



پیشرفته
فرمول
لیست

ریاضی دهم

مؤلفان: حسین اسفینی، یوسف داستان

۱۸۰۰

پرسش تالیفی
و امتحانی چند قسمتی

۲۰۰

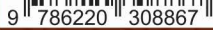
صفحه درسنامه
تیپ بندی شده

تیپ آموزشی امتحانی

مثال آموزشی با حل کامل

تمرین با پاسخ نهایی

پرسش با پاسخ تشریحی



نیش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

با توجه به تأثیر مستقیم نمره امتحان نهایی در تعیین رتبه کنکور، جای خالی یک کتاب جامع و کامل در بازار حس می‌شد. بنابراین تصمیم گرفتیم، کتابی کامل با ویژگی‌های منحصر به فرد و کاربردی تألیف کنیم. لازم است به برخی ویژگی‌های خاص این کتاب اشاره کنیم:

درسنامه‌ها

هر درس را به چند درسنامه با ساختار آموزش محور به صورت مقابل تقسیم کرده‌ایم که در ادامه تمام قسمت‌های آن را مفصل توضیح می‌دهیم:

درسنامه ۱		
۱	تیپ ۱	۲
۲	روش حل تیپ ۱	۳
۳	مثال	۴
۴	تمرین	پاسخ نهایی
:		

۲ روش حل

در این قسمت، طریقه پاسخ‌دهی به تیپ‌های مطرح شده را با توجه به متن کتاب درسی به ساده‌ترین شکل ممکن بیان کرده‌ایم تا با صرف کمترین زمان، بیشترین بازدهی را داشته باشید.

۱ تیپ

در این قسمت انواع مختلف سؤالاتی که از هر درسنامه، قابلیت طرح در امتحانات نهایی را دارند، به صورت تیپ‌های مختلف زیر آن آورده شده است. این مدل تیپ‌بندی میکرو طبقه‌بندی شده هر درسنامه که هیچ جایی نمونه آن را نخواهید دید، باعث می‌شود ذهن دانش‌آموز در هر درس، کاملاً منظم و ساختارمند شود و سر جلسه امتحان، بازیابی اطلاعات برایش خیلی راحت شود و بتواند به راحتی به سؤالات پاسخ دهد.

۴ تمرین

یکی از ویژگی‌های برجسته و اساسی این کتاب، ارائه تمرینات کارشناسی‌شده در جلوی هر مثال است که اکثراً فضای خالی برای نوشتن پاسخ زیر آن‌ها وجود دارد که حس خوب حل کردن تمرین زیر آن و در خود کتاب به شما منتقل شود. هدفمان از ارائه این تمرینات را در زیر بیان کرده‌ایم:

آ) سنجش یادگیری دانش‌آموز؛ برای آنکه مطمئن شویم دانش‌آموز مثال هر تیپ را به خوبی یاد گرفته است، عمداً تمرین‌هایی کاملاً مشابه آن مثال‌ها آورده‌ایم.

ب) پاسخ نهایی هر تمرین را زیر آن آورده‌ایم تا دانش‌آموز از صحت پاسخ خود مطمئن شود.

پ) کمک به دبیران جهت ارزیابی دانش‌آموزان بعد از تدریس مباحث کتاب

۳ مثال

باید قبول کرد هیچ توضیحی بدون حل یک مثال مناسب قابل فهم و درک نخواهد بود، لذا در این قسمت سعی کرده‌ایم بهترین مثال(های) ممکن از آن تیپ را ارائه دهیم که تاکنون در امتحانات مدارس شهرهای مختلف آمده است. قابل ذکر است مثال‌های آورده شده، نتیجه بررسی تعداد بسیار زیادی از سؤالات امتحانی مدارس شهرهای مختلف کشور بوده که گاهی برای انطباق کامل با سؤالات امتحان نهایی، مجبور به اصلاح صورت سؤالات شده‌ایم. این کار وقت زیادی را از ما گرفت.

بانک جامع سؤالات امتحانی

غلط، جای خالی، دوگزینه‌ای و تشریحی می‌باشند که بارها در امتحانات مختلف تکرار شده‌اند.

تمرکز اصلی در این بخش طراحی و جمع‌آوری سؤالاتی بوده که دقیقاً با محتوای کتاب درسی و تیپ سؤالات امتحان نهایی هم‌خوانی دارند. این سؤالات، شامل مسائل صحیح و

پاسخ‌های واقعاً تشریحی

نوشته شده‌اند و همواره سعی کرده‌ایم طوری باشند که دانش‌آموز با خواندن آن‌ها تا حد امکان متوجه حل سؤال بشود.

نقطه قوت دیگر کتاب، پاسخ‌های کاملاً تشریحی آن است که بارها با استقبال و تحسین گسترده معلمان و دانش‌آموزان همراه بوده است. این پاسخ‌ها با صرف وقت و انرژی زیاد

پوشش کامل متن کتاب درسی

عنوان «کتاب درسی زیر ذره‌بین» برخورد خواهید کرد که در آن‌ها، به‌طور موشکافانه‌ای، قسمت‌هایی از کتاب درسی را بررسی کرده‌ایم. این حرکت، یکی از ویژگی‌های انحصاری کتاب ما بوده و نمونه آن را در هیچ کتابی نخواهید دید.

تمام مطالب کتاب درسی اعم از فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها، تمرینات، مثال‌ها، شکل‌ها، نمودارها، زیرنویس‌ها، متن‌های حاشیه کتاب و ... به‌صورت کامل و جامع پوشش داده شده است. در همین راستا، هنگام مطالعه کتاب به کادرهایی تحت

پرسش‌های تکمیلی

پیشنهاد می‌شود بعد از حل سؤالات مربوط به هر فصل و تسلط بر آن‌ها، به سراغ این سؤالات بروید، زیرا این نوع سؤالات به ندرت در امتحانات دیده شده‌اند.

در انتهای هر فصل، تعدادی سؤال سخت و خشن مخصوص دانش‌آموزان سخت‌کوش آماده کرده‌ایم که به نمره بالاتر از ۲۰ می‌انديشند!

دفترچه رایگان آزمون

از پایان هر فصل با حل کردن آزمون آن فصل، بررسی کنید که آن فصل را چقدر خوب یاد گرفته‌اید. از این آزمون‌ها می‌توانید برای مرور فصل‌ها نیز استفاده کنید.

سؤالات امتحان نهایی را با دقت بررسی کرده‌ایم و با توجه به سبک سؤالات و درجه سختی آن‌ها، آزمون‌هایی کاملاً استاندارد از هر فصل تألیف کرده‌ایم. پیشنهاد می‌شود پس

کانال تلگرام با آیدی @F20riazi

نهایی را قرار خواهیم داد. این مطالب شامل نمونه سؤال‌های امتحانی به همراه حل آن با voice (ویس)، تدریس مباحث مختلف و حل آزمون‌های برگزارشده مؤسسات مختلف می‌باشد. پیشنهاد می‌کنیم حتماً در این کانال عضو شوید و از مطالب آن استفاده کنید.

در راستای کمک به دانش‌آموزان و برطرف کردن سؤالات احتمالی که حین خواندن کتاب با آن‌ها روبه‌رو می‌شوند، تصمیم گرفتیم کانالی راه‌اندازی کنیم که پل ارتباطی شما با مؤلفین کتاب باشد. در این کانال علاوه بر رفع اشکالات دانش‌آموزان، به‌روزترین مطالب ریاضی منطبق با امتحان

فهرست

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

۶۰	۴۹	۳۶	۲۳	۸
درس ۵ دنباله هندسی	درس ۴ دنباله حسابی	درس ۳ الگو و دنباله	درس ۲ متمم یک مجموعه	درس ۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

فصل ۲ مثلثات

۱۰۱	۸۶	۷۴
درس ۳ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	درس ۲ دایرة مثلثاتی	درس ۱ نسبت‌های مثلثاتی

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۱۳۱	۱۲۵	۱۱۹	۱۰۸
درس ۴ عبارت‌های جبری	درس ۳ توان‌های گویا	درس ۲ ریشه م	درس ۱ ریشه و توان

فصل ۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها

۱۷۲	۱۶۱	۱۵۰
درس ۳ تعیین علامت	درس ۲ سهمی	درس ۱ معادله درجه ۲ و روش‌های مختلف حل آن

فهرست

فصل



تابع

۲۱۵

درس ۳
انواع تابع

۲۰۲

درس ۲
دامنه و برد توابع

۱۹۲

درس ۱
مفهوم تابع و بازتابی‌های آن

شمارش، بدون شماردن



فصل

۲۵۶

درس ۳
ترکیب

۲۴۸

درس ۲
جایگشت

۲۳۴

درس ۱
شمارش

آمار و احتمال



فصل

۲۹۵

درس ۳
مقدمه‌ای بر علم آمار، ...

۲۸۱

درس ۲
احتمال یا اندازه‌گیری شانس

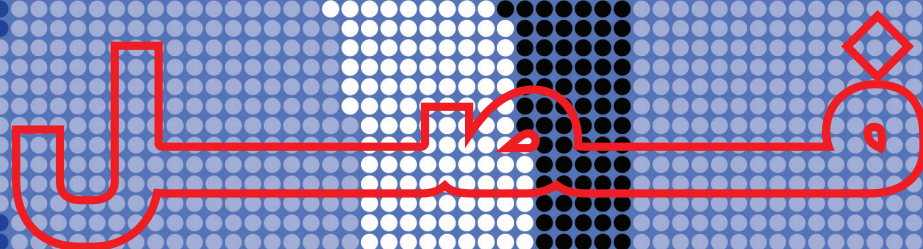
۲۶۸

درس ۱
فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی

پاسخنامه
تشریحی

۳۰۳

پاسخنامه
تشریحی



مجموعه، الگو و دنباله



درس ۵
دنباله هندسی



درس ۴
دنباله حسابی



درس ۳
الگو و دنباله



درس ۲
متمم یک
مجموعه



درس ۱
مجموعه های
متناهی و
نامتناهی



فرار از
اشتباه



تذکر



یادآوری



تعریف



اثبات
فرمول



نتیجه



روش حل



مثال



نکته



دید
ویژه

درس ۱

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

- ۱ یادآوری مجموعه‌های مهم و روابط بین مجموعه‌ها
- ۲ بازه (فاصله)
- ۳ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

یادآوری مجموعه‌های مهم و روابط بین مجموعه‌ها

مجموعه: به دسته‌ای از اعداد یا اشیای کاملاً مشخص و متمایز (غیر تکراری) مجموعه می‌گوییم. مثل مجموعه اعداد اول یک رقمی که اعضای آن کاملاً مشخص هستند: $\{2, 3, 5, 7\}$

ترتیب نوشتن اعضای مجموعه مهم نیست. مثلاً: $\{4, 3\}$ همان $\{3, 4\}$ است. از طرفی تکرار در مجموعه اثر ندارد. مجموعه‌های $\{1, 2\}$ و $\{1, 1, 2, 2\}$ با هم مساوی‌اند.

عضویت در مجموعه: اگر x ، عضو مجموعه A باشد می‌نویسیم $x \in A$ و اگر عضو مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $x \notin A$. در مجموعه $A = \{0, \{1\}\}$ داریم:

$0 \in A$: زیرا دقیقاً صفر را در مجموعه A می‌بینیم.

$\{0\} \notin A$: زیرا $\{0\}$ را در مجموعه A نمی‌بینیم، دقت کنید $\{0\}$ را با 0 اشتباه نگیرید.

$\{1\} \in A$: زیرا دقیقاً $\{1\}$ را در مجموعه A می‌بینیم.

نمودار ون: مجموعه را علاوه بر نوشتن اعضاء درون $\{ \}$ ، به صورت‌های دیگری نیز می‌توان نمایش داد. نمایش مجموعه‌ها به کمک شکل‌هایی مانند دایره، مستطیل یا ... را نمایش به صورت «نمودار ون» می‌گویند.



نمایش مجموعه‌های $A = \{0, 1, 2\}$ و $B = \{1, 2, 5, 7\}$ با نمودار ون به صورت مقابل است:

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی می‌نامیم و آن را با علامت $\emptyset$ یا $\{ \}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه اعداد طبیعی بین $1/5$ و $1/6$ ، تهی است. زیرا بین $1/5$ و $1/6$ عدد طبیعی وجود ندارد.

مجموعه‌های $\{ \}$ ، $\{ \emptyset \}$ ، یا $\{0\}$ تهی نیستند، زیرا هر کدام یک عضو دارند.

دو مجموعه برابر: اگر هر عضو مجموعه A ، عضو مجموعه B بوده و هر عضو مجموعه B نیز، عضو مجموعه A باشد، آن‌گاه می‌گوییم A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$. مثلاً دو مجموعه $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 1, 2\}$ برابرند. زیرا اگر عضو تکراری را در B حذف کنیم، $B = \{1, 2\}$ دقیقاً مثل A است.

زیرمجموعه: هرگاه هر عضو مجموعه A ، عضو مجموعه B نیز باشد، مجموعه A را زیر مجموعه B می‌گوییم و آن را به صورت $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم. همچنین زیر مجموعه نبودن را با علامت $\not\subseteq$ نمایش می‌دهیم.

برای مجموعه $A = \{0, \{1\}\}$ داریم:

$\{0\} \subseteq A$: زیرا تنها عضو $\{0\}$ یعنی عدد 0 ، عضوی از مجموعه A است.

$\{1\} \not\subseteq A$: زیرا تنها عضو $\{1\}$ یعنی عدد 1 ، عضو مجموعه A نیست.

$\{\{1\}\} \subseteq A$: زیرا تنها عضو $\{\{1\}\}$ یعنی $\{1\}$ ، عضوی از مجموعه A است.

$\{0, \{1\}\} \subseteq A$: زیرا عضوهای آن یعنی 0 و $\{1\}$ ، هر دو عضو مجموعه A هستند.

مجموعه تهی، زیر مجموعه هر مجموعه دلخواهی است. مثلاً: اگر A یک مجموعه دلخواه باشد، آن‌گاه: $\emptyset \subseteq A$

هر مجموعه‌ای، زیر مجموعه خودش است. مثلاً: $A \subseteq A$

نوشتن مجموعه به زبان ریاضی: گاهی اوقات برای نمایش یک مجموعه، شکل کلی عضوهای آن مجموعه را بیان می‌کنند. مثلاً: هر عدد طبیعی زوج به شکل $2k$ است که در آن k عددی طبیعی است. پس مجموعه اعداد طبیعی زوج را به زبان ریاضی به صورت $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ نمایش می‌دهیم.

فقط محض اطلاع بدانید که علامت « $\mid$ » در $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ به معنی «به طوری که» می‌باشد.

اعضای مجموعه

را بنویسید. $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 16\}$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

پاسخ نهایی

منتخب مدارس تهران

اعضای مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 25\}$ را بنویسید.

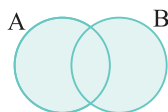
پاسخ ابتدا با توجه به شرط $x \in \mathbb{N}$ متوجه می‌شویم x عددی طبیعی است و چون

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$x^2 < 25$ ، پس $x = 1, 2, 3, 4$ و داریم:

منتخب مدارس تهران

اجتماع، اشتراک و تفاضل



اجتماع دو مجموعه A و B: مجموعه‌ای است که اعضایش در A یا B یا هر دو مجموعه A و B هستند (اعضایش متعلق به حداقل یکی از مجموعه‌های A و B است). و آن را به صورت $A \cup B$ نمایش می‌دهیم. نمودار آن به صورت مقابل است:

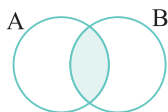
۱ $A \cup A = A$

۲ $A \cup \emptyset = A$

ویژگی‌ها:

۳ $A \cup B \subseteq (A \cup B)$

۴ اگر $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$



اشتراک دو مجموعه A و B: مجموعه‌ای است که هر عضو آن هم به A و هم به B تعلق داشته (متعلق به هر دو مجموعه) و آن را به صورت $A \cap B$ نشان می‌دهند. نمودار آن به صورت مقابل است:

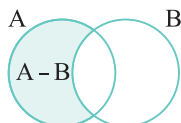
۱ $A \cap A = A$

۲ $A \cap \emptyset = \emptyset$

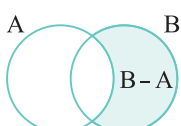
ویژگی‌ها:

۳ $A \cap B \subseteq A$ و B

۴ اگر $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$



تفاضل دو مجموعه: مجموعه $A - B$ ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A هستند ولی در B حضور ندارند. (عضوهای فقط در A هستند).



به طور مشابه مجموعه $B - A$ ، مجموعه‌ای است که عضوهای آن در B هستند ولی در A حضور ندارند. (عضوهای فقط در B هستند).

ویژگی‌ها:

۱ $A - B = A - (A \cap B)$

۲ $B - A = B - (A \cap B)$

۳ $A - \emptyset = A, \emptyset - A = \emptyset$

۴ $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

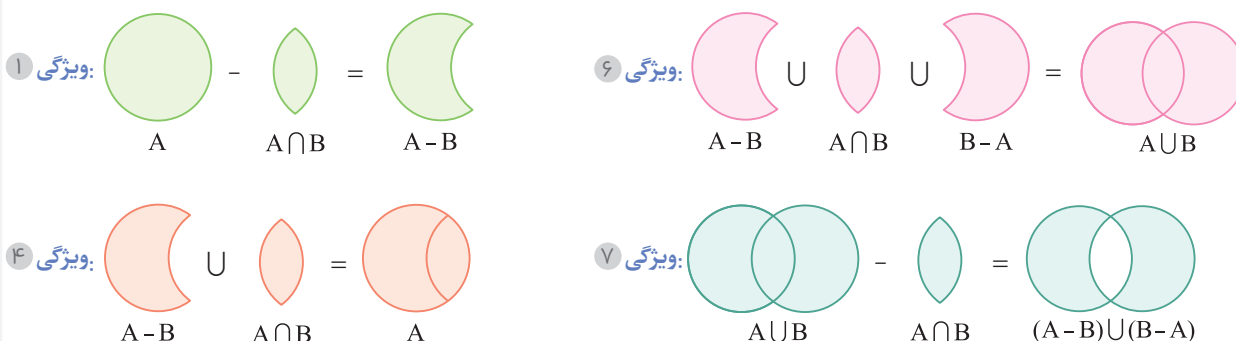
۵ $(B - A) \cup (A \cap B) = B$

۶ $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

۷ $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

۸ اگر $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

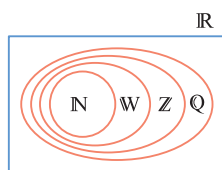
ویژگی‌های بیان شده را حفظ نکنید، بلکه به کمک نمودارون آن را بفهمید تا در ذهن شما بمانند. مثلاً ویژگی‌های ۱، ۴، ۶ و ۷ را به صورت زیر به کمک نمودارون به خاطر می‌سپاریم:



اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$. مثلاً: چون $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$ است، پس $\mathbb{W} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{W}$ و $\mathbb{W} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

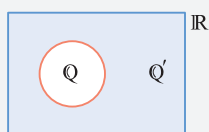
چند مجموعه مهم

- مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 - مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 - مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
 - مجموعه اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$): مجموعه اعدادی هستند که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح به صورت $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) نوشت. مثل $\sqrt{2}$ و π .
 - این مجموعه را به صورت $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ نیز نشان می‌دهند.
 - مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$
- روابط زیر را که بسیار مهم است حتماً به خاطر بسپارید:



- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$
- $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$
- همان $\mathbb{Q}'$ است. $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
- همان $\mathbb{Q}'$ است. $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$

پاسخ درود بر $\mathbb{Q}'$! مطمئن باش گم نشده! در واقع اون قسمت بین $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ یعنی $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$



همان $\mathbb{Q}'$ هست. به شکل مقابل نگاه کن تا بفهمی $\mathbb{Q}'$ کجاست.

سوال دانش‌پژوه | احمد جوشکار

آقا
پس $\mathbb{Q}'$
چی شد؟



کتاب درسی پس از معرفی مجموعه‌های مهم، یک نتیجه مهم را آورده که می‌تواند به صورت

جای خالی (به صورت زیر) در امتحان مطرح شود:

«هر عدد دلخواهی باید جایی روی **محور اعداد حقیقی** داشته باشد و همچنین هر نقطه روی

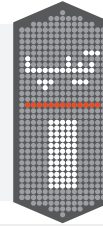
این محور، نشان دهنده **یک عدد حقیقی** است.»

کتاب
درسی
زیر ذره‌بین



صفحه ۲

در ادامه انواع تیپ های مهمی که از این درس می تواند در امتحان مطرح شود را با هم بررسی می کنیم:



A و B را به ما می دهند و از ما می خواهند $A \cup B$ ، $A \cap B$ یا ... را به دست آوریم.

☀️ برای حل این تیپ مسائل، کافی است از ویژگی های مطرح شده در درسنامه استفاده کنیم و مجموعه خواسته شده را بنویسیم.

اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ و $B = \{3, 6, 9\}$ باشد، مجموعه های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ

$$A \cap B = \frac{\text{اعضای مشترک}}{\text{هر دو مجموعه}} \{6\}, \quad A \cup B = \frac{\text{تمام اعضای B و A}}{\text{}} \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

$$A - B = A - (A \cap B) = \{2, 4, 8\} - \{6\} = \frac{\text{مشترک ها را از A حذف کن}}{\text{}} \{2, 4, 8\}$$

$$B - A = B - (A \cap B) = \{3, 9\} - \{6\} = \frac{\text{مشترک ها را از B حذف کن}}{\text{}} \{3, 9\}$$

● اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ باشد، مجموعه های $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ نهایی

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

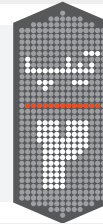
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A - B = \{1, 2\}, \quad B - A = \{5\}$$

منتخب مدارس تهران



منتخب مدارس تهران



تعدادی عدد را داده و از ما می خواهند آن ها را در جای مناسب در نمودار ون قرار دهیم.

☀️ برای پاسخ گویی به این مسائل، باید تشخیص دهیم که آن عدد متعلق به کدام یک از مجموعه های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}'$ است تا بتوانیم آن را در جای مناسب بنویسیم.

● درستی یا نادرستی هریک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

آ) $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{Q}$ (ب) $\sqrt{17} \in \mathbb{Q}'$

پ) $\sqrt{0.64} \in \mathbb{Z}$ (ت) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$

آ) نادرست (ب) درست

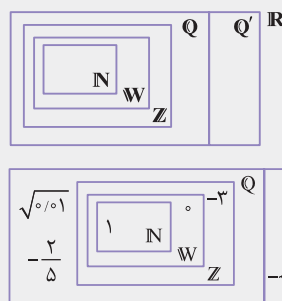
پ) نادرست (ت) درست

پاسخ نهایی

منتخب مدارس یزد



منتخب مدارس یزد



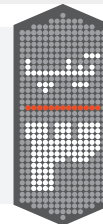
عددهای $1, 0, -\sqrt{5}, \pi, \sqrt{0.01}, -3, -\frac{2}{5}$ را در جای مناسب در شکل بنویسید.

پاسخ

$$1 \in \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{W}, -3 \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{0.01} = \sqrt{(0.1)^2} = 0.1 = \frac{1}{10}, -\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$$

$$\pi, -\sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$$



از ارتباط بین مجموعه های معروف $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ ، سؤالات صحیح و غلط یا جای خالی می دهند.

☀️ کلید حل این سؤالات، تسلط به روابط مجموعه های مهم مانند: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ و ... و نمودار ون آن ها است.

● درستی یا نادرستی هریک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

آ) $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Q}$

ب) $\mathbb{Q}' - \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

پ) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

ت) $\mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \{0\}$

پاسخ نهایی

آ) درست (ب) نادرست

پ) درست (ت) نادرست

منتخب مدارس ساری



منتخب مدارس ساری

آ) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \dots$ (ب) $\mathbb{W} - \mathbb{Z} = \dots$ (پ) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \dots$

ت) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{W} = \dots$ (ث) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \dots$ (ج) $\mathbb{R} - (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}') = \dots$

آ) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ (ب) $\mathbb{W} - \mathbb{Z} \stackrel{\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}}{=} \emptyset$

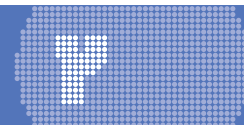
پ) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, \dots\} = \{0\}$ (ت) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{W} \stackrel{\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}}{=} \mathbb{W}$

ث) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} \stackrel{\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}}{=} \mathbb{Q}$ (ج) $\mathbb{R} - (\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}') = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset$

پاسخ

تعیین

بازه (فاصله)



بازه (فاصله): زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامند. اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، حالات زیر را داریم:

حالت ۱: تمام اعداد حقیقی بین دو عدد a و b به همراه خود این دو عدد (نقاط انتهایی بازه) را **بازه بسته از a تا b** می‌گوییم و به صورت $[a, b]$ نمایش می‌دهیم:

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ، نمایش مجموعه‌ای

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\} = [1, 4]$:

حالت ۲: تمام اعداد حقیقی بین دو عدد a و b را **بازه باز بین a و b** می‌گوییم و به صورت (a, b) نمایش می‌دهیم:

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ، نمایش مجموعه‌ای

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\} = (-1, 2)$:

! در بازه باز (a, b) ، نقاط ابتدایی و انتهایی یعنی a و b حضور ندارند.

حالت ۳: بازه‌هایی مانند $[a, b]$ یا (a, b) که تنها شامل یکی از نقاط انتهایی خود هستند را **بازه‌های نیم باز** می‌نامیم. این بازه‌ها شامل تمام اعداد حقیقی بین a و b به همراه تنها یکی از دو عدد a و b هستند.

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b)$ ، نمایش مجموعه‌ای

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} = (a, b]$ ، نمایش مجموعه‌ای

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\} = (-1, 2]$:

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\} = [-1, 2)$:

! طول بازه (a, b) برابر $b - a$ است. به عنوان مثال طول هر کدام از بازه‌های $[-1, 6]$ ، $(-1, 6)$ ، $[-1, 6)$ و $(-1, 6]$ برابر $6 - (-1) = 7$ است.

! در مورد بازه‌هایی مانند $[a, b]$ یا (a, b) یا ... نمی‌توان اولین عدد حقیقی بعد از a و اولین عدد حقیقی قبل از b را مشخص کرد.

حالت ۴: تمام اعداد حقیقی بزرگتر از a را به صورت $x > a$ یا $(a, +\infty)$ نوشته و به آن **بازه باز a تا $+\infty$** (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) می‌گوییم:

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ، نمایش مجموعه‌ای

نمایش هندسی $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} = (2, +\infty)$:

در جدول زیر تمام حالت‌های ممکن را آورده‌ایم:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
نیم‌باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم‌باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم‌باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

$+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند و در نمایش بازه‌ها، کنار آن‌ها همیشه پرانتز می‌آید.

گاهی می‌توان اجتماع دو یا چند بازه را به صورت تفاضلی نشان داد. مثلاً داریم:

$$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty) = \{x \mid x < 2 \text{ یا } x > 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(-\infty, 1) \cup [2, +\infty) = \{x \mid x < 1 \text{ یا } x \geq 2\} = \mathbb{R} - [1, 2)$$

پاسخ ببین! برای نوشتن مجموعه $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ به اون یکی صورت، کافیه مجموعه‌ای رو پیدا کنی که اجتماع اون با $(-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ برابر مجموعه $\mathbb{R}$ بشه و با این مجموعه اشتراکی نداشته باشه. بعد اون مجموعه رو از $\mathbb{R}$ کم کنی. در این‌جا داریم:

$$(-\infty, 1) \cup [2, +\infty) \cup [1, 2) = \mathbb{R} \Rightarrow (-\infty, 1) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - [1, 2)$$

بازه مورد نظر

سوال دانش‌پژوه | تابه پژوهان

آقا اجازه!
این آخری رو
می‌شه بیشتر
توضیح بدین
که چطور
نوشتین؟



در ادامه انواع تیپ‌های مهمی که از این درس می‌تواند در امتحان مطرح شود را باهم بررسی می‌کنیم:

**متعلق
بودن
یک عدد
به یک
بازه**

تیپ ۱

فرض کنید اعدادی مانند $-\frac{3}{4}$ ، -1 ، -4 می‌دهند و از ما می‌پرسند آیا این اعداد متعلق به بازه $[-1, -4]$ هستند یا خیر؟

☀️ برای پاسخگویی به این سؤال، کافی است چک کنیم اعداد داده شده در آن بازه قرار دارند یا خیر. برای این کار آن اعداد را با اعداد دو انتهای بازه یعنی -1 و -4 مقایسه می‌کنیم. خب در این مثال -1 عضو بازه است زیرا بازه از طرف -1 بسته بوده و علامت « $]$ » کنار -1 وجود دارد. ولی -4 عضو بازه نیست زیرا بازه از طرف -4 باز بوده و علامت پرانتز کنار -4 وجود دارد. در نهایت $-\frac{3}{4}$ عضو بازه نیست زیرا $-\frac{3}{4}$ از -1 بزرگ‌تر بوده، لذا بین دو عدد -1 و -4 قرار ندارد!

؟ کدام یک از اعداد $-\frac{5}{6}$ ، -3 ، $-\sqrt{5}$ و $-\pi$ عضو بازه $(-\frac{5}{6}, -3]$ هستند؟

پاسخ نهایی -3 ، $-\sqrt{5}$

منتخب مدارس اهواز

**بررسی
وضعیت
دو بازه
نسبت به هم**

تیپ ۲

فرض کنید دو مجموعه A و B را به ما داده‌اند و از ما می‌پرسند:

آیا $A = B$ ؟ ب) آیا $A \subseteq B$ ؟

☀️ آ) کافی است بررسی کنیم که آیا تمام اعداد موجود در بازه‌های A و B یکسان‌اند؟ به عبارت دیگر آیا عددی متعلق به یکی از مجموعه‌های A یا B وجود دارد که در دیگری نباشد! اگر چنین عددی را یافتیم آن‌گاه A و B مساوی نیستند! مثلاً: دو مجموعه $A = (1, 2)$ و $B = [1, 2)$ مساوی نیستند، زیرا عدد 1 در B هست ولی در A نیست.

ب) ابتدا بازه‌های A و B را روی محور (نمایش هندسی) رسم کنیم. در این صورت اگر تمام عضوهای بازه A در B نیز وجود داشت آن‌گاه می‌گوییم $A \subseteq B$ است. در غیر این صورت حتی اگر یک عضو پیدا کردیم که در A بوده ولی در B نبود می‌گوییم $A \not\subseteq B$

🟢 مجموعه $A = (0, 1)$ زیرمجموعه $B = (-1, 2)$ است زیرا:



🟢 مجموعه $A = (0, 2]$ زیرمجموعه $B = (-2, 1]$ نیست.



زیرا اعدادی مانند $1/5$ یا 2 یا ... در A هست ولی در B نیست!

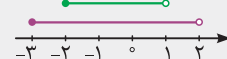
🟢 درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) $(-1, 4] = [-1, 4)$

ب) $(-2, 1) \subseteq [-3, 2)$

پاسخ: ❌ نادرست است، زیرا مثلاً عدد 4 در بازه $(-1, 4]$ هست ولی در بازه $[-1, 4)$ نیست! به‌طور مشابه -1 در $[-1, 4)$ هست ولی در $(-1, 4]$ نیست. پس این دو بازه برابر نمی‌باشند.

ب) درست است. زیرا با توجه به شکل زیر تمام اعضای $(-2, 1)$ در بازه $[-3, 2)$ هم هستند.



● درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ) $(-5, 1) \subseteq (-\infty, 1]$

ب) $(-8, 1) \subseteq (-8, 1)$

پاسخ نهایی

آ) درست ب) نادرست

منتخب مدارس آمل



منتخب مدارس رشت

محاسبه
مجموعه‌هایی مانند
 $A \cap B$ ، $A \cup B$
و... از روی A و B

فرض کنید دو یا چند مجموعه مانند A و B داده شده و از ما می‌خواهند مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ یا هر مجموعه دیگری را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسیم. برای حل این سوالات ابتدا مجموعه‌های داده شده را روی محور رسم می‌کنیم. سپس خواسته مسئله را از روی محور می‌یابیم.

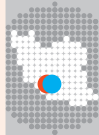
● اگر $A = (1, 4]$ و $B = [-1, 2]$ باشد، حاصل $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ و $B - A$ را بیابید.

پاسخ نهایی

$$A \cup B = [-1, 4], A \cap B = (1, 2]$$

$$B - A = [-1, 1], A - B = [2, 4]$$

منتخب مدارس شیراز



منتخب مدارس شیراز

اگر $A = [-2, 1)$ و $B = [0, 2]$ باشند، حاصل عبارات زیر را به کمک رسم بازه‌ها روی محور پیدا کنید. پ) $A - B$ ب) $A \cup B$ آ) $A \cap B$ ت) $B - A$ ث) $A - [-1, 0)$

پاسخ برای هر قسمت مجموعه‌های A و B را روی محور رسم کرده و خواسته مسئله را با توجه به آن‌ها می‌یابیم:

آ) $A \cap B$: قسمت‌های مشترک دو بازه را انتخاب می‌کنیم که بازه $[0, 1)$ می‌شود.

! عدد ۱ در مجموعه B هست ولی در A نیست، لذا در مجموعه $A \cap B$ هم حضور ندارد.

ب) $A \cup B$: تمام قسمت‌های A و B را انتخاب می‌کنیم که بازه $[-2, 2]$ می‌شود.

پ) $A - B$: قسمت مشترک A و B را از A حذف می‌کنیم:

$$A - B = A - (A \cap B) = [-2, 1) - [0, 1) = [-2, 0)$$

ت) $B - A$: قسمت مشترک A و B را از B حذف می‌کنیم:

$$B - A = B - (A \cap B) = [0, 2] - [0, 1) = [1, 2]$$

ث) برای محاسبه $A - [-1, 0)$ باید اشتراک A و $[-1, 0)$ که همان $[-1, 0)$ است را از مجموعه A حذف کنیم:

$$A - [-1, 0) = [-2, 1) - [-1, 0) = [-2, -1) \cup [0, 1)$$

عدد -۱ چون در $[-1, 0)$ وجود دارد پس در جواب نهایی نباید وجود داشته باشد پس کنار آن پرانتز قرار دادیم و عدد صفر چون در $[-1, 0)$ وجود نداشت پس در جواب نهایی، وجود دارد لذا کنار آن «]» آوردیم.

در این مسائل چون α متعلق به بازه $(a, b]$ است، می‌توان نوشت $a < \alpha \leq b$ سپس نامعادله‌های $a < \alpha$ و $\alpha \leq b$ را جداگانه حل می‌کنیم و بین جواب‌های حاصل اشتراک می‌گیریم.

اگر بگویند
متعلق به بازه
 $(a, b]$ است، باید
چیکار کنیم؟

● اگر عدد $2a + 1$ عضو بازه $(3, 5)$ باشد، محدوده a را بیابید.

پاسخ نهایی $1 < a < 2$

منتخب مدارس تهران

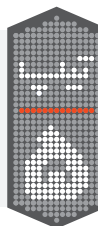
اگر عدد ۴ متعلق به بازه $(2m - 2, 2m + 6)$ باشد، محدوده m را بیابید.

پاسخ با توجه به شکل باید داشته باشیم:



$$2m - 2 < 4 < 2m + 6 \Rightarrow \begin{cases} 2m - 2 < 4 \Rightarrow 2m < 6 \Rightarrow m < 3 \\ 4 < 2m + 6 \Rightarrow -2 < 2m \Rightarrow -1 < m \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 3$$

منتخب مدارس یزد



صحبت از طول بازه (a, b) می شود.

می دانیم طول بازه های (a, b) ، $(a, b]$ ، $[a, b)$ و $[a, b]$ از فرمول $b - a$ به دست می آید. پس با توجه به این فرمول، طول بازه داده شده را حساب می کنیم. از طرفی حواستان باید به این نکته باشد که $a < b$ است! (انتهای بازه بزرگتر از ابتدای بازه است.) از همین نکته هم می تواند سؤال مطرح شود.

اگر طول بازه $[2m - 1, 4m + 1]$ برابر ۴ باشد. مقدار m را بیابید.

پاسخ

$$4 = \text{طبق فرض} \quad 4m + 1 - (2m - 1) = 4 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

به ازای $m = 1$ بازه به صورت $[1, 5]$ در می آید که چون $5 > 1$ است، پس m قابل قبول است.

منتخب مدارس یاسوج

منتخب مدارس یاسوج

پاسخ نهایی

● طول بازه $(2 + a, 6 + a)$ چقدر است؟

در بازه $(m + 2, 4)$ ، محدوده m را بیابید.

پاسخ

می دانیم ابتدای بازه باید کوچکتر از انتهای بازه باشد. پس داریم:

$$m + 2 < 4 \Rightarrow m < 2$$

منتخب مدارس زابل

منتخب مدارس تهران

پاسخ نهایی

● در بازه $(m, 2m + 1)$ ، محدوده m را بیابید.

مجموعه های متناهی و نامتناهی



مجموعه ای را که تعداد اعضای آن برابر با یک عدد حسابی باشد، «مجموعه متناهی» می نامند. مثلاً: مجموعه $\{1, 2, 4, 6\}$ ، متناهی است، زیرا چهار عضو دارد. هم چنین مجموعه ای را که متناهی نباشد، «مجموعه نامتناهی» می گویند. تعداد اعضای مجموعه های نامتناهی از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگتر است. مجموعه اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ ، مجموعه اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ و تعداد اعداد گویا یا گنگ در یک بازه، مجموعه های نامتناهی و مجموعه مولکول های موجود در جهان هستی، مجموعه ای متناهی است. هم چنین مجموعه تهی نیز مجموعه ای است که صفر عضو دارد و لذا مجموعه ای متناهی می باشد.

آقا اجازه! آخه مولکول های جهان هستی که خیلی زیادند! چطوری می گن متناهی پس؟



پاسخ

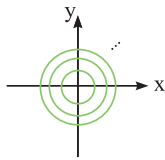
قلی جان، مگه به تو گفتن برو بشمر! درسته که خیلی زیادند، اما با داشتن امکانات لازم و صرف وقت بسیار، ممکنه که بشه تعداد اون ها رو به دست آورد. پس یادت باشه تعداد اعضای بعضی از مجموعه های متناهی ممکنه خیلی زیاد باشه، ولی نباید به خاطر این، اونا رو مجموعه نامتناهی بگیریم!

سؤال دانش پژوه! قلی اکبرزاده

در جدول زیر مثال های مهم کتاب درسی که در امتحانات بارها سوال داده اند را یکجا آورده ایم.

مجموعه	توضیح	نوع مجموعه	مجموعه
اعداد اول یک رقمی	$\{2, 3, 5, 7\}$	متناهی	انسان های روی زمین
اعداد طبیعی فرد	$\{1, 3, 5, \dots\}$	نامتناهی	سلول های عصبی مغز یک انسان
اعداد طبیعی ۲ رقمی	$\{10, \dots, 99\}$	متناهی	تمام دایره های به مرکز مبدأ
مضرب های طبیعی عدد ۱۰	$\{10, 20, \dots\}$	نامتناهی	دانش آموزان مدرسه شما
شمارنده های طبیعی عدد ۱۰	$\{1, 2, 5, 10\}$	متناهی	درخت های جنگل آمازون
بازه $(0, 1)$	بی شمار عدد حقیقی در بازه وجود دارد.	نامتناهی	کسرهای مثبت با صورت یک
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$	$A = \emptyset$ پس متناهی است.	متناهی	مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب

توضیح جدول:



۱ مطابق شکل مقابل، بی شمار دایره به مرکز مبدأ و با شعاع‌های مختلف r (r : عددی حقیقی غیرصفر) می‌توان رسم کرد.

۲ کسرهای مثبت با صورت یک را به صورت $\frac{1}{x}$ در نظر می‌گیریم که x می‌تواند هر عدد حقیقی مثبتی باشد. پس بی شمار کسری می‌توان نوشت.

۳ تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب، 6.022×10^{23} عدد است که با این که عدد بزرگی می‌باشد ولی قابل شمارش است پس این مجموعه متناهی است. **!** از این قسمت می‌توان به صورت جای خالی یا صحیح غلط، سوال مطرح کرد.

در فعالیت صفحه ۷ کتاب درسی خواسته شده در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ اظهار نظر کنید و سپس در مورد متناهی یا نامتناهی بودن $\mathbb{Q}$ سؤال کرده است تا به نتیجه بسیار مهم زیر برسید:

➡ اگر A دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آن‌گاه A حتماً یک مجموعه نامتناهی است. با این نتیجه، مثلاً $\mathbb{Z}$ نامتناهی است، زیرا $\mathbb{N}$ که زیرمجموعه آن است، نامتناهی است.

صفحه ۷

کتاب
درسی
زیر ذره بین



تألیفی

با آوردن سه زیرمجموعه نامتناهی برای $\mathbb{Z}$ ، نشان دهید که $\mathbb{Z}$ نامتناهی است.

پاسخ $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ و اعداد صحیح منفی

در ادامه انواع تیپ‌های مهمی که از این درس می‌تواند در امتحان مطرح شود را با هم بررسی می‌کنیم:

فرض کنید دو یا چند مجموعه متناهی یا نامتناهی مانند A و B را به ما داده و در مورد متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های مختلفی مانند $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ یا هر مجموعه دیگری سؤال می‌کنند.

☀ برای پاسخگویی به این سؤالات جدول زیر کمک خیلی بزرگی به شما خواهد کرد. جدول زیر به شما نشان می‌دهد که اگر A و B متناهی یا نامتناهی باشد، اوضاع از چه قرار است. خوب دقت کنید و به دلایل متناهی یا نامتناهی بودن آن‌ها فکر کنید:

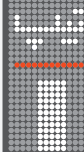
مجموعه‌ها	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$B - A$
A و B هر دو متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
A متناهی و B نامتناهی	متناهی	نامتناهی	متناهی	نامتناهی
A و B هر دو نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

برای حالتی که هر دو A و B نامتناهی باشند، به مثال‌های زیر توجه کنید:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$B - A$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{W}$	نامتناهی: $\mathbb{N}$	نامتناهی: $\mathbb{W}$	متناهی: $\emptyset$	متناهی: $\{1\}$
اعداد صحیح منفی	$\mathbb{N}$	متناهی: $\emptyset$	نامتناهی: $\mathbb{Z} - \{0\}$	نامتناهی: اعداد صحیح منفی	نامتناهی: $\mathbb{N}$

! از این قسمت هم می‌توان سؤال به صورت صحیح و غلط یا جای خالی در امتحان مطرح نمود.

بررسی متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های مختلف $A \cup B$ ، $A \cap B$ یا ...



درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

(آ) اگر A مجموعه اعداد طبیعی کم‌تر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد، آن‌گاه $A \cup B$ نامتناهی است.

(ب) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، مجموعه $A - B$ حتماً متناهی است.

(پ) اگر $B - A$ متناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند نامتناهی باشد.

پاسخ (آ) درست است. زیرا $A = \{1, 2, 3\}$ متناهی و $B = \{3, 2, \dots\}$ نامتناهی است، بنابراین طبق جدول، $A \cup B$ نامتناهی است.

(ب) نادرست است. مثلاً اگر $A = \mathbb{N}$ و B اعداد زوج طبیعی، آن‌گاه $A - B$ ، مجموعه اعداد فرد طبیعی $\{1, 3, 5, \dots\}$ است که نامتناهی است.

(پ) درست است. مثلاً اگر B ، مجموعه نامتناهی $\mathbb{W}$ و A ، اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت $B - A = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ متناهی است ولی B نامتناهی شده است.

اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد و B مجموعه اعداد اول باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و غیر تهی است؟

(آ) $B - A$ (ب) $A - B$
(پ) $A \cap B$ (ت) $A - (A \cup B)$

پاسخ ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

سپس متناهی یا نامتناهی بودن قسمت‌های داده شده را بررسی می‌کنیم:

(آ) $B - A = \{2\} \Rightarrow$ متناهی و غیر تهی

(ب) $A - B = \{1, 9, 15, \dots\} \Rightarrow$ نامتناهی

(پ) $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, \dots\} \Rightarrow$ نامتناهی

(ت) $A - (A \cup B) = \{1, 3, 5, 7, \dots\} - \{1, 2, 3, 5, 7, \dots\} = \emptyset \Rightarrow$ متناهی

البته می‌توان گفت $A \subseteq A \cup B$ است، پس $A - (A \cup B) = \emptyset$ و نیازی به محاسبه $A \cup B$ نیست!

● در مثال سمت راست، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های $C \cap B$ و $C \cup A$ را بررسی کنید.

پاسخ نهایی

$C \cap B$: متناهی و $C \cup A$: نامتناهی

منتخب مدارس گرگان

اگر $A = [-2, 100]$ ، $B = (-\infty, -2]$ و C مجموعه اعداد دو رقمی طبیعی مضرب ۳ باشد، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

(آ) $C \cup B$ (ب) $A \cap B$
(پ) $(A \cup B) \cap C$ (ت) $C - (A - B)$

پاسخ مجموعه‌های A و B نامتناهی و $C = \{12, 15, \dots, 99\}$ متناهی است.

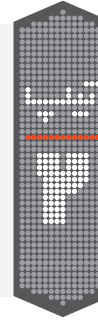
(آ) $C \cup B$: قطعاً نامتناهی:
 نامتناهی
 متناهی

(ب) $A \cap B = [-2, 100] \cap (-\infty, -2] = \{-2\}$: متناهی

(پ) $(A \cup B) \cap C$: قطعاً متناهی:
 نامتناهی نامتناهی
 نامتناهی متناهی

(ت) $C - (A - B) = C - ([-2, 100] - (-\infty, -2]) = C - (-2, 100] = C - \{-2\}$: متناهی:
 اشتراک A و B که $\{-2\}$ است
 متناهی نامتناهی
 را از A حذف می‌کنیم.

منتخب مدارس بوشهر



**بررسی وضعیت
متنهای یا
نامتنهای
بودن A و B
وقتی یکی
زیر مجموعه
دیگری است.**

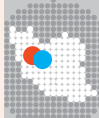
- ☀ فرض کنید $A \subseteq B$ باشد، در این صورت به جملات زیر خوب توجه کرده و آن‌ها را به خاطر بسپارید.
- ۱ اگر B متنهای باشد، A نیز متنهای است.
 - ۲ اگر A نامتنهای باشد، در مورد متنهای بودن یا نامتنهای بودن A نمی‌توان اظهار نظر کرد.
 - ۳ اگر A نامتنهای باشد، B نیز نامتنهای است.
 - ۴ اگر A متنهای باشد، در مورد متنهای بودن یا نامتنهای بودن B نمی‌توان اظهار نظر کرد.

● اگر $A \subseteq B$ و $A = (-\infty, 4]$ ، متنهای یا نامتنهای بودن مجموعه B را بررسی کنید و برای آن مثال بزنید.

پاسخ نهایی B می‌تواند متنهای یا نامتنهای

باشد. مثلاً: $B = \{3\}$ یا $B = (-\infty, 0]$

منتخب مدارس آراک



منتخب مدارس همدان

✓ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

(آ) اگر $A - B$ نامتنهای باشد، آن‌گاه $A \cup B$ نامتنهای است.

(ب) اگر $A \cap B$ نامتنهای باشد، آن‌گاه A می‌تواند متنهای باشد.

(پ) اگر $A \subseteq B$ و $B = [1, +\infty)$ باشد، آن‌گاه A حتماً نامتنهای است.

پاسخ (آ) درست است. می‌دانیم $(A - B) \subseteq A \cup B$ است. پس چون $A - B$ نامتنهای است، لذا طبق درسنامه مجموعه $A \cup B$ نیز نامتنهای خواهد بود.

(ب) نادرست است. زیرا $A \cap B \subseteq A$ ، پس وقتی $A \cap B$ نامتنهای است، پس A نیز نامتنهای بوده و نمی‌تواند متنهای باشد.

(پ) نادرست است. مجموعه $B = [1, +\infty)$ نامتنهای است و چون $A \subseteq B$ است، در مورد متنهای یا نامتنهای بودن A نمی‌توان اظهار نظر کرد. مثلاً: A را می‌توان مجموعه متنهای $A = \{1\}$ یا مجموعه نامتنهای $A = [2, +\infty)$ در نظر گرفت.

پرسش‌های تشریحی

منتخب مدارس کشور

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

«

- ۱ اگر $A = [-1, 2]$ و $B = [-2, 3]$ باشد، آنگاه $B - A = \dots$ است.
- ۲ $W - (N \cap Z) = \dots$ و $(Q - Q') \cap Z = \dots$
- ۳ طول بازه $[-4, \frac{3}{4}]$ برابر $\dots$ است.
- ۴ اگر عدد $2m + 1$ متعلق به بازه $(3, 5]$ باشد، محدوده m برابر $\dots$ است.
- ۵ اگر $B - A$ نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه B قطعاً $\dots$ است. (متناهی - نامتناهی)
- ۶ اگر $W - B$ متناهی باشد، آنگاه مجموعه B قطعاً $\dots$ است. (متناهی - نامتناهی)
- ۷ اگر $A = \{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{\frac{x}{\lambda} \mid x \in \mathbb{N}\}$ باشد، آنگاه مجموعه $A \cap B$ قطعاً $\dots$ است. (متناهی - نامتناهی)
- ۸ اگر A مجموعه اعداد حسابی و B مجموعه اعداد فرد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ باشد، آنگاه $A - B$ و $B - A$ $\dots$ است. (متناهی - نامتناهی)
- ۹ اگر B دارای یک زیرمجموعه نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه B یک مجموعه $\dots$ خواهد بود. (متناهی - نامتناهی)

منتخب مدارس کشور

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

«

- | | | | |
|---|----|--|----|
| $3 \in (1, 3)$ | ۲۰ | $\sqrt{36} \in Q'$ | ۱۰ |
| $a \in \{a, b\}$ | ۲۱ | $-\frac{5}{6} \notin Z$ | ۱۱ |
| $2 \in \{1, 3\}$ | ۲۲ | $-\frac{\sqrt{7}}{8} \in Q$ | ۱۲ |
| $[2, 5) = (2, 5]$ | ۲۳ | $W \cap N = N$ | ۱۳ |
| $(1, 2) \subseteq [1, 2) \subseteq [1, 2]$ | ۲۴ | $W - Z = \emptyset$ | ۱۴ |
| $(-1, 4] \subseteq [-1, 4)$ | ۲۵ | $Q' \cap N = N$ | ۱۵ |
| $[a, b] \subseteq (a, b)$ | ۲۶ | $Q' - \mathbb{R} = Q$ | ۱۶ |
| $\{1, 2\} \subseteq (\sqrt{2} - 1, \sqrt{6})$ | ۲۷ | $N \cup ((Z - N) \cap W) = W$ | ۱۷ |
| $(3, 6) \subseteq \{3, 6\}$ | ۲۸ | $2 \in [\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2})$ | ۱۸ |
| $\pi \in (1, 5) \cap (0, 4)$ | ۲۹ | $\emptyset \subseteq (-1, 2]$ | ۱۹ |
| $(1, 4) \cap (5, 7) \subseteq \{5\}$ | ۳۰ | | |

منتخب مدارس کشور

با توجه به بحث مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

«

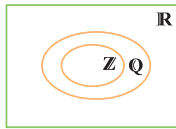
- ۳۱ مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای است که تعداد اعضای آن از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.
- ۳۲ اگر A و B متناهی باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ متناهی هستند.
- ۳۳ اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، $A \cup B$ نامتناهی و $A \cap B$ متناهی است.
- ۳۴ اگر A و B نامتناهی باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ نامتناهی هستند.
- ۳۵ اگر $A \cap B$ متناهی باشد، A و B و $A \cup B$ متناهی هستند.
- ۳۶ اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، A و B و $A \cup B$ نامتناهی هستند.
- ۳۷ اگر $A \cup B$ متناهی باشد، A و B متناهی و $A \cap B$ نامتناهی است.
- ۳۸ اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، A و B نامتناهی و $A \cap B$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
- ۳۹ اگر $A - B$ متناهی باشد، A متناهی است.
- ۴۰ اگر $A - B$ نامتناهی باشد، A حتماً نامتناهی است ولی B و $B - A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

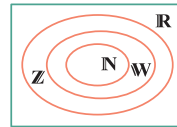
۴۱

مجموعه‌های داده شده را روی نمودار ون با رنگ کردن مشخص کنید.

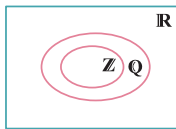
کتاب درسی



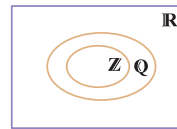
ب مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$



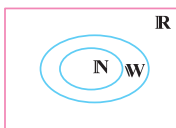
آ مجموعه اعداد صحیح منفی (غیرحسابی)



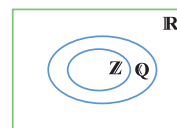
ت مجموعه $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$



پ مجموعه $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$



ج مجموعه اعداد حسابی غیرطبیعی



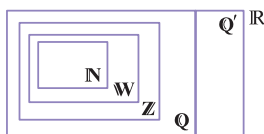
ث مجموعه اعداد گویای غیرصحیح

منتخب مدارس کشور

جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

۴۲

شماره سطر	بازه	نوع بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
۱	$(6, 8)$	باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 8\}$	
۲	_____	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 1\}$	_____
۳	$[-1, 1]$	_____	_____	_____
۴	$(-2, 3) \cup \{3, \sqrt{2}\}$	_____	_____	_____
۵	$(-\infty, 1] - \{1\}$	_____	_____	_____



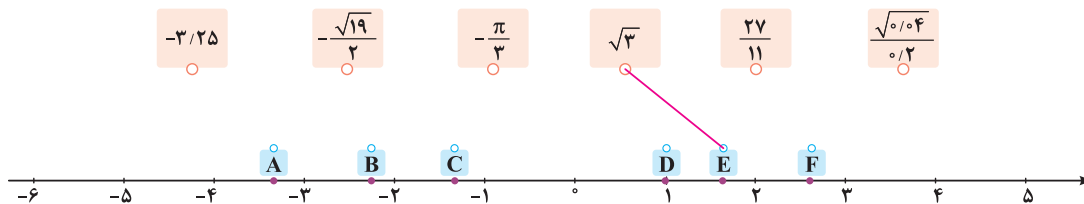
اعداد $\frac{3}{5}$ ، $-\frac{4}{9}$ ، $\sqrt{0.9}$ ، $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ، $-\frac{\pi}{5}$ ، $-\sqrt{49}$ ، $\frac{\sqrt{81}}{3}$ و ۰ را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

کتاب درسی

۴۳

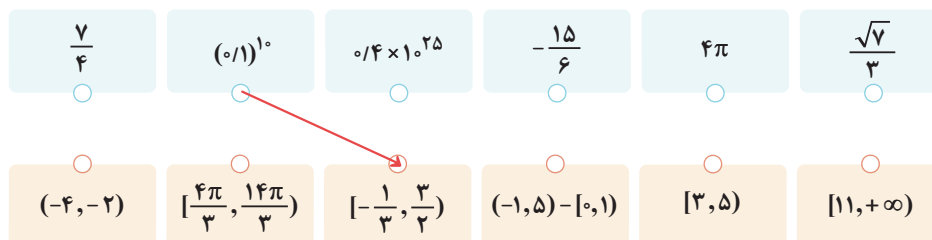
با توجه به نقاط مشخص شده روی محور، جای هر کدام از اعداد زیر را مانند نمونه به کمک فلش مشخص کنید. کدام یک از این اعداد گنگ هستند؟ دوران‌ها خط بکشید.

کتاب درسی



هر یک از اعداد واقع در سطر اول، عضو یک یا چند تا از بازه‌های واقع در سطر دوم هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید. (مانند نمونه)

کتاب درسی



منتخب مدارس اهواز

مجموعه‌های زیر را روی محور نشان داده و سپس آن‌ها را در صورت امکان به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.

۴۶

آ $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ ب $\mathbb{R} - [-2, 1)$ پ $\mathbb{Z} - \{-2, 2\}$ ت $\mathbb{Z} - [-2, 2)$

۴۷

در شکل‌های زیر، مجموعه‌هایی که نمایش هندسی آن‌ها روی محور رسم شده است را به صورت اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.



منتخب مدارس یزد

۴۸

حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.

- $(-\infty, a] \cap (a-1, +\infty)$ (ت)
 $(-\infty, 4) \cap (0, 2]$ (پ)
 $(-1, 2] \cap [1, +\infty)$ (ب)
 $(-3, 2) \cup [-4, 3]$ (آ)
- $(-\infty, 3) - (-1, 1]$ (ج)
 $(0, 3] - [1, +\infty)$ (ح)
 $(\mathbb{R} - [0, 2)) \cap (-1, 3]$ (ث)

منتخب مدارس کشور

۴۹

اگر $A = [-1, 2)$ و $B = (1, 3]$ و $C = [-2, 2]$ باشد، مجموعه‌های خواسته شده زیر را به کمک رسم آن‌ها روی محور بیابید. نوع بازه‌ها را در قسمت‌های (آ) تا (ت) مشخص کنید.

منتخب مدارس کشور

- $A \cap B$ (آ)
 $A \cup B$ (ب)
 $A - B$ (پ)
 $B - A$ (ت)
- $C - A$ (ث)
 $(C \cup B) - A$ (ح)
 $(C - A) \cup (A - B)$ (ج)

منتخب مدارس رشت

۵۰

اگر $3 \in (6x - 15, 5x - 7)$ باشد، محدوده x را به دست آورید.

منتخب مدارس یاسوج

۵۱

اگر $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ و $B = (-\infty, 5) \cap [-4, +\infty)$ باشد، مجموعه $A \cap B$ را بیابید.

منتخب مدارس ابهر

۵۲

اگر $[-2, 9] = [-1, b] \cup [a, 7]$ باشد، آن‌گاه a و b را بیابید.

منتخب مدارس ری

۵۳

اگر $\{a\} = (-\infty, \frac{1-m}{4}] \cap [-\frac{2m-1}{5}, +\infty)$ باشد، مقدار m و a را بیابید.

منتخب مدارس کاشان

۵۴

اگر $\mathbb{R} = (-\infty, \frac{3m+5}{7}] \cup (\frac{m-1}{2}, +\infty)$ باشد، محدوده m را پیدا کنید.

منتخب مدارس ساری

۵۵

اگر $[7, 16] = [7, 3a+1) \cup (a-2b, 9]$ شود، مقادیر a و b را بیابید. ($b \in \mathbb{Z}$)

منتخب مدارس ساری

۵۶

مقدار a را به گونه‌ای بیابید که مجموعه $\{3a\} \cup (a-2, 2a+1)$ ، بازه‌ای نیم‌باز باشد.

کتاب درسی

۵۷

فرض کنید A مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰ باشد.

(آ) یک زیرمجموعه متناهی و یک زیرمجموعه نامتناهی از A بنویسید.

(ب) مجموعه‌ای بنویسید که A زیرمجموعه آن باشد.

(پ) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از A بنویسید به طوری که $D \subseteq C$ باشد.

کتاب درسی

۵۸

فرض کنید $B \subseteq A$ باشد، آن‌گاه عبارات درست و نادرست را مشخص کنید.

(آ) اگر A متناهی باشد، لزوماً B نیز متناهی است.

(ب) اگر A نامتناهی باشد، لزوماً B نیز نامتناهی است.

(پ) اگر B نامتناهی باشد، لزوماً A نیز نامتناهی است.

(ت) اگر B متناهی باشد، مجموعه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

کتاب درسی

۵۹

بازه $(-2, 3)$ را در نظر بگیرید.

(آ) دو عدد گنگ و دو عدد گویا در این بازه نام ببرید.

(ب) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویا و گنگ موجود در این بازه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q و Q' چه می‌توان گفت؟

کتاب درسی

۶۰

برای هر کدام از قسمت‌های زیر، دو مجموعه نامتناهی A و B (در صورت وجود) مثال بزنید.

(آ) $A \cap B$ متناهی باشد.

(ب) $A \cap B$ نامتناهی باشد.

(پ) مجموعه $A \cap B$ عضوی نداشته باشد.

(ت) $A \cup B$ متناهی باشد.

(ث) $A \cup B$ نامتناهی باشد.

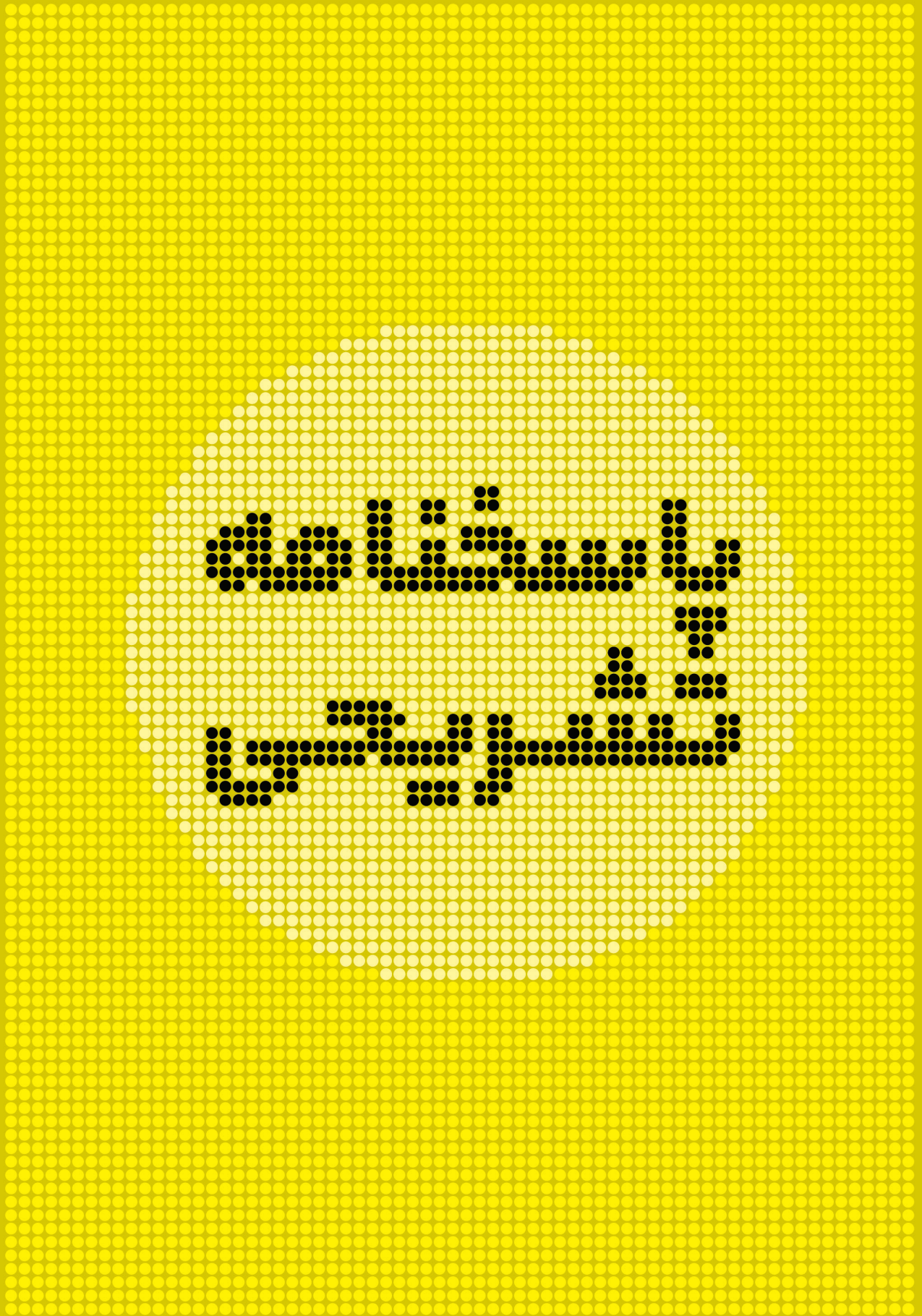
(ج) $B \subseteq A$ بوده و $A - B$ دو عضوی باشد.

منتخب مدارس تبریز

۶۱

اگر A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه نامتناهی باشد، متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

- $B - A$ (آ)
 $A - B$ (ب)
 $A - (A \cup B)$ (پ)
 $B - (A \cap B)$ (ت)



فصل

۱۰ نادرست است. زیرا $\sqrt{36} = 6$ عددی گویا بوده و عضو Q' نیست.

۱۱ درست است. زیرا $-\frac{5}{6}$ عدد صحیح نیست.

۱۲ نادرست است. زیرا $\sqrt{7}$ عددی گنگ است، پس $-\frac{\sqrt{7}}{8}$ که حاصل تقسیم عددی گنگ بر عددی گویا است، هم عددی گنگ و عضو Q' است نه Q .

۱۳ درست است. زیرا $N \subseteq W \Rightarrow N \cap W = N$

۱۴ درست است. زیرا $W \subseteq Z \Rightarrow W - Z = \emptyset$

۱۵ نادرست است. زیرا Q' اعداد گنگ و N اعداد طبیعی هیچ اشتراکی با هم ندارند. پس $Q' \cap N = \emptyset$.

۱۶ نادرست است. زیرا $Q' \subseteq R \Rightarrow Q' - R = \emptyset$

۱۷ درست است. زیرا:

$$N \cup ((Z - N) \cap W) = N \cup (\{0, -1, -2, \dots\} \cap \{0, 1, 2, \dots\}) \\ = N \cup \{0\} = W$$

۱۸ درست است زیرا:

$$9 < 15 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{15} < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{15}}{2} < 2$$

یعنی ۲ از $\frac{\sqrt{15}}{2}$ بزرگتر است.

$$16 < 17 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < 5 \Rightarrow 2 < \frac{\sqrt{17}}{2} < \frac{5}{2}$$

یعنی ۲ از $\frac{\sqrt{17}}{2}$ کوچکتر است.

پس ۲ متعلق به بازه $(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2})$ است.

۱۹ درست است. تهی زیر مجموعه هر مجموعه‌ای است.

۲۰ نادرست است. زیرا $(1, 3)$ بازه‌ای باز است و شامل ۱ و ۳ نیست.

۲۱ درست است. زیرا a عضو مجموعه دو عضوی $\{a, b\}$ است.

۲۲ نادرست است. زیرا مجموعه $\{1, 3\}$ دو عضو ۱ و ۳ را دارد و ۲ عضو آن نیست.

$$\begin{aligned} B - A &= [-2, 3] - [-1, 2] \\ &= [-2, -1) \cup [2, 3] \end{aligned}$$

$$W - (N \cap Z) \stackrel{N \subseteq Z \Rightarrow N \cap Z = N}{=} W - N \\ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$$

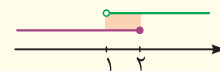
$$(Q - Q') \cap Z = (Q - (\overbrace{Q \cap Q'}^{\emptyset})) \cap Z = Q \cap Z \stackrel{Z \subseteq Q}{=} Z$$

$$[-4, \frac{3}{2}) \Rightarrow \text{طول بازه} = \frac{3}{2} - (-4) = \frac{3}{2} + 4 = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$2m + 1 \in (3, 5] \Rightarrow 3 < 2m + 1 \leq 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 < 2m + 1 \Rightarrow 2 < 2m \Rightarrow 1 < m \\ \text{و} \\ 2m + 1 \leq 5 \Rightarrow 2m \leq 4 \Rightarrow m \leq 2 \end{cases}$$

بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم که جواب برابر $1 < m \leq 2$ می‌شود.



۵ چون $B - A \subseteq B$ است و $B - A$ نامتناهی است، پس B نیز نامتناهی خواهد بود.

۶ اگر $W - B$ متناهی باشد، پس حتماً B نامتناهی بوده است، زیرا اگر B متناهی باشد، $W - B$ نامتناهی می‌شود که خلاف فرض است.

$$A = \{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N}\} \stackrel{x=1,2,3,\dots}{=} A = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

$$B = \{\frac{x}{8} \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$\stackrel{x=1,2,3,\dots}{=} B = \{\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \dots\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\} \Rightarrow A \cap B \text{ متناهی است.}$$

۸ $A = W$ نامتناهی و B متناهی است. پس $A - B$ نامتناهی و $B - A$ متناهی است.

۹ طبق درسنامه اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، B نیز نامتناهی خواهد بود.

۳۷ نادرست است. اگر $A \cup B$ متناهی باشد چون $A, B \subseteq A \cup B$ ، نتیجه می‌گیریم که A و B نیز متناهی و در نتیجه $A \cap B$ نیز متناهی است نه نامتناهی!

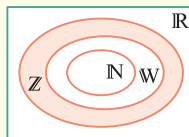
۳۸ نادرست است. مثلاً اگر $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ آن‌گاه $A \cup B = \mathbb{N}$ شده که نامتناهی است (شرط مسئله برقرار است). درحالی‌که A متناهی بود! پس نتیجه مهم این است که اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، آن‌گاه حداقل یکی از دو مجموعه A یا B باید نامتناهی باشد و لزومی ندارد که هر دوی A و B نامتناهی باشد. البته $A \cap B$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً با توجه به شرط $A \cup B$ نامتناهی، اگر $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{W}$ باشد. آن‌گاه $A \cap B = \mathbb{N}$ شده که نامتناهی است و اگر $A = \{1\}$ و $B = \mathbb{N}$ باشد، $A \cap B$ برابر $\{1\}$ شده که متناهی است.

۳۹ نادرست است. مثلاً اگر $A = \mathbb{W}$ و $B = \mathbb{N}$ باشد، در این صورت $A - B = \{0\}$ متناهی است ولی A نامتناهی بود.

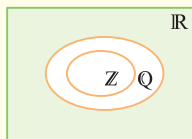
۴۰ درست است. زیرا $A - B \subseteq A - B$ بوده و اگر $A - B$ نامتناهی باشد، با توجه به درسنامه، A نیز نامتناهی خواهد بود. برای بررسی وضعیت B ، فرض کنید، $A = \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه B می‌تواند مثلاً مجموعه متناهی $\{1\}$ باشد یا مجموعه نامتناهی $\mathbb{N}$. در هر دو حالت $A - B$ نامتناهی است. هم‌چنین در حالتی که B متناهی باشد، آن‌گاه $B - A$ هم متناهی خواهد بود. چون زیرمجموعه آن است و در حالتی که B نامتناهی باشد، چون A هم نامتناهی است $B - A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۴۱

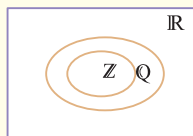
الف) مجموعه اعداد صحیح منفی $\{-1, -2, \dots\}$



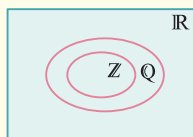
ب) اعداد گنگ $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$



پ) $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$ اعداد گنگ با اعداد گویا اشتراکی ندارد پس جایی را نمی‌توان رنگ کرد.



ت) کل اعداد حقیقی = (اعداد گنگ) $\cup$ (اعداد گویا) $= \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$



۲۳ نادرست است. زیرا مثلاً عدد ۵ عضو مجموعه $(2, 5]$ نیست ولی عضو مجموعه $[2, 5)$ است!

۲۴ درست است.

۲۵ نادرست است. زیرا عدد ۴ عضو مجموعه $[-1, 4)$ است. پس اگر این مجموعه بخواهد زیرمجموعه $[-1, 4)$ باشد، مجموعه $[-1, 4)$ هم باید ۴ داشته باشد در حالی‌که این‌طور نیست!

۲۶ نادرست است. زیرا اعداد a و b در مجموعه $[a, b]$ هستند ولی در مجموعه (a, b) حضور ندارند.

۲۷ درست است. زیرا $\sqrt{6}$ از ۲ بزرگتر و $1/4 - 1 = 0/4 - 1 = \sqrt{2} - 1$. پس بازه $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{6})$ شامل اعداد ۱ و ۲ است، پس مجموعه دو عضوی $\{1, 2\}$ زیرمجموعه $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{6})$ است.

۲۸ نادرست است. زیرا مجموعه $\{3, 6\}$ تنها دو عضو ۳ و ۶ را دارد، در حالی‌که مجموعه $(3, 6)$ شامل تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۶ است. پس مجموعه $(3, 6)$ نمی‌تواند زیرمجموعه مجموعه دو عضوی $\{3, 6\}$ باشد.

۲۹ درست است. مجموعه $(1, 4) \cap (0, 4) = (1, 4)$ و چون $\pi \approx 3/14$ پس π عضو این مجموعه است.

۳۰ درست است. مجموعه $(1, 4) \cap (5, 7) = \emptyset$ بوده و $\emptyset$ زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

۳۱ درست است.

۳۲ درست است.

۳۳ درست است. زیرا $B \subseteq A \cup B$ و چون B نامتناهی است، پس $A \cup B$ هم نامتناهی می‌شود و چون $A \cap B \subseteq A$ است و A متناهی است پس $A \cap B$ نیز متناهی خواهد بود.

۳۴ نادرست است. زیرا $A \cap B$ می‌تواند نامتناهی یا متناهی باشد. (به مثال درسنامه رجوع کنید). البته $A \cup B$ نامتناهی است.

۳۵ نادرست است. زیرا مثلاً اگر A مجموعه اعداد صحیح نامثبت و B مجموعه اعداد حسابی باشد آن‌گاه $A \cap B = \{0\}$ متناهی است ولی A و B و $A \cup B$ نامتناهی هستند.

۳۶ درست است. زیرا $A \cap B$ زیر مجموعه هم A و هم B است. پس اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، دو مجموعه A و B نیز نامتناهی و در نتیجه $A \cup B$ نیز نامتناهی است.

۴۵ ● عدد $\frac{7}{4} \approx 1.75$ عضو مجموعه زیر است:

$$(-1, 5) - [0, 1) = (-1, 0) \cup [1, 5)$$

● عدد $(0.1)^0$ ، عددی بین صفر و یک است. پس عضو مجموعه $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$ است.

● عدد 0.4×10^{25} عددی خیلی بزرگ است و لذا عضو مجموعه $(11, +\infty)$ است.

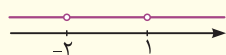
● عدد $-\frac{2}{5} = -\frac{15}{6}$ عضو بازه $(-4, -2)$ است.

● عدد $4\pi \approx 12.56 = 4(3.14)$ بوده که عضو بازه‌های $[11, +\infty)$ و $(\frac{4\pi}{3}, \frac{14\pi}{3})$ است.

دقت کنید 4π بزرگتر از $\frac{4\pi}{3}$ است و از $\frac{14\pi}{3}$ کوچکتر است زیرا $\frac{14\pi}{3} > 4\pi = \frac{12\pi}{3}$ پس 4π در داخل بازه $(\frac{4\pi}{3}, \frac{14\pi}{3})$ قرار دارد.

● عدد $\frac{\sqrt{7}}{3} \approx \frac{2.6}{3}$ حدود $\frac{2}{3}$ است. لذا عضو بازه $[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$ می‌باشد.

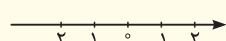
۴۶ آ) $\mathbb{R} - \{-2, 1\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$



ب) $\mathbb{R} - [-2, 1) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$

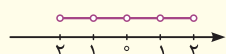


پ) $\{-2, 2\} - \mathbb{Z} = \emptyset$



این قسمت را نمی‌توان به عنوان اجتماع بازه‌ها نوشت.

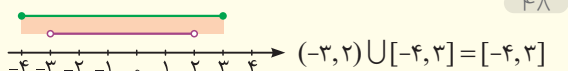
ت) $[-2, 2) - \mathbb{Z} = (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$



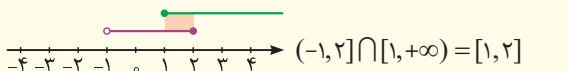
۴۷ آ) $[-1, 1) \cup [2, +\infty)$

ب) $(-\infty, -2] \cup [-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, 3]$

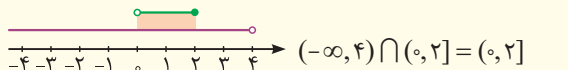
۴۸ آ) $(-3, 2) \cup [-4, 3] = [-4, 3]$



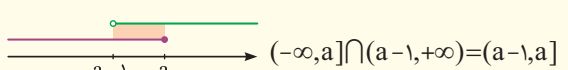
ب) $(-1, 2] \cap [1, +\infty) = [1, 2]$



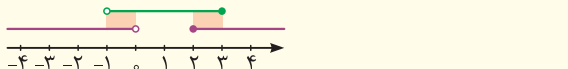
پ) $(-\infty, 4) \cap (0, 2] = (0, 2]$



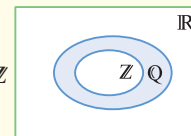
ت) $(-\infty, a] \cap (a-1, +\infty) = (a-1, a]$



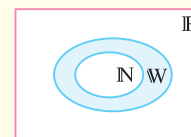
ث) $(\mathbb{R} - [0, 2)) \cap (-1, 3] = (-1, 0) \cup [2, 3]$



ث) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z} =$ مجموعه اعداد گویای غیر صحیح

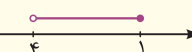


ج) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$ مجموعه اعداد حسابی غیر طبیعی

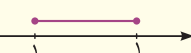


! این مجموعه (ناحیه آبی) تنها شامل عدد صفر می‌باشد.

۴۲ سطر (۲): $[-4, 1]$



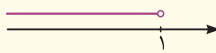
سطر (۳): $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ بازه بسته: سطر (۳)



سطر (۴): $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$ نیم باز، $\{-2, 3\} \cup \{3, \sqrt{2}\} = (-2, 3]$



سطر (۵): $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ باز، $(-\infty, 1] - \{1\} = (-\infty, 1)$



۴۳ $\frac{\sqrt{81}}{3} = \frac{9}{3} = 3 \in \mathbb{N}$ و $-\sqrt{49} = -7 \in \mathbb{Z}$

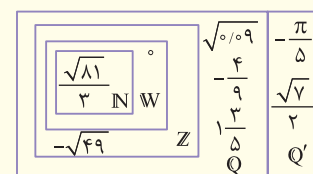
$-\frac{\pi}{5} \in \mathbb{Q}'$ و $\frac{\sqrt{7}}{2} \in \mathbb{Q}'$

$\sqrt{0.09} = \sqrt{(0.3)^2} = 0.3 = \frac{3}{10} \in \mathbb{Q}$

$-\frac{4}{9} \in \mathbb{Q}$ و $1\frac{3}{5} = \frac{8}{5} \in \mathbb{Q}$ و $0 \in \mathbb{W}$

! می‌دانیم وقتی مثلاً می‌نویسیم $3 \in \mathbb{N}$ ، عدد سه، عضو $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{R}$ هم هست.

حال این اعداد را در محل مناسب در شکل می‌نویسیم:



۴۴ عدد $3/25$ را به نقطه A، عدد $4/2 = -2$ را به نقطه B، عدد $-\frac{\pi}{3} \approx -1.05$ را به نقطه C، عدد $\frac{\sqrt{0.04}}{0.2} = \frac{\sqrt{(0.2)^2}}{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1$ و عدد $\frac{27}{11} \approx 2.45$ را به نقطه D باید وصل کنیم. (دقت کنید اعداد $\sqrt{3}$ ، $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\sqrt{19}}{2}$ اعداد گنگ هستند.)

عدد $3/25$ را به نقطه A، عدد $4/2 = -2$ را به نقطه B، عدد $-\frac{\pi}{3} \approx -1.05$ را به نقطه C، عدد $\frac{\sqrt{0.04}}{0.2} = \frac{\sqrt{(0.2)^2}}{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1$ و عدد $\frac{27}{11} \approx 2.45$ را به نقطه D باید وصل کنیم. (دقت کنید اعداد $\sqrt{3}$ ، $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\sqrt{19}}{2}$ اعداد گنگ هستند.)

عدد $3/25$ را به نقطه A، عدد $4/2 = -2$ را به نقطه B، عدد $-\frac{\pi}{3} \approx -1.05$ را به نقطه C، عدد $\frac{\sqrt{0.04}}{0.2} = \frac{\sqrt{(0.2)^2}}{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1$ و عدد $\frac{27}{11} \approx 2.45$ را به نقطه D باید وصل کنیم. (دقت کنید اعداد $\sqrt{3}$ ، $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\sqrt{19}}{2}$ اعداد گنگ هستند.)

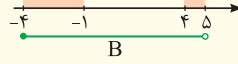
عدد $3/25$ را به نقطه A، عدد $4/2 = -2$ را به نقطه B، عدد $-\frac{\pi}{3} \approx -1.05$ را به نقطه C، عدد $\frac{\sqrt{0.04}}{0.2} = \frac{\sqrt{(0.2)^2}}{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1$ و عدد $\frac{27}{11} \approx 2.45$ را به نقطه D باید وصل کنیم. (دقت کنید اعداد $\sqrt{3}$ ، $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\sqrt{19}}{2}$ اعداد گنگ هستند.)

عدد $3/25$ را به نقطه A، عدد $4/2 = -2$ را به نقطه B، عدد $-\frac{\pi}{3} \approx -1.05$ را به نقطه C، عدد $\frac{\sqrt{0.04}}{0.2} = \frac{\sqrt{(0.2)^2}}{0.2} = \frac{0.2}{0.2} = 1$ و عدد $\frac{27}{11} \approx 2.45$ را به نقطه D باید وصل کنیم. (دقت کنید اعداد $\sqrt{3}$ ، $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\sqrt{19}}{2}$ اعداد گنگ هستند.)

۵۱ ابتدا مجموعه‌های $A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ و

$B = (-\infty, 5) \cap [-4, +\infty) = [-4, 5)$ را روی محور رسم می‌کنیم و سپس

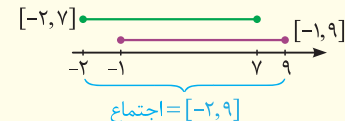
به کمک نمودار، اشتراک A و B را می‌یابیم.



$$\Rightarrow A \cap B = [-4, -1) \cup (4, 5)$$

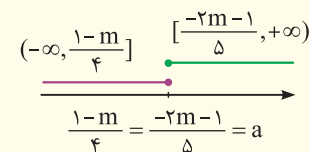
۵۲ طبق فرض $[a, 7] \cup [-1, b] = [-2, 9]$ شده است. پس b باید

برابر ۹ و a باید برابر -2 باشد، علت آن را روی محور بیان می‌کنیم:



۵۳ برای آن که اشتراک دو بازه $(-\infty, \frac{1-m}{4}]$ و $[\frac{-2m-1}{5}, +\infty)$

تنها یک عدد (a) شود. به ناچار باید وضعیت دو بازه به صورت زیر باشد:



حال معادله زیر را حل می‌کنیم تا m به دست آید:

$$\frac{1-m}{4} = \frac{-2m-1}{5} \Rightarrow 5 - 5m = -8m - 4$$

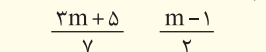
$$\Rightarrow 3m = -9 \Rightarrow m = -3$$

به ازای $m = -3$ دو بازه به صورت $(-\infty, 1]$ و $[1, +\infty)$ درمی‌آیند که

اشتراک آن‌ها ۱ می‌شود. پس $a = 1$.

۵۴ ابتدا دو مجموعه $(\frac{m-1}{2}, +\infty)$ و $(-\infty, \frac{3m+5}{7}]$ را روی

محور رسم می‌کنیم:



باتوجه به شکل، اگر قرار باشد اجتماع این دو مجموعه، $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد

حقیقی) شود، باید داشته باشیم:

$$\frac{3m+5}{7} \geq \frac{m-1}{2} \Rightarrow 2(3m+5) \geq 7(m-1)$$

$$\Rightarrow 6m + 10 \geq 7m - 7 \Rightarrow 17 \geq m$$

۵۵ اجتماع دو بازه $(a - 2b, 9)$ و $(7, 3a + 1)$ برابر $[7, 16]$ شده

است. پس حتماً $3a + 1$ برابر ۱۶ بوده و داریم:

$$3a + 1 = 16 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

از طرفی چون ابتدای بازه اجتماع عدد ۷ بوده، نتیجه می‌گیریم

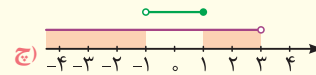
$7 \leq a - 2b$ می‌باشد. هم‌چنین انتهای بازه همیشه بزرگ‌تر از ابتدای

بازه است، پس در بازه $(a - 2b, 9)$ داریم: $a - 2b < 9$. بنابراین:

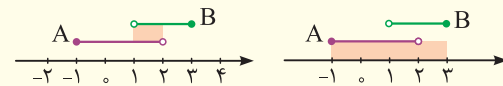
$$7 \leq a - 2b < 9 \xRightarrow{a=5} 7 \leq 5 - 2b < 9 \xRightarrow{-5} 2 \leq -2b < 4$$

$$\xRightarrow{\div(-2)} -1 \geq b > -2 \xRightarrow{b \in \mathbb{Z}} b = -1$$

$$\text{ج) } (-\infty, 3) - [1, +\infty) = (-\infty, 1)$$

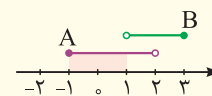


$$(-\infty, 3) - (-1, 1] = (-\infty, -1] \cup (1, 3)$$

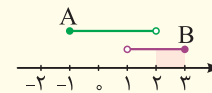


بازه بسته: $A \cup B = [-1, 3]$ بازه باز: $A \cap B = (1, 2)$ آ

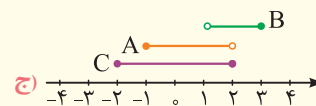
بازه بسته: $A - B = A - (A \cap B) = [-1, 2) - (1, 2) = [-1, 1]$ پ



بازه بسته: $B - A = B - (A \cap B) = (1, 3] - (1, 2) = [2, 3]$ ت



اشتراک را از C حذف می‌کنیم.
ث) $C - A = [-2, -1) \cup \{2\}$

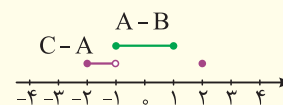


$$(C \cup B) - A = [-2, 3] - [-1, 2) = [-2, -1) \cup [2, 3]$$

$$\text{ج) } (C - A) \cup (A - B)$$

$$= [-2, -1) \cup \{2\} \cup [-1, 1] = [-2, 1] \cup \{2\}$$

با توجه به قسمت پ) با توجه به قسمت ث)



۵۰ چون عدد ۳ در بازه $(\Delta x - 7, 6x - 15)$ حضور دارد پس داریم:

$$\begin{cases} 6x - 15 < 3 \Rightarrow 6x < 18 \xRightarrow{\div 6} x < 3 \\ \text{و} \\ 3 < \Delta x - 7 \Rightarrow 10 < \Delta x \xRightarrow{\div 5} 2 < x \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{اشتراک}} \Rightarrow x \in (2, 3)$$



گاج

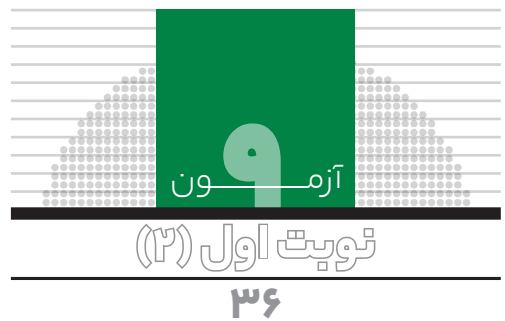
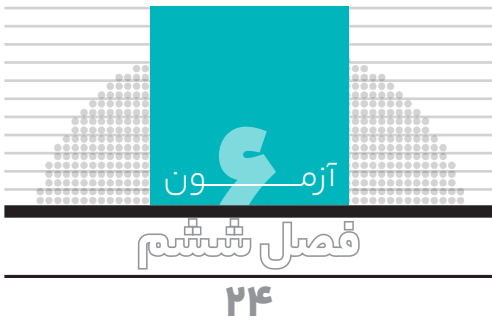
پیشرفتن

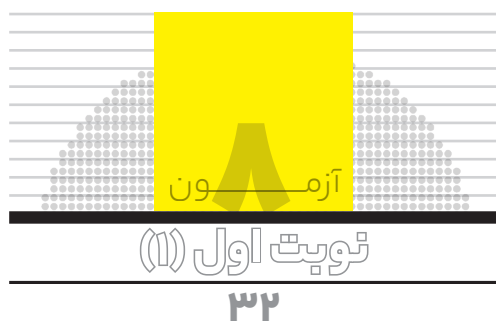
فرمول

پیشرفت

امتنان بہار

ریاضی دہم





آزمون ۱ فصل اول | زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

۱

جاهای خالی را با عبارات مناسب پُر کنید.

آ حاصل $(\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) - (Q \cup W)$ برابر با مجموعه است.ب اگر $A = [-1, 2) \cup [4, +\infty)$ و مجموعه مرجع، مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه $A' =$ پ جمله $(3n - 2)$ ام یک دنباله به صورت $\frac{2\sqrt{n+5}}{n^2+3}$ است. جمله هفتم این دنباله برابر است.ت در دنباله هندسی با جمله عمومی $t_n = \frac{2}{3 \times 3^n}$ ، قدرنسبت برابر است.

۲

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

آ $((-2, 3] \cap (-\infty, 2)) \subseteq [-2, 2]$ ب اگر $A \subseteq B$ و A' نامتناهی باشد، آن گاه A' نیز نامتناهی است.پ اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آن گاه $n(A - B') = 0$ است.

ت دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی و هم هندسی باشد.

۳

اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x \leq 4\}$ باشد، حاصل مجموعه‌های زیر رابه دست آورید. $A \cap B$ $A' - B$

۴

اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ مجموعه مرجع باشد و $A' = \{1, 2, 6\}$ و $B = \{5, 6, 7\}$ ، آن گاه حاصل $A \cap (A' - B')$ را بیابید.

۵

اگر $n(U) = 100$ ، $n(A') = 70$ ، $n(B) = 25$ و $n(B - A) = 19$ باشد، آن گاه مطلوب است؛ محاسبه: $n(A \cup B)$ $n(A' \cup B')$



۰/۷۵	۶ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. آ اعداد طبیعی ۲ رقمی ب تمام دایره‌های به مرکز مبدأ پ کسرهای مثبت با صورت یک
۷۵	۷ در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟
۱/۵	۸ در یک الگوی خطی جمله پنجم برابر ۳۲ و جمله دوازدهم برابر ۶۷ است. جمله چندم این الگو ۲۹۲ است؟
۱/۵	۹ جمله عمومی الگوی مقابل را نوشته و سپس جمله سی‌ام آن را بیابید. ۶, ۱۶, ۳۰, ۴۸, ...

۱۰

در الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل نهم را به دست آورید.



۱۱

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله دوم ۳۹ است. مجموع جملات نهم و دهم را بیابید.

۱۲

بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در شکل، واسطه حسابی درج کنید.



۱/۵

جمله سوم یک دنباله هندسی ۱۲ و جمله ششم آن ۹۶ است. در این صورت:

۱۳

آ جمله عمومی دنباله را بیابید.

ب جمله چندم دنباله ۳۰۷۲ است؟

۱

بین دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{33}$ سه واسطه هندسی مثبت درج کنید. (جمله اول)

۱۴

۱

قیمت دوچرخه‌ای ۱۰ میلیون تومان است. اگر دوچرخه دست دوم در هر سال ۵٪ نسبت به سال قبل،

۱۵

کاهش قیمت داشته باشد؛ آن‌گاه بعد از ۳ سال، به چه قیمتی می‌توان دوچرخه را فروخت؟