



ریاضی و آمار ۱

پایه دهم
رشته علوم انسانی

مؤلف
مهندس امیر زراندوز

فرمول بیست

با سلام خدمت شما بچه‌های خوب رشته انسانی

چون ما، یعنی شخص خودم و مجموعه گاج، بچه‌های انسانی رو خیلی خیلی دوست داریم همیشه سعی می‌کنیم کتابای خوب و به درد بخور براشون بنویسیم. نمونش همین کتابیه که الان دستتونه.

اولاً: تمام مطالب کتابی درسی رو پوشش دادیم و کلی سؤال مشابه مسائل، مثال‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی براتون شبیه‌سازی کردیم؛ یعنی محاله سؤالی در امتحان مطرح بشه که در این کتاب خودش رو یا شبیهش رو ندیده باشین.

ثانیاً: حجم کتاب رو الکی زیاد نکردیم.

ثالثاً: چند دوره امتحان نهایی و تألیفی در آخر کتاب براتون آوردیم که بتونید سؤالاً رو به صورت ترکیبی و یک‌جا ببینید.

ویژگی مهم و خیلی باحال این کتاب اینه که فیلم‌های آموزشی مخصوص امتحانات تشریحی بهش اضافه شده؛ یعنی شما دیگه لازم نیست هزینه‌ای بابت معلم خصوصی پرداخت کنید.

پس حالا که من و گاج این همه زحمت کشیدیم و یک کتاب خاص براتون گردآوری کردیم، شما هم سعی کنید با خوب خوندن این کتاب و گرفتن نمره کامل ما رو خوشحال کنید. ضمناً اگه اشتباه یا خطایی در کتاب دیدین لطفاً با اینجانب در فضای مجازی مطرح کنید.

@Amir_Zarandooz_2

به امید رسیدن شما به هرچی آرزوی خوبه

امیر زاراندوز

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سؤالات
110 min	۹۲	۶ تا ۳۲
72 min	۱۰۴	۵۷ تا ۳۳
45 min	۱۱۶	۷۵ تا ۵۸
18 min	۱۲۴	۷۶ تا ۹۰

فصل اول: معادله درجه دوم

فصل دوم: تابع

فصل سوم: کار با داده‌های آماری

فصل چهارم: نمایش داده‌ها

بارم‌بندی درس ریاضی و آمار ۱

نوبت دوم	نوبت اول	شماره فصل
۵	۱۰	اول
۶	۱۰	تا صفحه ۶۲
	-	صفحه ۶۲ به بعد
۵	-	دوم
۵	-	سوم
۴	-	چهارم

امتحان نهایی



۱۳۲	آزمون ۱
۱۳۳	آزمون ۲
۱۳۴	آزمون ۳
۱۳۶	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۳
۱۳۸	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۴

1

بخش



درستنامه

و سوالات تشریحی

فصل اول

معادله درجه دوم

۱

ریاضی و آمار دهم

فصل اول ریاضی و آمار ۱، در امتحان نوبت اول، ۱۰ نمره و در نوبت دوم ۵ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون معادله درجه اول، معادله درجه دوم، معادلات شامل عبارت‌های گویا و کاربردهای آن‌ها در حل مسائل توصیفی مطرح شده است.

بسته ۴

بسته ۳

بسته ۲

بسته ۱

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-code های مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

یادآوری (اتحادها، تجزیه، عبارت‌های گویا)

بسته صفر



الف اتحادهای جبری

اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 اتحاد مزدوج $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
 اتحاد جمله مشترک $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

یادآوری بچه‌های عزیز، اتحادها و تجزیه عبارت‌های جبری را در سال‌های قبل خوانده‌اید، ولی چون در بعضی از قسمت‌ها به آن‌ها نیاز داریم مجدداً آن‌ها را یادآوری می‌کنیم.

سؤال حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

۴ $(10x + 1)(10x + 6)$

۳ $(x - 3)(x + 8)$

۲ $(\frac{\sqrt{y}}{2} - 4)(\frac{\sqrt{y}}{2} + 4)$

۱ $(\sqrt{5}x - \frac{3}{\sqrt{5}}y)^2$

پاسخ ۱

$$(\sqrt{5}x - \frac{3}{\sqrt{5}}y)^2 = (\sqrt{5}x)^2 - 2(\sqrt{5}x)(\frac{3}{\sqrt{5}}y) + (\frac{3}{\sqrt{5}}y)^2 = 5x^2 - 6xy + \frac{9}{5}y^2$$

● توجه کنید که در عبارت‌های $(\sqrt{5}x)^2$ و $(\frac{3}{\sqrt{5}}y)^2$ توان ۲ را به تمام اجزاء داخل پرانتزها می‌دهیم، ضمناً رادیکال‌ها فرجه ۲ دارند پس وقتی به توان ۲ می‌رسند از بین می‌روند:

$$(\sqrt{5}x)^2 = (\sqrt{5})^2 \cdot (x)^2 = 5x^2$$

$$(\frac{3}{\sqrt{5}}y)^2 = \frac{3^2}{\sqrt{5}^2} \times y^2 = \frac{9}{5}y^2$$

در عبارت $2(\sqrt{5}x)(\frac{3}{\sqrt{5}}y)$ عدد $\sqrt{5}$ در صورت و مخرج را باهم خط می‌زنیم:

$$2(\sqrt{5}x)(\frac{3}{\sqrt{5}}y) = 2 \times 3 \times x \times y = 6xy$$

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - 4\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + 4\right) = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 4^2 = \frac{7}{4} - 16 = \frac{-57}{4}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 a b a b

۲

جمله مشترک

$$(x-3)(x+8) = x^2 + (-3+8)x + (-3)(8) = x^2 + 5x - 24$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 a b

۳

$$(1 \cdot x + 1)(1 \cdot x + 6) = (1 \cdot x)^2 + (1+6)(1 \cdot x) + (1)(6) = 1 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 6$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 a b

جمله مشترک

۴

$$A = (x^2 - 3x)^2 - (x^2 + 3x)^2$$

سؤال حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

پاسخ حاصل تک تک پرانتزها را به کمک اتحادهای مربع دو جمله حساب کرده و سپس جوابها را از هم کم می‌کنیم:

$$(x^2 - 3x)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(3x) + (3x)^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 a b

در عبارت $2(x^2)(3x)$ ابتدا ۲ را در ۳ ضرب می‌کنیم که می‌شود ۶ و سپس x^2 را در x ضرب می‌کنیم که می‌شود x^3 پس جواب عبارت برابر $6x^3$ شد.

$$(x^2 + 3x)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(3x) + (3x)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 a b

$$\Rightarrow A = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) - (x^4 + 6x^3 + 9x^2) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - x^4 - 6x^3 - 9x^2 = -12x^3$$

ب تجزیه عبارت‌های جبری

مفهوم تجزیه: منظور از تجزیه یک عبارت جبری این است که آن عبارت را به حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر با درجه کم‌تر تبدیل کنیم. این کار را به کمک فاکتورگیری، اتحادها و ... انجام می‌دهیم. به هر یک از جملات حاصل از تجزیه، یک عامل یا مقسوم‌علیه عبارت اصلی می‌گوییم. مثلاً وقتی می‌نویسیم $x^2 - 5x = x(x - 5)$ به عبارت‌های x و $x - 5$ عوامل (مقسوم‌علیه‌های) $x^2 - 5x$ می‌گوییم. یعنی $(x^2 - 5x)$ هم بر x و هم بر $x - 5$ بخش پذیر است. به کمک روش‌های زیر، عبارت‌های جبری را تجزیه می‌کنیم:

روش فاکتورگیری

اگر دو یا چند جمله که بین آن‌ها علامت جمع یا تفریق وجود دارد دارای عامل مشترکی باشند، آن عامل را از دل آن جملات بیرون می‌کشیم. توجه کنید اگر دو عدد مثل ۲۰ و ۱۰ دیدیم از عدد ۱۰ فاکتور می‌گیریم چون ۲۰ بر ۱۰ بخش پذیر است یا اگر دو عبارت مثل x^2 و x^3 دیدیم از x^2 فاکتور می‌گیریم چون توانش کوچک‌تر است. به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال ۱ $4ab^5 - 18a^2b = 2ab(2b^4 - 9a)$

$$\frac{4ab^5}{2ab} = 2b^4 \quad \frac{18a^2b}{2ab} = 9a$$

عامل مشترک

مثال ۲ $(x - 6y)^2 - 7(x - 6y) = (x - 6y)[(x - 6y) - 7]$

عامل مشترک

مثال ۳ $12x^4(x^2 - 5)^2 + 3x^3(x^2 - 5)^2 = 3x^3(x^2 - 5)^2[4x + (x^2 - 5)]$

عامل مشترک

استار در مثال اول من نفهمیدم چرا از $2ab$ فاکتور گرفتین. میشه یه کوهولو توضیح بدین لطفاً!

اول به عددها ننگه کن ۱۸ و ۴ هر دو تا شون بر ۲ بخش پذیرن پس از ۲ فاکتور می‌گیریم حالا به سراغ حروف میریم بین a^2 و a از a فاکتور می‌گیریم چون توانش کمتره در مورد b و b^5 به همین شکل عمل می‌کنیم یعنی از b فاکتور می‌گیریم لذا در کل از $2ab$ فاکتور گرفته ایم.

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

اگر بین دو جمله (که معمولاً مربع کامل هستند) علامت منفی وجود داشته باشد، از رابطه $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ برای تجزیه عبارت استفاده می‌کنیم:

مثال ۱ $x^2 - 100 = (x - 10)(x + 10)$

↓ جذر
↓ جذر
x 10

مثال ۲ $25x^2 - 3 = (\Delta x - \sqrt{3})(\Delta x + \sqrt{3})$

↓ جذر
↓ جذر
 Δx $\sqrt{3}$

مثال ۳ $(x - 3)^2 - 64 = [(x - 3) - 8][(x - 3) + 8] = (x - 11)(x + 5)$

↓ جذر
↓ جذر
x - 3 8

سؤال عبارت $x^5 - 81x$ به کدام عبارت زیر بخش پذیر نیست؟

$x^2 - 3$ ۴

$x - 3$ ۳

$x^2 + 9$ ۲

x ۱

پاسخ گزینه «۴». عبارت $(x^5 - 81x)$ را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که عبارت موجود در کدام گزینه، در تجزیه شده آن مشاهده نمی‌شود.

$$x^5 - 81x = x(x^4 - 81) = x(x^2 - 9)(x^2 + 9) = x(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

فاکتور از x اتحاد مزدوج اتحاد مزدوج

پس از بین عبارت‌های داده شده، جواب مورد نظر، عبارت $(x^2 - 3)$ است، چون در عوامل تجزیه $(x^5 - 81x)$ عامل $(x^2 - 3)$ مشاهده نمی‌شود.

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

از این اتحاد وقتی استفاده می‌کنیم که ۳ جمله داشته باشیم و حداقل یکی از آن‌ها مربع کامل باشد. این اتحاد به صورت زیر است:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

شکل کلی‌تر این اتحاد

$$(b + \text{جمله مشترک})(a + \text{جمله مشترک}) + a \times b = (a + b) \times (\text{جمله مشترک}) + (\text{جمله مشترک})^2$$

به عنوان مثال می‌خواهیم $(x^2 + 2x - 35)$ را تجزیه کنیم. جمله مشترک x است چون x و x^2 وجود دارد. اکنون به دنبال دو عدد a و b می‌گردیم به طوری که ضربشان ۳۵ و جمع یا تفریقشان ۲ شود (فعلاً به علامت‌ها فکر نکنید)، دو عدد مورد نظر عبارتند از ۷ و ۵ چون ضربشان ۳۵ و تفریقشان ۲ می‌شود:

$$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$$

جمله مشترک ← جمله مشترک

تذکر همیشه حواستان باشد که عدد بزرگ‌تر را در پرانتز اول قرار دهید.

مثال ۱ $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$ هر پرانتز، خودش اتحاد مزدوج است → عبارت $= (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$

جمله مشترک x^2 است، چون x^2 و x^4 وجود دارد.

مثال ۲ $x^3 - 10x^2 + 24x = x(x^2 - 10x + 24) = x(x - 6)(x - 4)$

تجزیه با جمله مشترک فاکتور از x

نکته گاهی اوقات یک سه جمله‌ای به ماداده می‌شود که در آن ضرب x^2 عددی مربع کامل به جز یک است (مثل ۹، ۱۶، ۲۵ و...)، در این موارد برای تجزیه

این سه جمله‌ای، کافی است از جمله شامل x^2 جذر گرفته تا جمله مشترک معلوم شود، سپس این جمله مشترک را از درون جمله دیگر که شامل x است،

بیرون می‌کشیم. به عنوان مثال می‌خواهیم عبارت $9x^2 + 18x + 8$ را تجزیه کنیم؛ ۹ مربع کامل است، حال می‌گوییم جذر $9x^2$ می‌شود $3x$ ، پس $3x$

جمله مشترک است و باید $18x$ را نیز طوری بنویسیم که در آن $3x$ مشاهده شود، یعنی $18x = 6(3x)$ ، حالا به کمک اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$9x^2 + 18x + 8 = (3x)^2 + 6(3x) + 8 = (3x + 4)(3x + 2)$$

جمله مشترک

استار زرانروز آفرشو میشه یکم بیشتر باز کنیر!

پرا که نه، ببین شاگرد قویم جمله مشترک که $3x$ شد پس اونو توی پرانتزها نوشتیم حالا دو تا عدد می‌فوییم که ضربشون بشه ۸ و جمع یا تفریقشون بشه ۶ که این دو عدد ۴ و ۲ هستن پس این طوری نوشتیم:

$$\text{عبارت} = (3x + 4)(3x + 2)$$

سؤال عبارت $25x^2 + 30x - 7$ را تجزیه کنید.

پاسخ ضرب x^2 یعنی ۲۵ مربع کامل است جذر $25x^2$ برابر می‌شود با $5x$ پس متوجه می‌شویم که $5x$ باید جمله مشترک باشد، لذا $30x$ را به صورت $6(5x)$ می‌نویسیم تا $5x$ را دوباره تکرار کرده باشیم:

$$25x^2 + 30x - 7 = (5x)^2 + 6(5x) - 7 = (5x + 7)(5x - 1)$$

ملاحظه می‌کنید که ضرب $+7$ و -1 می‌شود -7 و جمع $+7$ و -1 می‌شود 6 .

تجزیه به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای

اگر سه جمله‌ای ما به شکل $a^2 + 2ab + b^2$ بود، تجزیه شده‌اش برابر با $(a + b)^2$ و اگر به شکل $a^2 - 2ab + b^2$ بود، تجزیه شده‌اش به صورت $(a - b)^2$ خواهد بود. به عبارت دیگر اگر سه جمله داشتیم که دو تای آن‌ها مربع کامل بودند و سومی، ۲ برابر ضرب جذرهای دو جمله مربع کامل بود، از اتحادهای مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم. البته همیشه می‌توانید به جای استفاده از این دو اتحاد، از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه سه جمله‌ای‌ها استفاده کنید.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

مثال ۱ $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

جذر x^2 $\downarrow$ x

جذر 25 $\downarrow$ 5

جذر آخری (جذر اولی) $2 = 2 \times x \times 5 = 10x$

مثال ۲ $4t^2 + 12tz + 9z^2 = (2t + 3z)^2$

جذر $4t^2$ $\downarrow$ $2t$

جذر $9z^2$ $\downarrow$ $3z$

جذر آخری (جذر اولی) $2 = 2(2t)(3z) = 12tz$

سؤال عبارت $9x^4 - 6x^3 + x^2$ پس از تجزیه به شکل $x^k(mx - n)^f$ تبدیل شده است، مقادیر m, n, f و k را به دست آورید.

پاسخ همیشه قبل از این که سراغ اتحادها بروید دقت کنید که آیا می‌توانیم از فاکتورگیری استفاده کنیم یا نه:

$$9x^4 - 6x^3 + x^2 = x^2(9x^2 - 6x + 1) = x^2(3x - 1)^2 = x^k(mx - n)^f \Rightarrow k = 2, m = 3, n = 1, f = 2$$

فاکتور از x^2

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای

دو طرف را مقایسه می‌کنیم

تک تک اجزاء باید با هم مساوی باشند.

محاسبه ک.م.م عبارت‌های جبری

برای این منظور ابتدا عبارت‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم. ک.م.م آن‌ها عبارت است از حاصل ضرب عامل‌های مشترک با توان بیش‌تر در عامل‌های غیرمشترک. به عنوان نمونه به عبارت‌های روبه‌رو توجه کنید:

$$A = 2 \times x^3 \times (x - 5)$$

$$B = 2^4 \times x^2 \times (x + 6)$$

عوامل مشترک A و B عبارتند از x و ۲ ولی باید توان‌های بزرگ‌تر آنها را انتخاب کنیم یعنی فعلاً $x^3 \times 2^4$ را انتخاب می‌کنیم.

عوامل غیرمشترک A و B عبارتند از $(x - 5)$ و $(x + 6)$ پس ضرب آنها یعنی $(x + 6)(x - 5)$ را انتخاب می‌کنیم.

حالا ک.م.م برابر می‌شود با:

$$B \text{ و } A \text{ ک.م.م} = 2^4 \times x^3 \times (x + 6)(x - 5)$$

البته ممکن است سر امتحان به جای $۲^۴$ عدد ۱۶ را به شما بدهند که خودتان باید آن را تجزیه کرده و به صورت $۲^۴$ بنویسید پس به طور خلاصه می توان گفت برای محاسبه ک.م.م، همه عامل ها رو در هم ضرب می کنیم و از توان های بزرگتر استفاده می کنیم.

میدونم هر رقم یه کم مسافره ست ولی ما تفریه عردها رو یادمون رفته!



شما هر سوالی داری راحت بپرس، در تفریه عردها باید اونها را فقط به اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۵۳، ۵۹، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹، ۹۷ تقسیم کنیم تا به ۱ برسیم مثلاً:

۹۶	۲
۴۸	۲
۲۴	۲
۱۲	۲ $\Rightarrow ۹۶ = ۲^۵ \times ۳$
۶	۲
۳	۳
۱	

به عنوان مثال می خواهیم ک.م.م عبارت های $x^۳ + ۸x^۲ + ۱۵x$ و $x^۴ + ۲x^۳ - ۳x^۲$ را به دست آوریم ابتدا آن ها را تجزیه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x^۴ + ۲x^۳ - ۳x^۲ &= x^۲(x^۲ + ۲x - ۳) = x^۲(x+۳)(x-۱) \\ x^۳ + ۸x^۲ + ۱۵x &= x(x^۲ + ۸x + ۱۵) = x(x+۵)(x+۳) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = x^۲(x+۳)(x-۱)(x+۵)$$

عوامل مشترک با توان بزرگتر عوامل غیر مشترک

سؤال ک.م.م دو عبارت $x^۴ - ۷x^۳ + ۱۰x^۲$ و $۲۰x^۴(x^۲ - ۲۵)$ را به دست آورید.

پاسخ همان طور که گفتیم ابتدا دو عبارت را تا حد امکان تجزیه می کنیم، سپس عوامل مشترک با توان بزرگ تر را در عوامل غیر مشترک ضرب می کنیم.

$$x^۴ - ۷x^۳ + ۱۰x^۲ = x^۲(x^۲ - ۷x + ۱۰) = x^۲(x-۵)(x-۲)$$

تجزیه با جمله مشترک فاکتور از $x^۲$

$$۲۰x^۴(x^۲ - ۲۵) = ۲۰x^۴(x-۵)(x+۵)$$

تجزیه با اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow \text{ک.م.م} = x^۴ \times (x-۵) \times ۲۰ \times (x+۵)(x-۲) = ۲۰x^۴(x-۵)(x+۵)(x-۲)$$

عوامل مشترک با توان بزرگتر عوامل غیر مشترک

پ عبارت های گویا

تعریف هر کسری که صورت و مخرج آن دو چند جمله ای باشد، عبارت گویا نام دارد. مانند عبارت های $\frac{x^۲+۶x+۳}{۵}$ و $\frac{\sqrt{۳}x+۱}{۲x}$ ، $\frac{۵x^۲-۳x}{x+۶}$ ، $\frac{۲}{x}$ ولی عبارت های $\sqrt{x}$ ، $\frac{۳\sqrt{x}}{y-۲t}$ ، $\frac{|x-۱|}{x^۲+۵}$ و $\frac{x+۲}{\sqrt{y}-t}$ گویا نیستند. چون در آن ها متغیر، زیر رادیکال یا داخل قدر مطلق قرار دارد.

بامعنی یا بی معنی بودن عبارت گویا

می دانید اگر مخرج یک کسر صفر باشد، حاصل آن کسر، تعریف نشده است. مثلاً کسر $\frac{x-۱}{x-۲}$ به ازای $x=۲$ تعریف نشده است چون عدد ۲ باعث صفر شدن مخرج می شود. پس برای یافتن نقاطی که باعث می شوند یک عبارت گویا، بی معنی باشد کافی است مخرج آن را مساوی صفر قرار داده و مقدار یا مقادیر متغیر را به دست آوریم.

سؤال عبارت های گویای زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده اند؟

۳ $\frac{k^۲-۷}{k^۲-۲۵}$

۲ $\frac{۱۰x^۴-۳x^۲+۱}{۵\sqrt{۲}}$

۱ $\frac{۵t-۱}{۳t-۲}$

۵ $\frac{x^۲-۷}{(x-۱)(x-۲)}$

۴ $\frac{x-۱}{x^۲+۴}$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow 3t - 2 = 0 \Rightarrow 3t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

پاسخ ۱

۲ مخرج اصلاً متغیری ندارد. پس کسر مورد نظر، همیشه تعریف شده است.

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow k^2 - 25 = 0 \Rightarrow k^2 = 25 \xrightarrow{\text{جذر}} k = \pm 5 \quad (\text{وقتی از دو طرف معادله جذر می‌گیرید علامت‌های } \pm \text{ یادتون نره})$$

۳

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \text{کسر داده شده، همواره تعریف شده است.}$$

۴

این معادله جواب ندارد، چون حاصل x^2 نمی‌تواند منفی شود. (یا همیشه گفت از عدد -4 همیشه جذر گرفت)

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \xrightarrow[\text{صفر قرار می‌دهیم.}]{\text{تک تک پرانتزها را مساوی}} \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

۵

ساده کردن عبارت‌های گویا

برای این کار، صورت و مخرج را تا حد امکان به کمک فاکتورگیری و یا اتحادها تجزیه کرده، سپس عامل یا عامل‌های مشترک صورت و مخرج را خط می‌زنیم.

سؤال عبارت‌های گویای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 35x}{(x^2 - 25)(x^2 - 49)} \quad ۳$$

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x - 10} \quad ۲$$

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 49} \quad ۱$$

پاسخ

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 49} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)(x+7)} = \frac{x-7}{x+7}$$

۱

تجزیه با اتحاد مزدوج

فاکتور از x

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x - 10} = \frac{x(x-5)}{(x-5)(x+2)} = \frac{x}{x+2}$$

۲

تجزیه با اتحاد جمله مشترک

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 35x}{(x^2 - 25)(x^2 - 49)} = \frac{x(x^2 - 2x - 35)}{(x-5)(x+5)(x-7)(x+7)} = \frac{x(x-7)(x+5)}{(x-5)(x+5)(x-7)(x+7)} = \frac{x}{(x-5)(x+7)}$$

فاکتور از x تجزیه با اتحاد مزدوج

۳

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا

برای انجام ضرب یا تقسیم عبارت‌های گویا، ابتدا تمام صورت و مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم، سپس عامل یا عامل‌های مشترک را از صورت و

مخرج‌ها ساده می‌کنیم، ضمناً همیشه عمل تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$$

$$\text{مثال ۱} \quad \frac{x^2 - 16}{3x + 6} \times \frac{x^2 + x - 2}{x - 4} = \frac{(x-4)(x+4)}{3(x+2)} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x-4} = \frac{(x+4)(x-1)}{3}$$

$$\text{مثال ۲} \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} \div \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 4x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)} \times \frac{2x(x+2)}{(x+2)(x-1)} = 2$$

فاکتور از x فاکتور از $2x$

$$\text{مثال ۳} \quad \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \times \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)} \times \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

برای این منظور، ابتدا در صورت امکان هر کسر را جداگانه ساده می‌کنیم (همهٔ صورت و مخرج‌ها را تجزیه کرده، عامل یا عوامل مشترک را در هر کسر، جداگانه ساده می‌کنیم)، سپس بین تمام کسرها مخرج مشترک می‌گیریم (مخرج مشترک همان ک.م.م. است).

مثال ۱ $\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+7}{x^2+10x+21} = \frac{\cancel{x-3}}{(x-\cancel{3})(x+3)} + \frac{\cancel{x+7}}{(x+\cancel{7})(x+3)} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+3}$

مثال ۲ $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2) - (x+1)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x^2-4 - (x^2-2x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}+2x+3}{(x-3)(x+2)} = \frac{2x-1}{(x-3)(x+2)}$

مخرج‌ها $(x-3)$ و $(x+2)$ هستند که قابل تجزیه نیستند و هیچ عامل مشترکی هم ندارند پس ک.م.م. آن‌ها برابر با ضربشان شده است.

مثال ۳ $\frac{4}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{4(x-1) + x.x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{4x-4+x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+4x-4}{x(x-1)(x+1)}$

سؤال کدام عبارت گویا را از $\frac{2}{x-2}$ کم کنیم تا حاصل برابر با $\frac{2x}{x^2-4}$ شود؟

پاسخ اگر عبارت خواسته شده را A بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{2}{x-2} - A = \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = A \Rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{2x}{(x-2)(x+2)} = A$$

مخرج مشترک می‌گیریم $\rightarrow \frac{2(x+2) - 2x}{(x-2)(x+2)} = A \Rightarrow A = \frac{2x+4-2x}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$

سؤال حاصل عبارت مقابل را به ساده‌ترین شکل به دست آورید.

$$A = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}$$

پاسخ یک خط کسری بزرگ مشاهده می‌کنیم که در صورت و مخرج آن، کسرهای کوچک‌تری وجود دارند که بین آن‌ها جمع و تفریق می‌بینیم پس اول این جمع و تفریق‌ها را حساب کرده سپس، کسر حاصل را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{1-x+x(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{1-x+x(1+x)}{1+x-x(1-x)} = \frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}+x^2}{1+\cancel{x}-\cancel{x}+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$$

استاد در ابتدای حل، شما پیوری اون دوتا عبارت رو باهم فط زدن! مگه میشه؟

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

بله که میشه، در کسرها دقت کن که همیشه کارهای زیر رو کرد؛

در واقع شما آله قاعده دور در دور، نزدیک در نزدیک رو انجام بدی به همین نتایج میرسی.

معادلهٔ درجه اول و کاربرد آن در مسائل توصیفی

صفحهٔ ۱۰ تا ۱۸ کتاب درسی

بسته اول

الف معادلهٔ درجه اول

تعریف هر معادله که پس از ساده شدن به شکل $ax + b = 0$ تبدیل شود، یک معادلهٔ درجه اول نام دارد. جواب این معادله از رابطهٔ $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید (a و b دو عدد حقیقی اند و $a \neq 0$ است). مثلاً معادلات $7x - 3 = 0$ و $\frac{2x-1}{5} = x+2$ درجه اول هستند. ولی معادلهٔ $\frac{1}{x} - 3 = 2x$ درجه اول نیست چون x در مخرج وجود دارد یا معادله $2x = \sqrt{x-1}$ درجه اول نیست چون x زیر رادیکال است. با حل معادلهٔ درجه اول، در سال‌های قبل آشنا شده‌اید و می‌دانید مجهول‌ها را به یک طرف معادله و اعداد را هم به طرف دیگر می‌بریم پس از ساده کردن دو طرف، عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم. پس فقط به ذکر چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ $\underbrace{(x-3)(x+2)}_{\text{ضرب می‌کنیم}} = x^2 - 8x + 6$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - 8x + 6 \Rightarrow -x + 8x = 6 + 6 \Rightarrow 7x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

مثال ۲ $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} = 5$ $\xrightarrow{\text{مخرج مشترک در سمت چپ}} \frac{2x - 3(x+1)}{6} = 5$

$\Rightarrow \frac{2x - 3x - 3}{6} = 5 \Rightarrow \frac{-x - 3}{6} = 5 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -x - 3 = 30 \Rightarrow -x = 30 + 3 \Rightarrow -x = 33 \Rightarrow x = -33$

استار من او مدرم به پای مفرج مشترک گرفتن، تمام جملات رو در ۶ ضرب کردم تا مفرجها از بین برن روش من درسته یا نه؟



بله درسته و اتفاقاً روش خوبی هم هست:

ضرب و سازه می کنیم
 $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} = 5 \Rightarrow \frac{2}{6}(\frac{x}{3}) - \frac{3}{6}(\frac{x+1}{2}) = 6(5)$

$\Rightarrow 2x - 3(x+1) = 30 \Rightarrow 2x - 3x - 3 = 30 \Rightarrow -x = 33 \Rightarrow x = -33$

$\frac{2x+1}{5} - \frac{x}{10} = 2$

سؤال معادله درجه اول مقابل را حل کنید.

پاسخ از روش مخرج مشترک هم می توان استفاده کرد ولی بهتر است تمام جملات را در ۱۰ ضرب کنیم تا مخرج ها ناپدید شوند (حالا به نفر آکه بگه من همه جملات رو در ۱۰ ضرب می کنم اونم درسته ولی چون ۱۰ بر ۵ بخش پذیره بهتره که همه رو در ۱۰ ضرب کنیم):

$10(\frac{2x+1}{5} - \frac{x}{10}) = 10(2) \Rightarrow 2(\frac{2x+1}{5}) - 1(\frac{x}{10}) = 10(2)$

$\Rightarrow 2(2x+1) - x = 20 \Rightarrow 4x + 2 - x = 20 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$

استار میروم که روش بالا بهتره ولی میشه با مفرج مشترک گرفتن هم این سوال رو حل کنید! من با اون بیشتر حال می کنم.



باشه به اون روش هم حل می کنم که فالشو بیری!

$\frac{2x+1}{5} - \frac{x}{10} = 2 \Rightarrow \frac{2(2x+1) - x}{10} = 2 \Rightarrow \frac{4x+2-x}{10} = 2 \Rightarrow \frac{3x+2}{10} = 2$
 $\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 3x+2 = 20 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$

ب کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی

در بسیاری از مواقع، معادله درجه اول به صورت ریاضی به ما داده نمی شود بلکه توضیحی فارسی در مورد مجهول داده می شود که باید یک معادله درجه اول مناسب برای آن نوشته و حل کنیم. فقط پس از حل معادله باید ببینیم آیا جواب به دست آمده، در شرایط اولیه مسئله صدق می کند یا خیر. مثلاً اگر در متن سؤال گفته شود عدد مطلوب، طبیعی است و جواب معادله $x = -5$ به دست آید، نباید آن را قبول کنیم.

سؤال عددی را بیابید که دو برابر آن، به علاوه عدد ۴ برابر با سه برابر همان عدد، منهای ۵ باشد.

مشابه فعالیت کتاب درسی

پاسخ عدد مورد نظر را x فرض کرده با توجه به توضیحات مسئله، خواهیم نوشت:

$2x + 4 = 3x - 5 \Rightarrow 2x - 3x = -5 - 4 \Rightarrow -x = -9 \Rightarrow x = 9$

سؤال در یک کفه ترازو ۴ کالای هم وزن قرار می دهیم. در کفه دیگریک وزنه ۱۸ کیلویی می گذاریم. مشاهده می کنیم که کفه قسمت ۱۸ کیلویی پایین

می آید، حال یک وزنه ۳ کیلویی را در کنار آن ۴ کالا قرار می دهیم، تعادل کفه ها برقرار می شود و روبه روی هم می ایستند. وزن هر کالا چقدر است؟

مشابه فعالیت کتاب درسی

پاسخ اگر وزن هر یک از ۴ کالا را x فرض کنیم، وزن ۴ کالا می شود $4x$ حالا یک وزنه ۳ کیلویی هم کنار آن ها است پس یک کفه برابر با $4x + 3$

می شود در کفه دیگر هم که یک وزنه ۱۸ کیلویی داریم. پس می توانیم معادله زیر را تشکیل دهیم:

$4x + 3 = 18 \Rightarrow 4x = 18 - 3 \Rightarrow 4x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{4}$ (کیلوگرم)

تعادل کفه ها یعنی علامت (=)

نکته! اگر ریشه یک معادله درجه اول داده شود، آن را به جای متغیر معادله قرار می‌دهیم تا مجهول خواسته شده به دست آید. در این گونه مسائل، اصطلاحاً می‌گوییم ریشه هر معادله، در خود معادله صدق می‌کند. (البته این نکته برای تمام معادلات دیگر، از جمله معادلات درجه دوم و معادلات گویا هم درست است.)

سؤال به ازای چه مقدار از k معادله $kx = \frac{x-1}{3} + \frac{2k}{5}$ دارای جواب ۴ است؟

پاسخ کافی است هر جا x دیدیم به جایش عدد ۴ را قرار دهیم؛ چون جواب معادله ۴ است.

$$\frac{4-1}{3} + \frac{2k}{5} = k(4) \Rightarrow 1 + \frac{2k}{5} = 4k$$

ضرب تمام جملات در ۵ $\Rightarrow 5(1) + 5(\frac{2k}{5}) = 5(4k) \Rightarrow 5 + 2k = 20k \Rightarrow 18k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{18}$

معادله درجه اول و کاربرد آن در مسائل توصیفی

پرسش‌های تشریحی

بسته
۱

• درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

۱. معادله $x^2 - 3x = 5x + 7$ درجه اول است.

۲. ریشه معادله $6 + x^2 = 3x + (x-1)^2$ برابر با -۱ است.

۳. ممکن است یک معادله درجه اول، بیش‌تر از یک ریشه داشته باشد.

۴. معادله مربوط به عبارت توصیفی «سه برابر عددی به علاوه ۴، برابر است با نصف همان عدد، منهای یک» برابر با $\frac{x}{3} - 1 = 3(x+4)$ می‌باشد.

• جاهای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.

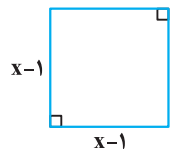
۵. ریشه معادله $\frac{2x}{3} + \frac{x-4}{5} = \frac{11}{15}$ برابر با است.

(مشابه خرداد ۱۴۰۳)

۶. چهار برابر عددی را با نصف همان عدد جمع می‌کنیم حاصل ۲۰۰ شده مقدار آن عدد مساوی است با

۷. معادله $2x(x-1) = 15x - 3$ معادله‌ای درجه است.

۸. محیط مربع مقابل برابر ۴ است مقدار x برابر با است.



• گزینه درست را انتخاب کنید.

۹. اگر معادله $(k-2)x^2 - 3x + 4 = 0$ درجه اول باشد مقدار k کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (-۲) ۴ (۲)

۱۰. اگر $x = -1$ ریشه معادله $\frac{2x-kx}{3} - \frac{x}{4} = \frac{2x-kx}{3}$ باشد مقدار k کدام است؟

۱ (۵/۱۸) ۲ (۱۹) ۳ (۵/۱۹) ۴ (۲۰)

۱۱. مربع عددی را بر خودش تقسیم می‌کنیم حاصل برابر می‌شود با ۳ برابر آن عدد، بعلاوه ۲، مکعب این عدد کدام است؟ ($x \neq 0$)

۱ (۱) ۲ (-۱) ۳ (۸) ۴ (-۸)

• معادلات زیر را حل کنید.

۱۲. $x(x+1) = x^2 - 4x + 1$

$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x}{4}$

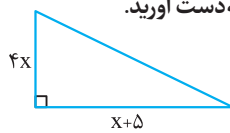
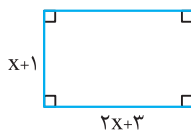
۱۴. $\frac{5}{2}(10x-28) = 3x-2$

۱۵. $(3x-1)(3x+7) = (3x-2)^2$

۱۶. اگر به پنج برابر عددی ۱ واحد اضافه شود و از نصف حاصل، همان عدد کم شود، باقی مانده ۲ می‌شود. آن عدد را پیدا کنید.

۱۷. گروهی از افراد با دوستانشان مواجه می‌شوند. این فرد از یکی از افراد گروه می‌پرسد که: شما چند نفر هستید؟ و این‌طور پاسخ می‌شنود که «ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گرتوهم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم.» با تشکیل یک معادله مناسب، تعداد افراد گروه را به دست آورید. (کار در کلاس کتاب‌درسی)

۱۸. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس ۴ برابر یک کارگر و $\frac{2}{5}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۵ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ کارگر دارد. اگر برای این قسمت ماهانه ۱۰۰ میلیون تومان پرداخت شود، حقوق یک کارگر در ماه چقدر است؟ (مشابه تمرین کتاب‌درسی)



۱۹. مساحت مستطیل و مثلث مقابل با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

۲۰. یک کارخانه فولادسازی، از روز شنبه، شروع به کار کرده و از روز یکشنبه، تولید هر روز خود را نسبت به روز قبل ۲ برابر کرده است. در پایان روز پنجشنبه، مقدار فولاد تولید شده به ۳۲۰ تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این ۶ روز چقدر بوده است؟ اختلاف تولید فولاد در پایان روز سهشنبه با تولید فولاد در پایان روز پنجشنبه چقدر است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۱. مجموع سه عدد زوج متوالی ۴۲ است. بزرگترین این اعداد را به دست آورید.

۲۲. از معادله $38 - 3x^2 = (2x - 3)^2 - (x + 5)^2$ مقدار x را به دست آورید.

۲۳. در مثلثی، طول بزرگترین ضلع از ۴ برابر طول کوچکترین ضلع ۱ واحد بزرگتر است و طول ضلع متوسط، از طول کوچکترین ضلع، ۵ واحد بیش تر است. اگر محیط مثلث ۸۰ سانتی متر باشد، کوچکترین ضلع مثلث چقدر است؟

معادله درجه دوم و روش های حل آن

صفحه ۱۹ تا ۲۹ کتاب درسی

بسته دوم



تعریف هر معادله که پس از ساده شدن به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل شود، معادله درجه دوم نام دارد. a, b, c و اعداد حقیقی اند و $a \neq 0$ است. در این معادله a ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت نام دارد. مثلاً در معادله $-x^2 + 6x - 7 = 0$ ضرایب معادله عبارتند از $a = -1$ ، $b = 6$ و $c = -7$ و یا در معادله $-2x^2 + 3 = 0$ ضرایب معادله عبارتند از $a = -2$ ، $b = 0$ و $c = 3$ همچنین در معادله $5x^2 - 2x = 0$ ضرایب معادله عبارتند از: $a = 5$ ، $b = -2$ و $c = 0$.

روش های حل معادله درجه دوم

۱ روش تجزیه: در این روش ابتدا همه جملات را به یک طرف معادله می بریم تا معادله به شکل $\square = 0$ تبدیل شود سپس عبارت $\square$ را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه می کنیم تا به شکل ضرب دو یا چند عبارت تبدیل شود، سپس تک تک این عبارت ها را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\text{مثال ۱} \quad \underbrace{10x^2 - 8x}_{\text{فاکتور از } 2x} = 0 \Rightarrow 2x(5x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{مثال ۲} \quad x^2 - 15x = -44 \xrightarrow{\text{می بریم } (-44) \text{ را به چپ}} x^2 - 15x + 44 = 0 \Rightarrow \underbrace{(x - 11)(x - 4)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$\text{مثال ۳} \quad \underbrace{49x^2 - 81}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 0 \Rightarrow (7x - 9)(7x + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 7x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{7} \\ 7x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{7} \end{cases}$$

سؤال معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$\text{۱} \quad (x - 8)(x + 2) = 3x(x - 8) \quad \text{۲} \quad (x - 3)^2 = 49 \quad \text{۳} \quad 16x^2 + 8x - 3 = 0 \quad \text{۴} \quad x^2 - 10x + 25 = 0$$

پاسخ ۱ ابتدا عبارت $3x(x - 8)$ را به سمت چپ معادله می بریم سپس فاکتورگیری می کنیم:

$$\underbrace{(x - 8)(x + 2) - 3x(x - 8)}_{\text{فاکتور از } (x - 8)} = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 2 - 3x) = 0 \Rightarrow (x - 8)(-2x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \\ -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

۲ ابتدا عدد ۴۹ را به سمت چپ معادله می بریم:

$$(x - 3)^2 - 49 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد مزدوج}} (x - 3 - 7)(x - 3 + 7) = 0$$

$$\begin{array}{cc} \text{جذر} & \text{جذر} \\ \downarrow & \downarrow \\ (x - 3) & 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

۲
بخش



پاسخ‌نامه

فصل ۱

معادله درجه دوم

۱ | نادرست؛ بزرگ‌ترین توان x برابر ۲ است پس معادله‌ای درجه دوم داریم.

۲ | درست؛

$$(x-1)^2 = 3x + x^2 + 6 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3x + x^2 + 6$$

اتحاد مربع
دوجمله‌ای

$$\xrightarrow{\text{خط می‌زنیم}} x^2 \text{ ها را از دو طرف} -2x + 1 = 3x + 6$$

$$\xrightarrow{\text{عددها راست}} x \text{ ها چپ} -2x - 3x = 6 - 1$$

$$\Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{-5} = -1$$

۳ | نادرست؛ معادله درجه اول، دقیقاً یک ریشه دارد (همیشه فرض می‌کنیم ضریب x مخالف صفر است).

۴ | درست؛ عدد را x می‌گیریم پس سه برابر عددی به علاوه ۴، برابر می‌شود با $3(x+4)$ نصف همان عدد هم می‌شود $\frac{x}{2}$ که اگر آن را منهای یک کنیم به $(\frac{x}{2} - 1)$ می‌رسیم لذا در کل داریم: $3(x+4) = \frac{x}{2} - 1$

با عرض پوزش، مگه سه برابر عددی به علاوه ۴ مساوی با $3x + 4$ نمی‌شود؟ چسار تها ولی فکر کنم به اشتباه کوپولو کردین شما!

بین دوست فوبم همه پی بستگی به جای ویرگول داره، آگه طراح می‌گفت سه برابر عددی، به علاوه ۴ (اون وقت حرف شما درست بود و عبارت ریاضی $3x + 4$ برای اون مناسب بود.

۵ | تمام جملات را در ۱۵ ضرب می‌کنیم تا دیگر هیچ مخرجی وجود نداشته باشد:

$$15\left(-\frac{2x}{3} + \frac{x-4}{5}\right) = \frac{11}{15} \Rightarrow 5(2x) + 3(x-4) = 11$$

$$\Rightarrow 10x + 3x - 12 = 11 \Rightarrow 13x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{13}$$

۶ | عدد را x در نظر گرفته و معادله مطلوب را تشکیل می‌دهیم با حل معادله، x به دست می‌آید:

$$4x + \frac{x}{2} = 200 \xrightarrow{\times 2} 8x + x = 400 \Rightarrow 9x = 400 \Rightarrow x = \frac{400}{9}$$

۷ | دوم؛ ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم تا معلوم شود فقط x داریم یا این که x^2 هم داریم:

$$2x(x-1) = 15x - 3 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 15x - 3 \Rightarrow 2x^2 - 15x + 1 = 0$$

این معادله، درجه دوم است چون x^2 دارد.

۸ | ۲؛ $4 = 4(x-1) \Rightarrow 4 = 4x - 4 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

۹ | گزینه (۴)

در معادله درجه اول نباید x^2 مشاهده کنیم پس باید ضریب x^2 را در معادله، برابر با صفر قرار دهیم: $0 = k - 2 \Rightarrow k = 2$

یعنی الان آگه $k = 2$ باشه معادله مون درجه اول می‌شه استاد؟

بله که می‌شه، آگه شک داری به جای k بنزار ۲ به معادله زیر می‌رسی:

$$0 = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow -3x + 4 = 0$$

۱۰ | گزینه (۱)

به جای تمام x ها ریشه معادله یعنی عدد (-1) را قرار می‌دهیم:

$$\frac{2(-1) - k(-1)}{3} - \frac{(-1)}{2} = 6 \Rightarrow \frac{-2+k}{3} + \frac{1}{2} = 6$$

$$\xrightarrow{\times 6} 2(-2+k) + 3(1) = 6 \times 6 \Rightarrow -4 + 2k + 3 = 36$$

$$\Rightarrow 2k = 37 \Rightarrow k = \frac{37}{2} = 18.5$$

۱۱ | گزینه (۲)

طبق معمول، عدد را x می‌گیریم و معادله‌ای مناسب تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x^2}{x} = 3x + 2 \Rightarrow x = 3x + 2 \Rightarrow x - 3x = 2 \Rightarrow -2x = 2$$

$$\Rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{مکعب جواب}} (-1)^3 = -1$$

ضرب می‌کنیم

$$x(x+1) = x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 + x = x^2 - 4x + 1$$

$$\xrightarrow{\text{ها را از دو طرف خط می‌زنیم}} x = -4x + 1 \Rightarrow x + 4x = 1$$

$$\Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

۱۳

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x}{4} \xrightarrow{\text{ضرب جملات در ۱۲}} 12\left(\frac{2x+1}{3}\right) - 12\left(\frac{x-5}{2}\right) = 12\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= 12\left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow 4(2x+1) - 6(x-5) = 3x$$

$$\Rightarrow 8x + 4 - 6x + 30 = 3x \Rightarrow -x = -34 \Rightarrow x = 34$$

۱۴ | عدد $\frac{5}{4}$ را در داخل پرانتز ضرب می‌کنیم:

$$\frac{5}{4}(10x - 28) = 3x - 2 \Rightarrow 25x - 70 = 3x - 2$$

$$\Rightarrow 25x - 3x = 70 - 2 \Rightarrow 22x = 68 \Rightarrow x = \frac{68}{22} = \frac{34}{11}$$

$$2x^2 + 3x + 2x + 3 = 2x^2 + 10x \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عرض مستطیل} = x + 1 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5} \\ \text{طول مستطیل} = 2x + 3 = 2(\frac{3}{5}) + 3 = \frac{21}{5} \end{cases}$$

۲۰ | مقدار تولید فولاد در روز شنبه را x فرض می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightarrow{\times 2} & 2x & \xrightarrow{\times 2} & 4x & \xrightarrow{\times 2} & 8x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{شنبه} & & \text{یکشنبه} & & \text{دوشنبه} & & \text{سه‌شنبه} \end{array}$$

$$32x = 320 \Rightarrow 32x = 320$$

$$\Rightarrow x = \frac{320}{32} = 10$$

$$\text{مجموع کل فولاد تولیدی در یک هفته} = x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x$$

$$= 63x = 63 \times 10 = 630$$

$$32x - 8x = \text{اختلاف فولاد تولیدی روزهای سه‌شنبه و پنج‌شنبه}$$

$$= 24x = 24 \times 10 = 240$$

۲۱ | اگر این سه عدد زوج متوالی را x ، $x+2$ و $x+4$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$x + x + 2 + x + 4 = 42 \Rightarrow 3x + 6 = 42 \Rightarrow 3x = 36$$

$$\Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$$

$$\Rightarrow \text{بزرگ‌ترین عدد} = x + 4 = 12 + 4 = 16$$

استاد حالا آله می‌گفت سه عدد فرد متوالی یا سه عدد طبیعی متوالی بی‌کار باید می‌کردیم؟

برای سه عدد فرد هم همون x ، $x+2$ و $x+4$ رو می‌گیریم، ولی برای اعداد طبیعی متوالی اون‌ها رو به صورت x ، $x+1$ و $x+2$ فرض می‌کنیم.

$$(x+5)^2 - (2x-3)^2 = 38 - 3x^2$$

اتحاد مربع
دو جمله‌ای

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 - (4x^2 - 12x + 9) = 38 - 3x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 - 4x^2 + 12x - 9 = 38 - 3x^2$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 22x = 38 - 3x^2 - 16 \Rightarrow x = \frac{22}{22} = 1$$

۲۳ | طول کوچک‌ترین ضلع را x فرض می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$x + 5 = \text{طول ضلع متوسط و } 4x + 1 = \text{طول بزرگ‌ترین ضلع}$$

$$80 = \text{محیط مثلث} \Rightarrow x + (x+5) + (4x+1) = 80$$

$$\Rightarrow 6x + 6 = 80 \Rightarrow 6x = 74 \Rightarrow x = \frac{74}{6}$$

۲۴ | درست؛ ضمناً نام دیگر ریشه مضاعف، دو ریشه یکسان است.

۱۵ | پرانتزهای سمت چپ را در هم ضرب می‌کنیم، سمت راست هم

اتحاد مربع دوجمله‌ای است:

$$(3x-1)(3x+7) = (3x-2)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 21x - 3x - 7 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$\Rightarrow 18x + 12x = 4 + 7 \Rightarrow 30x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{30}$$

۱ | عدد مجهول را x می‌گیریم. پس داریم:

$$5 \Rightarrow 5x$$

$$5x + 1 \Rightarrow 5 \text{ برابر عددی، به علاوه } 1$$

$$\Rightarrow \frac{5x+1}{2} \text{ نصف حاصل}$$

حالا معادله مطلوب را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{5x+1}{2} - x = 2 \rightarrow \text{باقی‌مانده}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب جملات در ۲}} 2(\frac{5x+1}{2}) - 2(x) = 2(2) \Rightarrow 5x+1-2x=4$$

$$\Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$$

۱۷ | اگر تعداد افراد گروه را x فرض کنیم خواهیم نوشت:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & x & + & \frac{x}{2} & + & \frac{x}{2} + 1 = 100 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{ما} & & \text{ما} & & \text{(نصف ما)} & & \text{(نصف ما) + نفر} \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 99 \Rightarrow \frac{4x + x + x}{2} = 99$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 11x = 396 \Rightarrow x = \frac{396}{11} = 36$$

۱۸ | کمترین حقوق را x می‌گیریم. پس الان حقوق کارگر را x فرض

کرده و خواهیم نوشت:

$$4x = \text{حقوق کارگر} \times 4 = \text{حقوق مهندس}$$

$$\text{حقوق مدیر بخش} = \frac{2}{5} \times \text{حقوق مهندس}$$

$$\Rightarrow 4x = \frac{2}{5} \times \text{حقوق مدیر بخش}$$

$$\Rightarrow \text{حقوق مدیر بخش} = 4x \times \frac{5}{2} = 10x$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض سوال}} \text{حقوق ۱۲ کارگر} + \text{حقوق ۸ مهندس} + \text{حقوق ۵ مدیر} = 100$$

$$\Rightarrow 5(10x) + 8(4x) + 12(x) = 100$$

$$\Rightarrow 50x + 32x + 12x = 100 \Rightarrow 94x = 100$$

$$\Rightarrow x = \frac{100}{94} \approx 1.06$$

یعنی حقوق یک کارگر در ماه تقریباً ۱ میلیون تومان می‌باشد.

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{عرض} \times \text{طول} \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$\Rightarrow (x+1)(2x+3) = \frac{(4x)^2}{2}$$