{-1})) = 1 \cdot 1 = 1$$

از طرفی داریم:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4(1) - (-2)(3)} = \frac{1}{10}$$

و در نتیجه:

$$\text{نسبت دترمینان‌ها: } \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$$

۲۹۲. گزینه ۳: از دو طرف تساوی، دترمینان می‌گیریم:

$$|A^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times A^2| = |A \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}|$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \times |A^2| = |A| \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|A|} \times (2) \times |A|^2 = |A| \times 6 \Rightarrow |A| = 3$$

حالا داریم:

$$|(A^2)^{-1}| = \frac{1}{|A^2|} = \frac{1}{|A|^2} = \frac{1}{9}$$

۲۹۳. گزینه ۲: ابتدا دترمینان A و B را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} |A| = 1(0) - (-1)(2) = 2 \\ |B| = 2(1) - 0(1) = 2 \end{cases}$$

و حالا داریم:

$$|A^2 B^{-1} B^2 A^{-1}| = |A|^2 \times |B^{-1}| \times |B|^2 \times |A^{-1}|$$

$$= |A|^2 \times \frac{1}{|B|} \times |B|^2 \times \frac{1}{|A|} = |A|^2 \times |B| = 4 \times 2 = 8$$

۲۹۴. گزینه ۴: می‌دانیم:

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

حالا از دو طرف، دترمینان می‌گیریم:

$$|(kA)^{-1}| = \left| \frac{1}{k} A^{-1} \right| = \frac{1}{k^2} |A^{-1}| = \frac{1}{k^2 |A|} = \frac{1}{k^2 \times 4}$$

و با ساده کردن داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

رابطه کیلی - همیلتون:

$$\Rightarrow A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$$

طبق رابطه کیلی - همیلتون $|A| = -2$ است و بنابراین داریم:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

۲۹۵. گزینه ۲: می‌دانیم:

$$(A^{-1}BA)^5 = A^{-1}B^5A$$

$$\Rightarrow |(A^{-1}BA)^5| = |A^{-1}| \times |B^5| \times |A| = \frac{1}{|A|} \times |B^5| \times |A|$$

$$= (-64) \times \left(\frac{1}{-2}\right) \Rightarrow |B|^5 = -32 \Rightarrow |B| = -2$$

۲۹۶. گزینه ۱: می‌دانیم:

$$(P^{-1}AP)^6 = P^{-1}A^6P$$

و باید دترمینان بگیریم:

$$\Rightarrow |(P^{-1}AP)^6| = |P^{-1}A^6P| = |P^{-1}| \times |A|^6$$

$$= \frac{1}{|P|} \times |A|^6 \times |P| = |A|^6$$

۲۸۴. گزینه ۱: دترمینان A را برحسب ستون دوم که دوتا صفر دارد می‌نویسیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 3|A| \\ 0 & |A| & 0 \\ -|A| & 0 & -2|A| \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{بسط برحسب}} |A| \times \begin{vmatrix} |A| & 3|A| \\ -|A| & -2|A| \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{|A|}{|A|} \rightarrow 1} 1 = \begin{vmatrix} |A| & 3|A| \\ -|A| & -2|A| \end{vmatrix}$$

$$= -2|A|^2 + 3|A|^2 = |A|^2 \Rightarrow |A|^2 = 1$$

در نتیجه:

$$|A|^2 \times A^4 = |A^4| = |A|^4 = (|A|^2)^2 = 1$$

۲۸۵. گزینه ۱: چون با $A+I$ و $A-I$ کار داریم، پس ضرب آن‌ها را

انجام می‌دهیم که مزدوج است:

$$(A-I) \times (A+I) = A^2 - I = \bar{0} - I = -I$$

$$|(A-I)(A+I)| = |-I|$$

و در نتیجه:

$$\Rightarrow |A-I| \times \frac{|A+I|}{3} = 1 \Rightarrow |A-I| = \frac{1}{3}$$

۲۸۶. گزینه ۲: با توجه به $(A-2I)$ و $(A+2I)$ از ضرب آن‌ها و اتحاد

مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$(A-2I)(A+2I) = A^2 - 4I = \bar{0} - 4I = -4I$$

$$\Rightarrow |(A-2I)(A+2I)| = |A-2I| \times |A+2I| = |-4I|$$

$$= \frac{-64}{-64} \Rightarrow |A+2I| = -\frac{64}{32} = -2$$

۲۸۷. گزینه ۲: از رابطه $A^3 = 2I$ به رابطه $A^3 - I = 2I - I = I$ می‌رسیم و

اتحاد چاق و لاغر می‌زنیم:

$$\Rightarrow A^3 - I = (A-I)(A^2 + A + I)$$

$$\Rightarrow \frac{|A^3 - I|}{2I} = |A-I| \times \frac{|A^2 + A + I|}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2^3}{1} = |A-I| \times 4 \Rightarrow |A-I| = \frac{8}{4} = 2$$

۲۸۸. گزینه ۳: می‌دانیم $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ، پس در ابتدا |A| را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{ماتریس بالامثلی}} |A| = 1 \times 3 \times 1 = 3 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

۲۸۹. گزینه ۳: ابتدا دترمینان A را با بسط، برحسب ستون سوم حساب می‌کنیم:

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 1 \times (3+2) = 5$$

حالا داریم:

$$|(A^2)^{-1}| = |(A^{-1})^2| = |A^{-1}|^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

۲۹۰. گزینه ۲: داریم:

$$|A^{-1}| = 4(1) - 2(3) = -2 \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = -\frac{1}{2}$$

از طرفی می‌دانیم $|kA_{n \times n}| = k^n |A|$ ، پس:

$$||A^{-1}|A| = |-2A| = (-2)^2 |A| = 4|A| = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

و در نهایت $|A|$ را حساب می‌کنیم و به توان ۶ می‌رسانیم:

$$|A| = 2(-2) - (-1)(3) = -1 \Rightarrow |A|^6 = 1$$

رابطه $(A^{-1}BA)^2$ را ساده می‌کنیم و از دو طرف تساوی

$$A + 2I = (A^{-1}BA)^2 = A^{-1}B^2A$$

دترمینان می‌گیریم:

$$\Rightarrow |A + 2I| = |(A^{-1}BA)^2| = |A^{-1}B^2A| = \cancel{|A^{-1}|} |B^2| |A| = |B|^2$$

$$\Rightarrow |A + 2I| = |B|^2$$

حالا $A + 2I$ را حساب می‌کنیم:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A + 2I| = 3 - (-6) = 9 = |B|^2$$

از طرفی مسئله دترمینان $(B^2)^{-1}$ را خواسته، که داریم:

$$|(B^2)^{-1}| = \frac{1}{|B^2|} = \frac{1}{|B|^2} = \frac{1}{9}$$

در گام اول با بسط دترمینان A برحسب ستون دوم داریم:

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 = 3(4 - 2) = 6$$

در گام دوم داریم:

$$|-\frac{1}{3}A^6A^{-1}| = (-\frac{1}{3})^2 |A|^6 \times \cancel{|A^{-1}|}$$

$$= -\frac{1}{27} \times |A|^6 = -\frac{1}{27} \times 6^2 = -8$$

۳۰۰. گزینه ۴ می‌دانیم:

$$|A| \times |3A^{-1} + 2B^{-1}| \times |B| = |A(3A^{-1} + 2B^{-1}) \times B|$$

حالا ماتریس را با پخش کردن ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow A(3A^{-1} + 2B^{-1})B = (3I + 2AB^{-1}) \times B$$

$$= (3B + 2A \underbrace{B^{-1}B}_I) = 3B + 2A$$

پس کافی است ماتریس $3B + 2A$ را حساب کرده و دترمینان بگیریم:

$$\Rightarrow 3B + 2A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A(3A^{-1} + 2B^{-1}) \times B| = |3B + 2A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(7) - 2(6) = 9$$

۳۰۱. گزینه ۳ ابتدا عبارت $A(A^{-1} + B^{-1})B$ را با پخش کردن، ساده

می‌کنیم:

$$\Rightarrow A(A^{-1} + B^{-1})B = (\underbrace{AA^{-1}}_I + AB^{-1})B$$

$$= (I + AB^{-1})B = \underbrace{IB}_{IB} + A \underbrace{B^{-1}B}_I$$

و در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow |A(A^{-1} + B^{-1})B| = |A + B| = 5$$

۳۰۲. گزینه ۴ با توجه به صورت سؤال دو ماتریس $A + I$ و $A - I$ را

در هم ضرب می‌کنیم:

$$(A + I)(A - I) = \underbrace{A^2}_{\vec{O}} - I = -I$$

حالا از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$\Rightarrow \underbrace{|A + I|}_{I} \times |A - I| = |-I| = 1 \Rightarrow |A - I| = \frac{1}{4} = 0.25$$

۳۰۳. گزینه ۲ در ماتریس $I + 2A^{-1}$ یک ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A \times (I + 2A^{-1}) = A + 2I$$

حالا از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$\Rightarrow |A| \times |I + 2A^{-1}| = |A + 2I|$$

$$\xrightarrow{\div |A|} |I + 2A^{-1}| = \frac{|A + 2I|}{|A|}$$

۳۰۴. گزینه ۴ ماتریس I را به صورت AA^{-1} می‌نویسیم:

$$I + ABA^{-1} = AA^{-1} + ABA^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{از چپ از}} A(A^{-1} + BA^{-1})$$

فاکتور می‌گیریم.

و حالا از راست از A^{-1} فاکتور می‌گیریم:

$$\Rightarrow I + ABA^{-1} = A(I + B)A^{-1}$$

$$\Rightarrow |I + ABA^{-1}| = |A(I + B)A^{-1}|$$

$$= |A| \times |I + B| \times \underbrace{|A^{-1}|}_{\frac{1}{|A|}} = |I + B|$$

و در نتیجه $|I + B|$ برابر ۴ است و در نهایت داریم:

$$|(B + I)^2| = |B + I|^2 = 4^2 = 16$$

۳۰۵. گزینه ۱ دو ماتریس A^{-1} و $2A + 2B$ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1}(2A + 2B) = 2 \underbrace{A^{-1}A}_I + 2A^{-1}B = 2I + 2A^{-1}B$$

$$\Rightarrow \underbrace{|A^{-1}|}_{\frac{1}{3}} \times |2A + 2B| = |2I + 2A^{-1}B| \Rightarrow |2I + 2A^{-1}B| = 1$$

۳۰۶. گزینه ۱ ابتدا $A(A - I) = \vec{O}$ را ساده می‌کنیم:

$$A^2 - A = \vec{O} \Rightarrow A^2 = A \xrightarrow{\text{دترمینان می‌گیریم}} |A^2| = |A|$$

$$\Rightarrow |A|^2 = |A| \Rightarrow |A| = 0, 1$$

ولی چون A وارون پذیر است، پس $|A| \neq 0$ و در نتیجه $|A| = 1$ است. حالا

$$2A^2 + 3A = 2(A) + 3A = 5A$$

داریم:

$$\Rightarrow |2A^2 + 3A| = |5A| = 25 |A| = 25$$

و در نتیجه:

$$\Rightarrow |(2A^2 + 3A)^{-1}| = \frac{1}{|(2A^2 + 3A)|} = \frac{1}{25}$$

۳۰۷. گزینه ۳ از سمت راست $A + B$ ماتریس B را فاکتور می‌گیریم:

$$A + B = AI + B = A \underbrace{B^{-1}B}_I + B = (AB^{-1} + I)B$$

و حالا دترمینان ضرب دو ماتریس را می‌نویسیم:

$$\Rightarrow |A + B| = |AB^{-1} + I| \times |B| \Rightarrow 10 = |AB^{-1} + I| \times 2$$

$$\Rightarrow |AB^{-1} + I| = 5$$

۳۰۸. گزینه ۳ عدد a را -1 قرار می‌دهیم (با قراردادن $a = -1$ تمام

گزینه‌ها با هم متفاوت می‌شوند):

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط بر حسب سطر اول}} -1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4 - 3) + (1 - 0) = -1 + 1 = 0$$

و بنابراین ۳ صحیح است.



۳۱۳. گزینه ۱ فرض کنید $a=1$ ، $b=2$ و $c=-1$ باشد، در این صورت مقدار گزینه‌ها برابر صفر، -2 ، 2 و 6 می‌شود که با هم متفاوت‌اند. حالا دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc-a^2 \\ 1 & b & ac-b^2 \\ 1 & c & ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -8$$

ساروس $(2-5+3)-(-6+5+1)=0$

و بنابراین جواب **۱** است.

۳۱۴. گزینه ۴ با انتخاب $x=y=-1$ و $z=0$ هم شرط $y=x+z$ درست می‌شود و هم گزینه‌ها به ترتیب 2 ، -1 و -2 می‌شوند که با هم متفاوت هستند. حالا دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ساروس $(0+1+0)-(0+1+0)=-1$

پس **۳** یعنی $x^2(x+z)$ که با عددگذاری ما همان -1 بود را انتخاب می‌کنیم. **۳۱۵. گزینه ۲** با عددگذاری $a=b=c=1$ تمام گزینه‌ها متفاوت می‌شوند و به ترتیب 3 ، 0 ، 2 و 6 هستند. حالا داریم:

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & b+a \\ a & b & c \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$= (4+4+4)-(4+4+4)=0$

و در نتیجه **۲** جواب است.

تذکره اگر در یک ماتریس دو سطر یا ستون برابر هم (یا ضریبی از هم) باشند، دترمینان همیشه صفر است.

۳۱۶. گزینه ۴ چون گزینه‌ها به b و c بستگی ندارد آن‌ها را صفر می‌گذاریم و برای راحتی محاسبه $a=1$ را هم جای‌گذاری می‌کنیم به این ترتیب گزینه‌ها 3 ، 2 ، -2 و -1 می‌شود:

$$\xrightarrow{\substack{a=1 \\ b=c=0}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c+2 \\ 3a & 2b+2 & 2c+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر سوم}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 1 \times (3-4) = -1$

و جواب **۴** یا همان $-a$ است.

۳۱۷. گزینه ۲ با عددگذاری $a=b=0$ داریم:

$$k = \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 3 & 1 & a \\ 1 & b & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$D = \begin{vmatrix} 2a-2 & 0 & 0 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-2) = 4$$

پس با توجه به گزینه‌ها $k=-2$ و $D=4$ رابطه $D=-2k$ برقرار است.

۳۰۹. گزینه ۲ راه I $x=1$ قرار می‌دهیم و هر دو دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3x & 2x \\ 3x & 2x & 6 \\ 2x & 6 & 3x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

بسط بر حسب سطر اول $6(-30) - 3(-3) + 2(14) = -143$

$$D' = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 6 \\ 9 & 2x & 9 \\ 3x & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 9 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

بسط بر حسب سطر اول $1(-28) - (+9) + 6(30) = 143$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -6^3$$

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 6(36) = 6^3$$

و بنابراین رابطه $D' = -D$ برقرار است.

۳۱۰. گزینه ۲ $a=1$ قرار می‌دهیم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر دوم}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 0 = 1$$

و در بین گزینه‌ها $a^2 = 1^2$ قابل قبول است.

۳۱۱. گزینه ۱ عددهای $a=0$ ، $b=1$ و $c=2$ را جای‌گذاری می‌کنیم و هر دو دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ ac & ab & bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر دوم}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(0-2) = -4$$

$$D' = \begin{vmatrix} a+b & b & ab \\ b+c & c & bc \\ a+c & a & ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر دوم}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(2-0) = 4$$

و بنابراین با توجه به گزینه‌ها رابطه $D' = -D$ برقرار است.

۳۱۲. گزینه ۱ فرض می‌کنیم $a=1$ و $b=-1$ داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4(a+b) \\ 1 & a+1 & a^2(b+2) \\ 1 & b+1 & b^2(a+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{سطر دوم}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6-6=0$$

و تنها **۱** است که با جای‌گذاری $a=1$ و $b=-1$ به جواب صفر می‌رسد.

که با توجه به گزینه‌های مشابه و $k = -44$ و $D = 140$ رابطه $D = -4k - 36$ را قرار است.

۳۲۲. گزینه ۱ با جای گذاری $a = 1$ داریم:

$$k_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0) - (1 \cdot 0 + 0 + 12) = -12$$

$$k_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-12) - 1 \times (-9) + 0 = -3$$

که با توجه به $k_1 = 6$ و $k_2 = -3$ در گزینه‌ها رابطه $k_1 = -2k_2$ را برقرار است.

۳۲۳. گزینه ۲ با جای گذاری $a = b = 0$ داریم:

$$k = \begin{vmatrix} a & b & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{سطر اول} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 3(2 - 1) = 3$$

$$D = \begin{vmatrix} a-2 & b+2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -4 \cdot 8 - 6 \cdot 4 - 8 = -8$$

که با توجه به مقدارهای $k = 3$ و $D = -8$ یعنی رابطه $D = -k - 5$ را برقرار است.

۳۲۴. گزینه ۱ برای عددگذاری $a = b = 0$ را انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & b & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{سطر دوم} \times -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1(5 - 4) = -1$$

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 2 \\ a & b & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{سطر سوم} \times -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -1 \times (10 - 8) = -2$$

که با توجه به مقدارهای $D = -1$ و $D' = -2$ و گزینه‌ها، رابطه $D' = -2D - 4$ را برقرار است.

۳۲۵. گزینه ۴ عددگذاری $a = 0$ و $b = 2$ را در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(2) = 4$$

حالا دترمینان دوم را هم حساب می‌کنیم:

$$B = \begin{vmatrix} b-a & 1 & 0 \\ -b-1 & -1 & 2a \\ a-b & -1 & 2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{سطر اول} \times 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4(1) = 4$$

۳۱۸. گزینه ۲ با عددگذاری $a = 0$ و $b = 1$ داریم:

$$k = \begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a & b & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{سطر اول} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$D = \begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & -3 \\ 2a & 2b & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{سطر اول} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 1 \times (0 + 6) + 1 \times (2 - 4) = 4$$

و با توجه به گزینه‌ها و $k = -2$ و $D = 4$ رابطه $D = -2k$ صحیح است.

۳۱۹. گزینه ۳ مقدار $a = 0$ را جای گذاری می‌کنیم و دترمینان‌ها را

حساب می‌کنیم:

$$k = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ a & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1 - 20) + 1(15 - 4) = -24$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2a & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4(1 - 20) + 3(15 - 4) = -34$$

که با توجه به گزینه‌ها رابطه $D = 2k + 14$ را برقرار است.

۳۲۰. گزینه ۲ عددگذاری $a = 1$ و $b = c = 0$ را انجام می‌دهیم:

$$k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1 - 2) = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2a+1 & 2b & 2c \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{سطر دوم} \times -3 \times \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times (8 + 4) = -36$$

و با مقایسه $k = -3$ و $D = -36$ در گزینه‌ها رابطه $D = 8k - 12$ صحیح است.

۳۲۱. گزینه ۲ با جای گذاری $a = 0$ داریم:

$$k = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1) - 3(14) = -44$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 4 & a+1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{سطر اول} \times 6 \times \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 6(28) - 4(-2) + (-36) = 140$$



۳.۳۲. گزینه ۳ می‌دانیم $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ و در نتیجه:

$$((A-I)^{-1})^T = ((A-I)^T)^{-1} = (A^T - I + I)^{-1}$$

و به جای A^T ماتریس $2A - I$ می‌گذاریم:

$$\Rightarrow ((A-I)^{-1})^T = (2A - I - I + I)^{-1} = (-I)^{-1} = -I$$

۳.۳۳. ابتدا عبارت را از چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times A^{-1}} I + 2A^{-1}B = 3 \underbrace{A^{-1}A}_I B = 3B$$

و حالا از راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$B^{-1} + 2A^{-1} \underbrace{BB^{-1}}_I = 3 \underbrace{BB^{-1}}_I \Rightarrow B^{-1} + 2A^{-1} = 3I$$

۳.۳۴. دستگاه معادلات را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} -y + 2(2) = -1 \Rightarrow y = 5 \\ y + 2x - 2 = 1 \end{cases}$$

و $y = 5$ را در معادله دوم جایگزین می‌کنیم و x را حساب می‌کنیم:

$$5 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow x + y = -1 + 5 = 4$$

و در نهایت:

۳.۳۵. گزینه ۳ می‌دانیم در ضرب ماتریس‌های 2×2 AB و BA ,

دترمینان‌ها برابر و جمع درایه‌های قطر اصلی هم با هم برابر است:

$$\Rightarrow x + y = 1 + 2 = 3$$

۳.۳۶. گزینه ۲ در گام اول داریم:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{|A^{-1}|} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

$$\text{و در نتیجه: } \frac{3}{|A^{-1}|} |A| = |9A| = 9^3 \times |A| = 9^3 \times 3 = 9^6 \times 3 = 3^7$$

۳.۳۷. گزینه ۲ در گام اول $|B|$ را از دو رابطه حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} |B| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & |A| \end{vmatrix} = 5|A| + 4 \\ A^{-1}B = 3I \Rightarrow \frac{1}{|A|} |B| = 9|I| = 9 \Rightarrow |B| = 9|A| \end{cases}$$

در گام دوم این دو معادله را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow 5|A| + 4 = 9|A| \Rightarrow 4|A| = 4 \Rightarrow |A| = 1$$

$$|A^3| = |A|^3 = 1^3 = 1$$

و در نتیجه

۳.۳۸. گزینه ۲ اگر $a = b = 0$ قرار دهیم از دترمینان اول $k = 0$

به دست می‌آید و تمام گزینه‌ها یکی می‌شود که مناسب نیست. پس $a = 1$ و

$b = 0$ انتخاب می‌کنیم:

$$k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر دوم}]{\text{سطر برحسب}} -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

و همین‌طور با جای‌گذاری $a = 1$ و $b = 0$ دترمینان دوم را هم حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{برحسب ستون دوم}]{\text{دترمینان}} -1 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

حالا در گزینه‌ها $k = 4$ را جایگزین می‌کنیم و گزینه‌ای درست است که به ما

-8 بدهد که جواب $-2k$ و (2) است.

حالا در گزینه‌ها $A = 4$ و $b = 2$ را جایگزین می‌کنیم و تنها (4) که به صورت $B = \frac{2}{b}A$ است، جواب مسئله است.

۳.۲۶. گزینه ۱ با جای‌گذاری $a = 7$ و $b = c = 0$ داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{پایین‌مثلثی}} 12 \times 5 \times 5 = 12 \times 5^2$$

حالا داریم:

$$|\Delta A_{3 \times 3}^{-1}| = \Delta^3 |A^{-1}| = \Delta^3 \times \frac{1}{|A|} = \frac{\Delta^3}{12 \times 5^2} = \frac{5}{12}$$

۳.۲۷. گزینه ۳ مجموع تمام داده‌ها برابر $6 = 3(a + b + c + x)$ است و

$$a + b + c + x = 2$$

در نتیجه:

حالا برای راحتی کار $b = c = 0$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{پایین‌مثلثی}} \begin{vmatrix} a+x & a & a \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{پایین‌مثلثی}} 2x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

۳.۲۸. گزینه ۱ مرتبه ماتریس $n \times n$ است. پس ماتریس n ستون دارد و

منظور از درایه سطر اول و ستون آخر، a_{1n} است. بنابراین داریم:

$$a_{1n} = 1 + n - 1 = n, a_{23} = 2 + 3 - 1 = 4$$

$$\frac{a_{1n}}{a_{23}} = 2 \Rightarrow \frac{n}{4} = 2 \Rightarrow n = 8$$

در نتیجه:

یعنی مرتبه ماتریس 8×8 است و مسئله از ما a_{82} را خواسته که کافی است در

فرمول درایه عمومی جای‌گذاری کنیم:

$$a_{82} = 8 + 2 - 1 = 9$$

۳.۲۹. گزینه ۳ ضرب دو ماتریس را می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3a \\ 4 & 2 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 0, \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

و داریم:

۳.۳۰. گزینه ۴ در گام اول، ماتریس A را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم.}]{\text{به توان ۲}} A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A = 5I$$

۳.۳۱. گزینه ۳ در هر سطر یا ستون ماتریس اسکالر، فقط یک عدد روی

قطر اصلی داریم و چون در مسئله این عدد را ۳ داده است، پس ماتریس به

$$\text{صورت } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ یا همان ماتریس } 3I \text{ است. حالا ماتریس } A^3 \text{ همان } 27I$$

است که دوباره در هر سطر یا هر ستون فقط یک عدد ۲۷ دارد و جمع درایه‌های

ستون دوم A^3 هم ۲۷ می‌شود:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$