



وحدت در کبریا
میتواند از انچه بخواهد
بهر ما عطا کند



هندسه ۲

پایه یازدهم
رشته ریاضی و فیزیک

مؤلف
آرش عمید

فرمول یست

فرمول پست

۴

نمونه
امتحانی

۱۱۰۰

پرسش
تشریحی

۸۰

صفحه
درسنامه



9 786220 308751

تهران، میدان انقلاب
نیش بازارچه کتاب

www.gajmarket.com

سلام

آرش عمید هستم. از عنوان کتاب یعنی «فرمول بیست» معلوم است که این کتاب برای ۲۰ شدن شما در هر آزمون تشریحی و با هر سطحی، نوشته شده است. این کتاب حاصل تجربه ۲۵ سال تدریس من در درس هندسه و دیدن آزمون‌های نهایی مختلف در نظام قدیم و جدید آموزشی است.

در این کتاب مطالب به صورت زیر است:

۱. در درسنامه، خط به خط کتاب درسی و همه تمرینات، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی با ترتیب آموزشی آورده شده است.
۲. در تمرینات پایانی با عنوان خط به خط کتاب درسی، کل تمرینات، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌های کتاب درسی، تمام تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم و سؤالات امتحانات نهایی نظام جدید آمده است.
۳. در تمرینات تکمیلی، تمریناتی مشابه تمرینات کتاب درسی آمده است که شما را برای هر آزمونی آماده کند و تسلط شما را بر کتاب درسی تکمیل نماید.

فهرست

پاسخ	درسنامه و سؤالات
۱۵۴	۶ تا ۸۱
۲۱۹	۸۲ تا ۱۱۲
۲۴۲	۱۱۳ تا ۱۵۱

فصل اول: دایره

فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل سوم: روابط طولی در مثلث

بارم‌بندی درس هندسه ۲			
شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
اول		۱۴	۶
دوم	تا صفحه ۴۵	۶	۲
	صفحه ۴۵ به بعد	-	۵
سوم		-	۷
جمع		۲۰	۲۰

امتحان نهایی



۲۸۰	آزمون ۱: نوبت اول
۲۸۱	آزمون ۲: نوبت دوم
۲۸۲	آزمون ۳: نوبت دوم
۲۸۴	آزمون ۴: خرداد ماه ۱۴۰۳
۲۸۶	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۴

۱

بخش



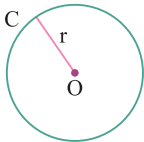
درستنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

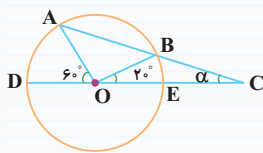
درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (قسمت اول)

هندسه یازدهم

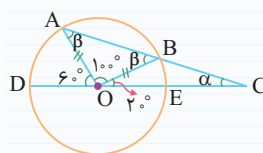


دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت در آن صفحه به فاصله مشخصی هستند. نقطه ثابت را مرکز دایره و فاصله مشخص را شعاع دایره می‌گویند. دایره C به مرکز O و شعاع r را با $C(O, r)$ نشان می‌دهند. (مثلاً وقتی می‌گویند $C(O, ۳)$ یعنی یک دایره داریم که مرکز آن نقطه O هستش و شعاعش برابر ۳ هست.)

نکته اگر در دایره مثلی دیده شود که دو ضلع از آن، دو شعاع دایره باشد، حتماً آن مثلث، متساوی الساقین است و برابر قرار دادن زاویه‌های نظیر دو ساق، کلید حل مسئله است. البته گاهی اوقات لازم است خودمان شعاع مناسبی را رسم کنیم تا مثلی ایجاد شود و بتوانیم به خواسته مسئله برسیم.



؟ در شکل مقابل، نقطه O مرکز دایره است. اندازه زاویه α را به دست آورید.



$$60^\circ + \angle AOB + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle AOB = 100^\circ$$

$$100^\circ + \beta + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = 80^\circ \Rightarrow \beta = 40^\circ$$

$$\beta = 20^\circ + \alpha \Rightarrow 40^\circ = 20^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

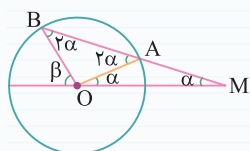
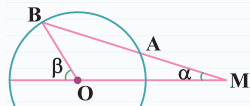
✓ زاویه $\angle AOB$ برابر است با:

مثلث AOB متساوی الساقین است، پس:

زاویه β زاویه خارجی مثلث OBC است، پس:

(تمرین ۶ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

؟ در شکل مقابل، دایره $C(O, R)$ مفروض است. اگر $MA = R$ باشد، نشان دهید $\beta = 3\alpha$.



✓ از O به A وصل می‌کنیم. چون $OA = R = MA$ است، پس مثلث OAM متساوی الساقین بوده و زاویه

$\angle AOM$ نیز برابر α است. از طرفی مثلث AOB نیز متساوی الساقین است زیرا $OA = OB = R$ می‌باشد. زاویه

$\angle OAB$ زاویه خارجی مثلث OAM است، پس:

$$\angle OAB = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \angle OAB = \angle OBA = 2\alpha$$

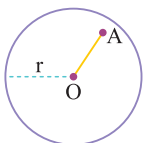
$$\beta = 2\alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha$$

β زاویه خارجی مثلث BOM است، پس:

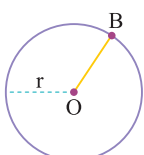
وضعیت نقطه و دایره: یک نقطه می‌تواند سه وضعیت نسبت به دایره داشته باشد:

Ⓐ اگر نقطه‌ای درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کم‌تر از شعاع دایره است.

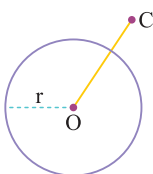
Ⓑ اگر نقطه‌ای روی دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است.



$OA < r \Leftrightarrow$ A درون دایره است.



$OB = r \Leftrightarrow$ B روی دایره است.



$OC > r \Leftrightarrow$ C بیرون دایره است.

پ اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره، بیش‌تر از شعاع دایره است.

؟ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

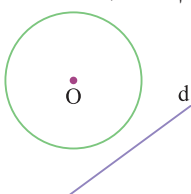
آ اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره از است.

ب اگر فاصله نقطه A تا مرکز دایره $C(O, 5)$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه نقطه A دایره است.

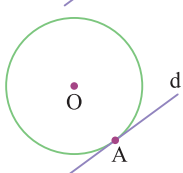
✓ آ بیشتر - شعاع دایره

ب درون

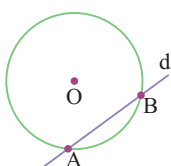
■ **اوضاع نسبی خط و دایره:** یک خط و یک دایره با توجه به تعداد نقاط مشترکی که دارند می‌توانند سه وضعیت مختلف نسبت به هم داشته باشند:



آ خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.



ب خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند. در این حالت می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

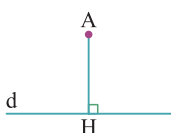


ب خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و می‌گوییم خط و دایره متقاطع هستند. توجه کنید که در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.

؟ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

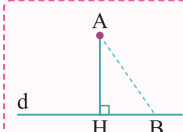
اگر فاصله مرکز دایره تا خطی کم‌تر از شعاع دایره باشد، آن‌گاه خط و دایره مشترک دارند.

✓ دو نقطه



■ **فاصله نقطه از خط:** خط d و نقطه A خارج از آن را در نظر بگیرید. از نقطه A بر خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصله نقطه A از خط d، برابر با طول پاره خط AH است.

می‌نامیم. فاصله نقطه A از خط d، برابر با طول پاره خط AH است.



$AB > AH$

نکته اگر از نقطه A بر خط d عمود کنیم و پای عمود را H بنامیم، آن‌گاه فاصله هر نقطه دیگری از خط d مانند B از

نقطه A بیش‌تر از فاصله نقطه H از نقطه A است.

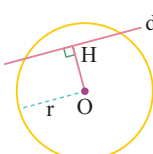
نتیجه اگر فاصله نقطه H روی خط d از نقطه A، کوچک‌تر از فاصله سایر نقاط خط d از نقطه A باشد، می‌توان نتیجه گرفت که AH بر خط d عمود است.

مثال که داستان فاصله نقطه از خط را فهمیدیم بریم اوضاع نسبی خط و دایره رو براساس فاصله نقطه از خط بررسی کنیم.

■ **اوضاع نسبی خط و دایره از دیدگاه فاصله نقطه از خط:** خط d و دایره $C(O, r)$ مفروض اند. اگر نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O بر خط d

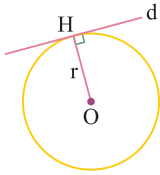
رسم می‌شود، آن‌گاه داریم:

آ اگر فاصله مرکز دایره تا خط d از شعاع دایره کم‌تر باشد، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند، یعنی متقاطع اند.



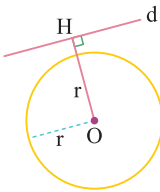
$OH < r \Leftrightarrow$ خط و دایره متقاطع اند.

پ) اگر فاصله مرکز دایره تا خط d برابر با شعاع دایره باشد، خط و دایره یک نقطه مشترک دارند، یعنی خط بر دایره مماس است.



خط بر دایره مماس است. $\Leftrightarrow OH = r$

پ) اگر فاصله مرکز دایره تا خط d بیش تر از شعاع دایره باشد، خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.



خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند. $\Leftrightarrow OH > r$

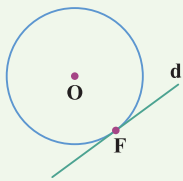
؟ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر خط و دایره یک نقطه مشترک داشته باشند، آن گاه فاصله مرکز دایره تا خط است.

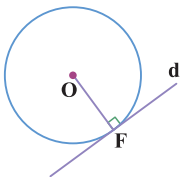
برابر شعاع دایره

• فرض کنید خط d بر دایره C در نقطه F مماس است. ثابت کنید شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F برهم عمودند. (فعالیت ۱ صفحه ۱ کتاب درسی)

اثبات



هر نقطه دیگری غیر از F روی خط d مانند B خارج از دایره قرار دارد. بنابراین فاصله آن تا مرکز دایره بیش تر از شعاع دایره خواهد بود؛ یعنی $OB > r$. از طرف دیگر نقطه F روی دایره قرار دارد، بنابراین فاصله اش تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است؛ یعنی $OF = r$. بنابراین می توان گفت که نقطه F نزدیک ترین نقطه خط d به نقطه O می باشد. حال اگر بخواهیم از O بر خط d عمود کنیم، از آن جایی که فاصله O تا پای عمود، کوتاه ترین فاصله نقاط خط d تا O خواهد بود، بنابراین پای عمود همان نقطه F می باشد. پس شعاع OF در نقطه F بر خط d عمود خواهد بود.



• خط d در نقطه F بر شعاع OF عمود است. ثابت کنید این خط با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است. (فعالیت ۲ صفحه ۱ کتاب درسی)

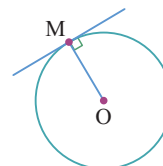
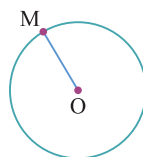
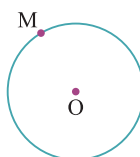
اثبات

اگر هر نقطه دیگری غیر از F مانند B روی خط d در نظر بگیریم، فاصله شان تا نقطه O از مقدار شعاع دایره یعنی OF بیش تر است (زیرا OF بر خط d عمود است)؛ بنابراین همه این نقاط خارج از دایره قرار دارند و خط و دایره تنها در نقطه F با هم مشترک هستند. پس می توان گفت که خط d بر دایره مماس است.

با توجه به دو مطلب قبلی می شه نتیجه پایینی گرفت:

نتیجه خط و دایره برهم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود باشد.

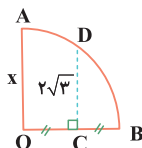
رسم مماس بر دایره $C(O, r)$ از نقطه M روی آن: می دانیم که خط مماس بر دایره $C(O, r)$ در نقطه M ، بر شعاع OM عمود خواهد بود. بنابراین ابتدا شعاع OM را رسم می کنیم و سپس در نقطه M بر OM عمود می کنیم تا خط مماس بر دایره در نقطه M رسم شود. (رسم خط عمود بر OM در نقطه M رو به کمک فک کش و پرگار در هندسه (۱) دیده ایم.)



خط‌به‌خط کتاب درسی

● جاهای خالی را با عبارت یا عبارات مناسب پر کنید.

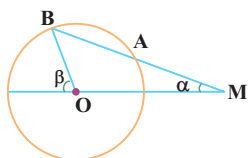
۱. مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت در آن صفحه به فاصله مشخص هستند را می‌نامند. نقطه ثابت را و فاصله مشخص را می‌گویند.
۲. در ربع دایره شکل مقابل مقدار x برابر است.



۳. اگر نقطه‌ای دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره کم‌تر از دایره است.
۴. اگر نقطه‌ای بیرون دایره باشد، فاصله آن تا دایره از شعاع دایره است.
۵. دایره $C(O, 3)$ و نقطه A مفروض‌اند. اگر $OA = 5$ باشد، آن‌گاه نقطه A دایره است.
۶. خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند. در این حالت می‌گوییم خط و دایره
۷. اگر خطی بر دایره‌ای مماس باشد، آن‌گاه خط و دایره نقطه مشترک دارند.
۸. در حالتی که خط و دایره دو نقطه مشترک دارند، خط را نسبت به دایره می‌نامیم.
۹. نزدیک‌ترین نقطه خط d از مرکز دایره $C(O, r)$ ، درون دایره است. در این صورت خط و دایره نقطه مشترک دارند.
۱۰. اگر فاصله مرکز دایره تا خط d برابر باشد، خط بر دایره مماس است.
۱۱. اگر فاصله نقطه B روی خط d از نقطه A ، کوچک‌تر از فاصله سایر نقاط خط d از نقطه A باشد، می‌توان نتیجه گرفت که است.
۱۲. خط d در نقطه T بر دایره $C(O, r)$ مماس است. در این صورت شعاع OT و خط مماس در نقطه T

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱۳. اندازه شعاع دایره مقداری نامنفی است.
۱۴. فاصله هر نقطه روی دایره تا مرکز آن، برابر شعاع دایره است.
۱۵. خط d در نقطه A بر دایره $C(O, R)$ مماس است. نقطه‌ای مانند B روی خط d وجود دارد که $OB \leq OA$ باشد.
۱۶. اگر خطی با دایره یک نقطه مشترک داشته باشد، خط را نسبت به دایره قاطع می‌گوییم.
۱۷. اگر خط d بر دایره C در نقطه A مماس باشد، آن‌گاه OA و d برهم عمودند.
۱۸. اگر خط d بر شعاع OA عمود باشد، آن‌گاه خط بر دایره $C(O, r)$ مماس است.
۱۹. اگر خط d در نقطه B بر شعاع OB عمود باشد، تعداد نقاط مشترک خط و دایره، هیچ، یک یا دو خواهد بود.
۲۰. اگر فاصله نزدیک‌ترین نقطه از خط d تا مرکز دایره $C(O, r)$ از r بزرگ‌تر باشد، خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.
۲۱. در شکل مقابل، دایره $C(O, R)$ مفروض است. اگر $MA = R$ باشد، نشان دهید $\beta = 3\alpha$.



(تمرین ۶ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

۲۲. وضعیت یک نقطه و دایره را با رسم شکل بررسی کنید.
۲۳. وضعیت یک خط و یک دایره را از نظر تعداد نقاط مشترک با رسم شکل بررسی کنید.
۲۴. نقطه A خارج از خط d قرار دارد. روش به‌دست آوردن فاصله نقطه A از خط d را توضیح دهید.
۲۵. برای به‌دست آوردن فاصله نقطه A از خط d ، فاصله نقطه A از نقطه H روی خط d محاسبه می‌کنیم. توضیح دهید که نقطه H چگونه تعیین می‌شود؟
۲۶. وضعیت یک خط و یک دایره را از نظر فاصله مرکز دایره تا خط با رسم شکل بررسی کنید.
۲۷. خط d در نقطه F بر شعاع OF عمود است. ثابت کنید این خط بر دایره مماس است.
۲۸. خط d بر دایره C در نقطه F مماس است. ثابت کنید شعاع OF و خط مماس در نقطه F برهم عمودند.
۲۹. نقطه M روی دایره $C(O, r)$ قرار دارد. چگونه می‌توان خط مماس بر دایره در نقطه M را رسم کرد؟

(فعالیت ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

(فعالیت ۱ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

تمرینات تکمیلی

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۳۰. فاصله دورترین نقطه دایره $C(O, 3)$ از نقطه A برابر ۵ است. در این صورت نقطه A بیرون دایره C قرار دارد.

۳۱. اگر نسبت فاصله دورترین نقاط دایره تا نقطه A به نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطه A برابر ۹ باشد، نقطه A حتماً درون دایره است.

۳۲. اگر فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره از نقطه A به ترتیب ۱۲ و ۲ باشد، نقطه A حتماً درون دایره است.

● جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

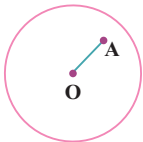
۳۳. نقطه $A(-3, 2)$ دایره $C((1, -1), 2)$ قرار دارد.

۳۴. نقطه A و دایره $C(O, 3)$ مفروض‌اند. اگر $OA = 5$ باشد، اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین فاصله نقطه A تا نقاط دایره برابر است.

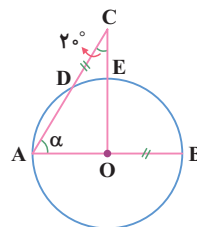
۳۵. مجموعه نقاطی که بیرون دایره $C(O, 1)$ و درون $C'(O, 3)$ قرار دارند، در ناحیه‌ای به مساحت قرار دارند.

۳۶. اگر فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره $C(O, r)$ تا نقطه A به ترتیب ۷ و ۴ و $OA < r$ باشد، فاصله نقطه A از مرکز دایره برابر است.

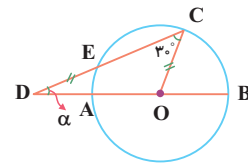
۳۷. در شکل مقابل O مرکز دایره و $OA = 6$ است. اگر فاصله دورترین نقطه دایره تا A برابر ۱۵ باشد، اندازه شعاع دایره برابر است.



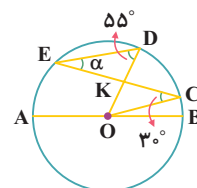
● در شکل‌های زیر، نقطه O مرکز دایره است. اندازه زاویه α را برحسب درجه به دست آورید.



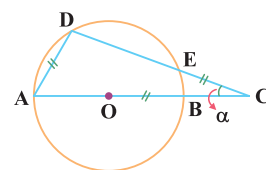
۳۹.



۳۸.



۴۱.



۴۰.

۴۲. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر $5 - 2x$ است. اگر نقطه A درون دایره باشد، محدوده x را به دست آورید.

۴۳. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر $x - 6$ است. اگر نقطه A بیرون دایره C نباشد، مجموع مقادیر صحیح x را به دست آورید.

۴۴. نقاط A و B روی دایره $C(O, 4)$ قرار دارند. اگر $OA = x^2 - 5x + 10$ و $OB = 3x^2 - 7x + 6$ باشند، مقدار x را به دست آورید.

۴۵. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 3x - 3)$ برابر $x + 7$ است. حدود x را طوری تعیین کنید که:

(آ) نقطه A درون دایره باشد.

(ب) نقطه A بیرون دایره باشد.

۴۶. فاصله نقطه A از مرکز دایره $C(O, 4)$ برابر ۷ است. فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطه A را به دست آورید.

۴۷. بیش‌ترین فاصله نقطه A تا نقاط دایره $2/5$ برابر شعاع دایره است. اگر کم‌ترین فاصله نقطه A تا نقاط دایره برابر ۴ باشد، اندازه شعاع دایره را به دست آورید.

۴۸. کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره $C(O, r)$ از نقطه A به ترتیب برابر ۳ و ۱۱ است. مقادیر ممکن برای شعاع دایره را به دست آورید.

۴۹. خط d به فاصله $10 - x$ از مرکز دایره $C(O, 3)$ قرار دارد و دایره C را در دو نقطه قطع می‌کند. مجموع مقادیر طبیعی x را به دست آورید.

۵۰. فاصله مرکز دایره $C(O, 3a + 2)$ تا خطوط d_1 و d_2 به ترتیب برابر $a + 8$ و $OH_2 = 5 - a$ است. اگر d_1 بر دایره مماس باشد، وضعیت خط d_2 و دایره C را تعیین کنید.

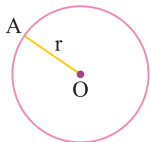
۵۱. فاصله مرکز دایره $C(O, 6)$ از خط d برابر ۱۰ است. کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقاط دایره تا خط d را به دست آورید.

فصل اول

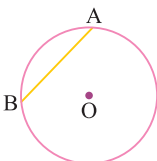
درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره (قسمت دوم)

هندسه یازدهم

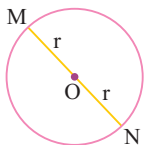
■ **چند تعریف در دایره:** ابتدا به بررسی چند تعریف در دایره می‌پردازیم که آن‌ها را در دوره اول دبیرستان دیده‌اید.



۱ **شعاع دایره:** به پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع دایره می‌گویند. شعاع دایره را معمولاً با حرف r نمایش می‌دهند.



۲ **وتر دایره:** پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد را یک وتر از دایره می‌گویند.



۳ **قطر دایره:** وتری از دایره که از مرکز دایره عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند. قطر دایره، بزرگ‌ترین وتر دایره است و اندازه آن دو برابر اندازه شعاع دایره است.

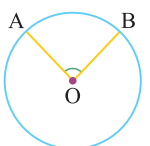
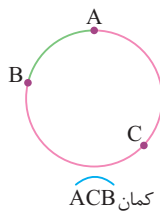
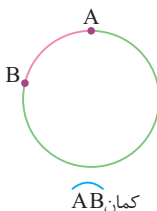
❓ در دایره‌ای با شعاع $3 - 2x$ ، طول بزرگ‌ترین وتر برابر ۱۴ می‌باشد. مقدار x را به دست آورید.

✔ می‌دانیم بزرگ‌ترین وتر دایره، قطر دایره است و قطر دایره دو برابر شعاع دایره می‌باشد. پس:

$$2(2x - 3) = 14 \Rightarrow 4x - 6 = 14 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

۴ **کمان دایره:** کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است. به عبارت دیگر، به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است، کمان می‌گویند.

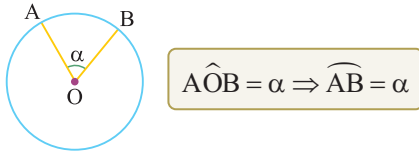
توجه اگر دو نقطه A و B روی دایره قرار داشته باشند، دو کمان روی دایره ایجاد می‌کنند که معمولاً کمان کوچک‌تر را با $\widehat{AB}$ و کمان بزرگ‌تر را با نقطه‌ای کمکی مانند C به صورت $\widehat{ACB}$ نمایش می‌دهند.



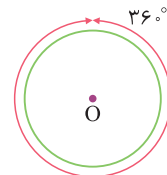
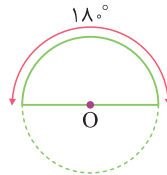
۵ **زاویه مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره منطبق باشد و دو ضلع آن دو شعاع از دایره است. مثلاً در شکل مقابل $\angle AOB$ یک زاویه مرکزی است.

توجه زاویه $\angle AOB$ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان $\widehat{AB}$ نامیده می‌شود. هم‌چنین کمان $\widehat{AB}$ نیز کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی $\angle AOB$ است.

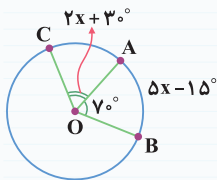
۶ اندازه کمان: اندازه کمان AB با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن برحسب درجه برابر است. (واضح که اگر اندازه کمان AB برابر α درجه باشد، هتماً زاویه مرکزی روبه‌رو به اونم α درجه هستش.)



نتیجه ۱ یک دایره، کمانی با اندازه 360° است. **۲** نیم‌دایره، کمانی با اندازه 180° است.



؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازه کمان AC چند درجه است؟



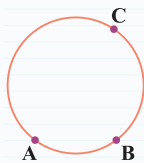
✓ زاویه $\widehat{AOB}$ مرکزی است، پس اندازه آن با کمان مقابلش برابر است:

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow 7x^\circ = 5x^\circ - 15^\circ \Rightarrow 5x^\circ = 7x^\circ + 15^\circ = 85^\circ \Rightarrow x = \frac{85^\circ}{2} = 42.5^\circ$$

$$\widehat{AOC} = \widehat{AC} \Rightarrow 2x + 3^\circ = \widehat{AC} \xrightarrow{x=42.5^\circ} \widehat{AC} = 2(42.5^\circ) + 3^\circ = 88^\circ$$

از طرفی زاویه $\widehat{AOC}$ نیز زاویه مرکزی است، پس:

؟ در شکل مقابل $\widehat{ABC} = 19^\circ$ و $\widehat{BCA} = 20^\circ$ هستند. اندازه کمان BC را به دست آورید.



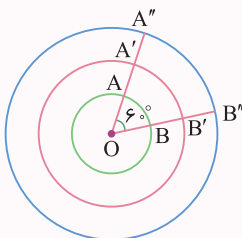
$$\widehat{AC} + \widehat{CB} + \widehat{BA} = 360^\circ$$

✓ می‌دانیم یک دایره کمانی با اندازه 360° است، پس:

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \widehat{ABC} = 19^\circ \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = 19^\circ \\ \widehat{BCA} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{AC} = 20^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 39^\circ \xrightarrow{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ} 360^\circ + \widehat{BC} = 39^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 3^\circ$$

نکته هر کمان علاوه بر اندازه، دارای طول نیز هست. کمان‌های دایره با شعاع‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابری داشته باشند ولی طول آن‌ها برابر نباشد و یا می‌توانند طول‌های برابر داشته باشند ولی اندازه آن‌ها برابر نباشد. (اندازه کمان برحسب درجه و طول آن برحسب واحد طول مثلاً متر، سانتی‌متر و ... می‌باشد). مثلاً در شکل زیر، اندازه کمان‌های AB ، $A'B'$ و $A''B''$ با هم برابر و مساوی 6° است اما واضح است که طول‌های آن‌ها برابر نیست.

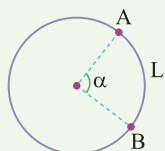


$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

۷ طول کمان: طول کمان AB از دایره $C(O, R)$ که روبه روی زاویه مرکزی با اندازه α است، به صورت زیر به دست می آید.



می دانیم دایره کمانی با اندازه 36° درجه و طول $2\pi R$ است، پس به کمک تناسب زیر داریم:



طول
اندازه
 $2\pi R$
 360°
 α

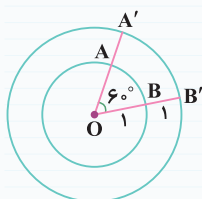
طرفین وسطین

$$L \times 360^\circ = \alpha \times 2\pi R \Rightarrow L = \frac{\alpha \times 2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

توجه کن که نمونه به دست آوردن طول کمان AB، در کار در کلاس ۳ صفحه ۱۲ کتاب درسی پرسیده شده.

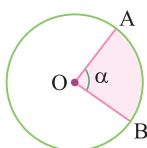
(کار در کلاس ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

؟ در شکل زیر، O مرکز دایره ها می باشد. اندازه و طول کمان های AB و A'B' را به دست آورید.



✓ اندازه کمان های AB و A'B' برابر زاویه مرکزی مقابل آن ها است، پس اندازه آن ها برابر 60° می باشد. اما طول کمان های AB و A'B' برابر هستند با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \begin{cases} L_{AB} = \frac{\pi \times 1 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \\ L_{A'B'} = \frac{\pi \times 2 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



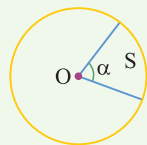
۸ قطاع دایره: ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می نامند.

■ مساحت قطاع: اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه α باشد، مساحت قطاع به صورت زیر به دست می آید:

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$



می دانیم دایره قطاعی با زاویه مرکزی 36° و مساحت πR^2 است، پس:



مساحت
زاویه مرکزی
 πR^2
 36°
 α

$$\Rightarrow \pi R^2 \times \alpha = 36^\circ \times S \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره با شعاع ۵ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



✓ زاویه مرکزی قطاع رنگی برابر $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ است، پس:

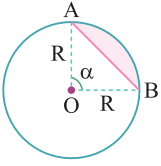
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi (5^2) \times 240^\circ}{360^\circ} = \frac{50\pi}{3}$$

می توانستیم مساحت ناحیه غیر رنگی رو به دست بیاوریم و از مساحت دایره کم کنیم.

۹ قطعه دایره: در یک دایره، ناحیه محصور به یک وتر و کمان متناظرش را قطعه می‌گوییم.



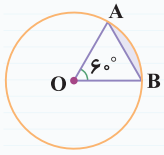
مساحت قطعه: برای به دست آوردن مساحت قطعه، باید مساحت مثلث متساوی الساقین OAB را از مساحت قطاع کم کنیم.



$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta OAB} \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

(تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

؟ در شکل مقابل، O مرکز دایره به شعاع ۴ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta OAB} \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi (4)^2 \times 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{8\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

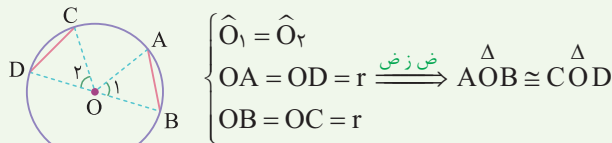
اثبات‌های کتاب درسی به کمک زاویه مرکزی

(فعالیت ۱ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۱ اگر دو کمان AB و CD از دایره C(O, r) با هم برابر باشند، آن‌گاه وترهای AB و CD هم با یکدیگر برابرند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. چون $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ است، پس زوایای مرکزی مقابل آن‌ها یعنی $\widehat{O}_1$ و $\widehat{O}_2$ برابرند، پس:



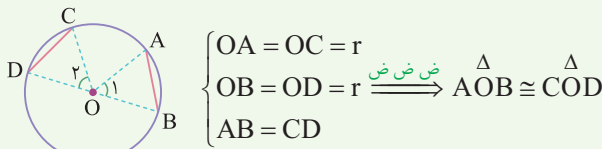
$$\begin{cases} \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ OA = OD = r \\ OB = OC = r \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta AOB \cong \Delta COD$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $AB = CD$ می‌باشد.

(فعالیت ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۲ اگر دو وتر AB و CD در یک دایره با هم برابر باشند، آن‌گاه کمان‌های نظیر این دو وتر نیز با هم برابرند.

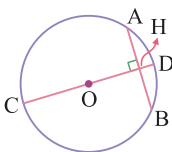
اثبات



$$\begin{cases} OA = OC = r \\ OB = OD = r \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta AOB \cong \Delta COD$$

از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. پس:

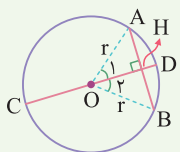
بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ می‌باشد؛ چون O_1 و O_2 زوایای مرکزی رو به کمان‌های AB و CD هستند، پس $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ می‌باشد.



(فعالیت ۳ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۳ در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند.

اثبات



$$\begin{cases} OA = OB = r \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابری وتر و یک ضلع}} \Delta OHA \cong \Delta OHB$$

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم و داریم:

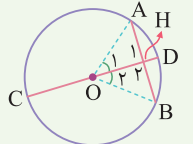
بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، از جمله $AH = BH$ و $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ می‌باشد. چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر AB را نصف کرده است و چون زوایای مرکزی $\widehat{O}_1$ و $\widehat{O}_2$ برابرند، پس کمان نظیر آن‌ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ نیز برابر می‌باشند، پس قطر CD کمان AB را نیز نصف کرده است.

(فعالیت ۴ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۴ اگر قطری از دایره، وترى را نصف کند، آن گاه بر آن وتر عمود بوده و کمان نظیر آن را نیز نصف می کند.

اثبات

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم. چون CD وتر AB را نصف کرده است، پس $AH = BH$ می باشد و داریم:



$$\begin{cases} OA = OB = r \\ AH = BH \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

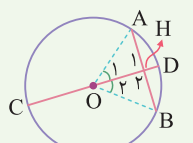
بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، از جمله $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می باشد. چون زوایای مرکزی O_1 و O_2 برابرند، پس کمان مقابل آن ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ برابرند؛ بنابراین کمان CD نظیر وتر AB را نصف کرده است. از طرفی چون $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ ، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ می باشد، بنابراین قطر CD بر وتر AB عمود است.

(فعالیت ۵ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۵ اگر قطری از دایره کمانى را نصف کند، آن گاه این قطر بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می کند.

اثبات

وتر نظیر کمان AB را رسم می کنیم. چون قطر CD کمان AB را نصف کرده است، پس $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می باشد. حال از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می کنیم. چون $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می باشد، پس زوایای مرکزی مقابل کمان های AD و BD یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ با هم برابرند، پس:



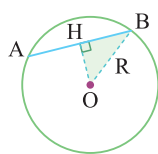
$$\begin{cases} OA = OB = r \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، یعنی $AH = BH$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می باشد. چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر نظیر کمان AB یعنی AB را نصف کرده است. از آن جایی که $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می باشند، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ بوده و این یعنی قطر CD بر وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB عمود است.

نتیجه با توجه به اثبات های فوق، اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، خط گذرنده از وسط کمان و وسط وتر، قطر دایره است که بر وتر AB

(فعالیت ۶ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

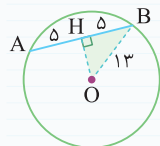
عمود است.



فاصله مرکز دایره تا وتر AB : می دانیم فاصله نقطه O از وتر AB برابر طول عمود OH است. چون OH بر وتر AB عمود است، پس H وسط وتر AB می باشد. حال اگر از O به B وصل کنیم، به کمک مثلث قائم الزاویه رنگی می توانیم طول OH یعنی فاصله مرکز دایره تا وتر AB را به دست آوریم. به مثال های زیر توجه کنید.

؟ در دایره $C(O, 13)$ ، طول وتر AB برابر 10 می باشد. فاصله مرکز دایره تا وتر AB را به دست آورید.

✓ از مرکز دایره بر وتر AB عمود می کنیم. می دانیم OH وتر AB را نصف می کند. پس $AH = HB = \frac{10}{2} = 5$ می باشند. حال از O به B وصل می کنیم. در مثلث قائم الزاویه OHB به کمک قضیه فیثاغورس داریم:



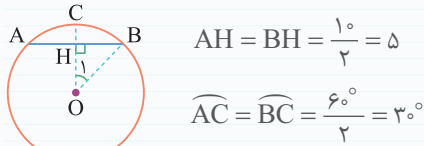
$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow 13^2 = OH^2 + 5^2 \Rightarrow OH^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow OH = 12$$

ممکنه به پای شعاع دایره یا طول وتر، اندازه کمان متناظر با وتر رو بدن. سؤال بعدیو ببین.

(تمرین ۷ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

؟ در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$. فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

✓ از O بر وتر AB عمود کرده و امتداد می دهیم تا کمان AB را در نقطه C قطع کند. می دانیم OC وتر AB و کمان AB را نصف می کند، پس:

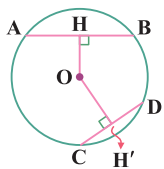


$$AH = BH = \frac{10}{2} = 5$$

$$\widehat{AC} = \widehat{BC} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

از O به B وصل می کنیم. زاویه مرکزی رو به کمان BC است، پس $\widehat{O_1} = \widehat{BC} = 30^\circ$ می باشد. حال در مثلث قائم الزاویه OHB داریم:

$$\tan \widehat{O_1} = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{5}{OH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{OH} \Rightarrow OH = \frac{3 \times 5}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$



■ وترهای نامساوی: دایره $C(O, R)$ در شکل مقابل مفروض است. $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$.

(تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

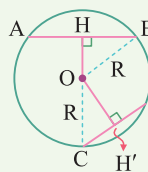
قبل از فوندن اثبات، اینو بفون. میفوام در مورد «اگر و تنها اگر» صحبت کنم. عبارت «اگر و تنها اگر» یعنی این که قضیه دو شرطیه، یعنی برای اثبات یه بار باید با فرض « $AB > CD$ » ثابت کنیم که « $OH' > OH$ » هستش و بار دیگه باید با فرض « $OH' > OH$ » نشون بدیم که « $AB > CD$ » هستش.

اثبات

حالت اول فرض می کنیم $AB > CD$ باشد. از O به B و C وصل می کنیم. می دانیم H وسط AB و H' وسط CD می باشد، پس:

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow BH > CH'$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های OHB و OCH' داریم:



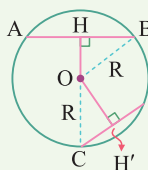
$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = R^2 - OH^2$$

$$OC^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow R^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow CH'^2 = R^2 - OH'^2$$

چون $BH > CH'$ است، پس $BH^2 > CH'^2$ می باشد و داریم:

$$R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \Rightarrow OH^2 < OH'^2 \Rightarrow OH < OH'$$

حالت دوم فرض می کنیم $OH < OH'$ باشد. از O به B و C وصل می کنیم. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های OHB و OCH' داریم:



$$OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow OH^2 = R^2 - BH^2$$

$$OC^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow R^2 = OH'^2 + CH'^2 \Rightarrow OH'^2 = R^2 - CH'^2$$

چون $OH < OH'$ است، پس $OH^2 < OH'^2$ می باشد و داریم:

$$R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2 \Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \Rightarrow BH^2 > CH'^2 \Rightarrow BH > CH'$$

می دانیم H وسط وتر AB و H' وسط وتر CD است، پس:

$$BH > CH' \xRightarrow{\times 2} 2BH > 2CH' \Rightarrow AB > CD$$

خطبه خط کتاب درسی

● جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

- ۵۲. به پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد دایره می‌گویند.
- ۵۳. پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد را می‌گویند.
- ۵۴. بزرگ‌ترین وتر دایره را می‌گویند.
- ۵۵. وتری از دایره که از عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند.
- ۵۶. به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است می‌گویند.
- ۵۷. به زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز دایره منطبق باشد و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشد می‌گویند.
- ۵۸. ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است دایره می‌گویند.
- ۵۹. در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر را می‌کند.
- ۶۰. اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، خط گذرنده از وسط وتر AB و وسط کمان AB ، است.
- ۶۱. در دایره $C(O, 4)$ ، شعاع‌های OA و OB برهم عمودند. طول کمان AB برابر است.
- ۶۲. مساحت قطاعی از دایره $C(O, 9)$ با زاویه مرکزی 120° برابر است.

● درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

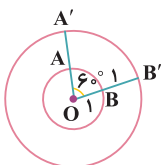
- ۶۳. اندازه قطر دایره دو برابر اندازه شعاع دایره است.
- ۶۴. پاره خط AB که از دو نقطه متمایز از دایره می‌گذرد را وتر دایره می‌گوییم.
- ۶۵. اندازه زاویه مرکزی نصف اندازه کمان روبه‌رو به آن است.
- ۶۶. نیم دایره کمانی با طول 180° است.
- ۶۷. طول کمان AB از دایره $C(O, R)$ که روبه‌رو به زاویه مرکزی با اندازه α می‌باشد برابر $L = \frac{\pi R \alpha}{360^\circ}$ است.
- ۶۸. کمان‌های دایره با شعاع‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابری داشته باشند ولی طول آن‌ها برابر نباشد.
- ۶۹. در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.
- ۷۰. خط شامل وسط یک وتر و وسط کمان نظیر با آن، قطر دایره است.
- ۷۱. مساحت قطاعی از دایره $C(O, R)$ با زاویه مرکزی α از رابطه $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{180^\circ}$ به دست می‌آید.
- ۷۲. در دایره‌ای به شعاع ۶، مساحت قطاعی با زاویه مرکزی 120° برابر 9π است.

● مفاهیم زیر را تعریف کنید.

- ۷۳. شعاع دایره
- ۷۴. وتر دایره
- ۷۵. قطره دایره
- ۷۶. کمان دایره
- ۷۷. زاویه مرکزی
- ۷۸. قطاع دایره
- ۷۹. قطعه دایره

- ۸۰. در شکل زیر، O مرکز دایره‌ها می‌باشد. اندازه و طول کمان‌های AB و $A'B'$ را به دست آورید.

(کاردر کلاس ۲ صفحه ۱۲ کتاب درسی)



(تمرین ۷ صفحه ۱۷ کتاب درسی)

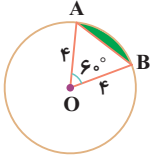
۸۱. در دایره $C(O, R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ ، فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

۸۲. طول وتر AB در دایره $C(O, R)$ برابر ۱۰ است. اگر فاصله وتر AB تا مرکز دایره برابر $5\sqrt{3}$ باشد، طول کمان AB را به دست آورید.

(تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم)

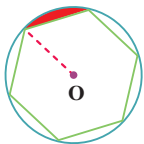
(تمرین ۸ صفحه ۲۳ کتاب درسی)

۸۳. در شکل مقابل، O مرکز دایره به شعاع ۴ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



(تمرینات تکمیلی کتاب راهنمای معلم)

۸۴. در شکل مقابل شعاع دایره ۴ و شش ضلعی، منتظم است. مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.



۸۵. نشان دهید طول کمان AB از دایره $C(O, R)$ که روبه روی زاویه مرکزی با اندازه α است از رابطه $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ به دست می آید.

(کار در کلاس ۳ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

۸۶. نشان دهید مساحت قطاع از دایره $C(O, R)$ که روبه رو به زاویه مرکزی با اندازه α است از رابطه $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ به دست می آید.

(کار در کلاس ۳ صفحه ۱۲ کتاب درسی)

۸۷. ثابت کنید «اگر دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ از دایره $C(O, r)$ با هم برابر باشند، آن گاه وترهای AB و CD هم با یکدیگر برابرند.»

(فعالیت ۱ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۸۸. ثابت کنید «اگر دو وتر AB و CD در یک دایره با هم برابر باشند، آن گاه کمان های نظیر این دو وتر نیز با هم برابرند.»

(فعالیت ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۸۹. ثابت کنید «در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیرش را نصف می کند.»

(فعالیت ۳ صفحه ۱۳ کتاب درسی - خرداد ۱۴۰۳)

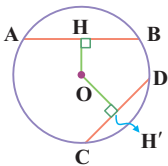
۹۰. ثابت کنید «اگر قطری از دایره، وتر را نصف کند آن گاه بر آن وتر عمود بوده و کمان نظیر آن را نیز نصف می کند.»

(فعالیت ۴ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

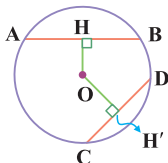
۹۱. ثابت کنید «اگر قطری از دایره کمانی را نصف کند، آن گاه این قطر بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می کند.»

(فعالیت ۵ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۹۲. دایره $C(O, R)$ در شکل مقابل مفروض است. نشان دهید اگر $OH < OH'$ باشد آن گاه $AB > CD$ است.



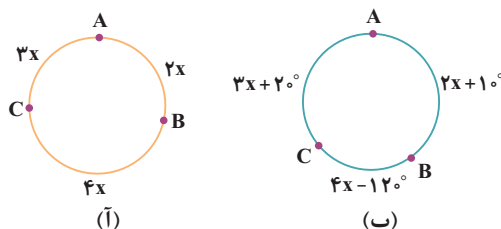
۹۳. دایره $C(O, R)$ در شکل مقابل مفروض است. نشان دهید اگر $AB > CD$ آن گاه $OH < OH'$ است.



۹۴. در دایره با شعاع ۱۰، طول بزرگ ترین وتر $2x + 6$ است. مقدار x را به دست آورید.

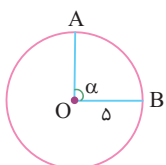
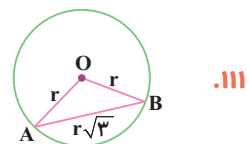
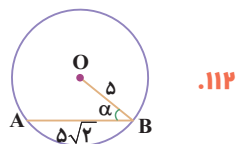
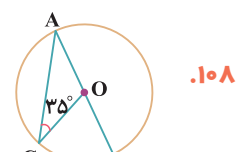
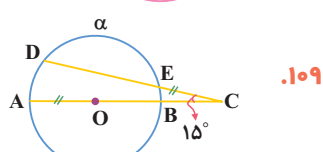
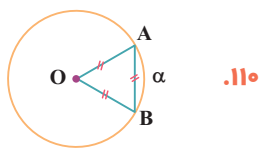
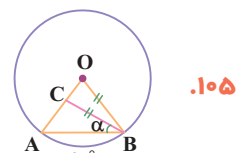
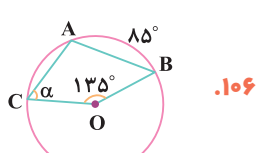
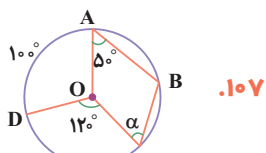
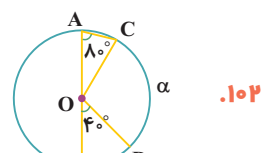
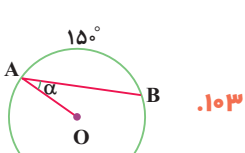
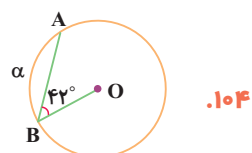
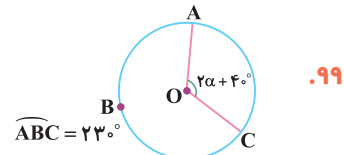
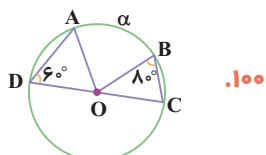
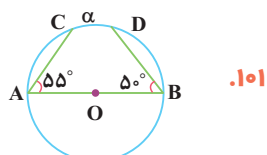
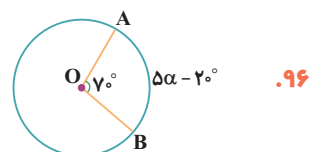
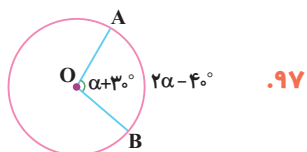
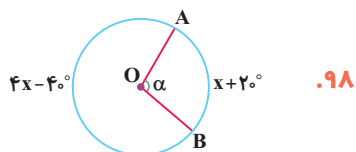
(تمرینات تکمیلی راهنمای معلم)

۹۵. در دایره های زیر اندازه هر کمان در کنار آن نوشته شده است. مقدار x را به دست آورید.



تمرینات تکمیلی

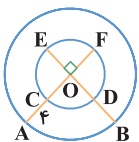
● در شکل های زیر، O مرکز دایره است. مقدار α را بر حسب درجه به دست آورید.



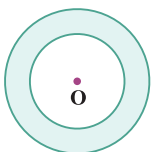
۱۱۳. در شکل مقابل O مرکز دایره است. اگر طول کمان $\widehat{AB}$ برابر 2π واحد باشد، زاویه α چند درجه است؟

۱۱۴. طول کمان متناظر با زاویه مرکزی 108° در دایره ای برابر 6π است. طول شعاع دایره را به دست آورید.

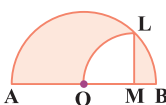
۱۱۵. در شکل مقابل، O مرکز دایره ها و طول کمان CD، $\frac{3}{5}$ برابر طول کمان AB است. اگر $AC = 4$ باشد، طول کمان EF را به دست آورید.

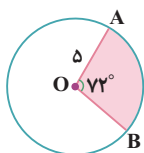


۱۱۶. در شکل مقابل، O مرکز هر دو دایره است. اگر عدد محیط و مساحت ناحیه رنگی برابر 20π باشد، مساحت دایره بزرگ تر را به دست آورید.

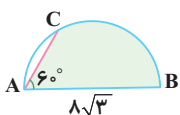


۱۱۷. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره و M مرکز ربع دایره به شعاع ۶ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

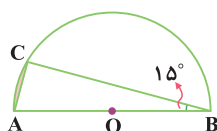




۱۱۸. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

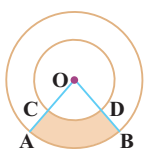


۱۱۹. در شکل مقابل، نیم دایره به قطر $8\sqrt{3}$ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

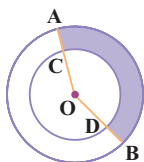


۱۲۰. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره به شعاع ۶ است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

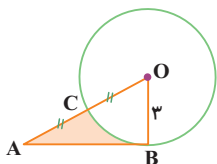
۱۲۱. در دایره‌ای با شعاع ۶ مساحت قطاع با زاویه مرکزی 60° با مساحت قطاع در دایره‌ای با شعاع $3\sqrt{2}$ برابر است. زاویه مرکزی قطاع در دایره کوچک‌تر را به دست آورید.



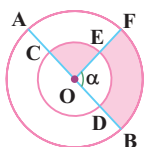
۱۲۲. در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و $OC = 2AC$ است. اگر مساحت ناحیه رنگی ۱۵ باشد، مساحت قطاع COD را به دست آورید.



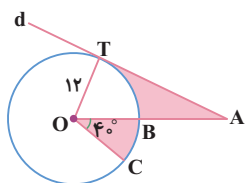
۱۲۳. در شکل مقابل O مرکز دایره‌ها، $OA = 6$ و $OC = 4$ است. اگر طول کمان AB برابر 5π باشد، مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



۱۲۴. در شکل مقابل O مرکز دایره و AB بر دایره مماس است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.

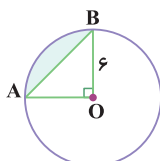


۱۲۵. در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و شعاع دایره بزرگ‌تر دو برابر شعاع دایره کوچک‌تر است. اگر مساحت ناحیه‌های رنگی برابر باشد، اندازه زاویه α را به دست آورید.

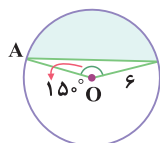


۱۲۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره و خط d بر دایره مماس است. اگر AT برابر طول کمان TBC باشد، مجموع مساحت ناحیه‌های رنگی را به دست آورید.

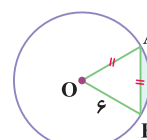
● در شکل‌های زیر O مرکز دایره است. مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



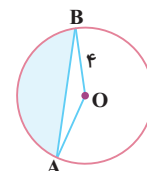
۱۲۸.



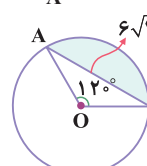
۱۳۰.



۱۲۷.

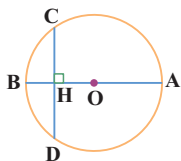


۱۲۹.

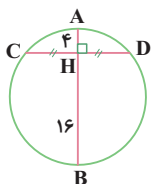


۱۳۱.

۱۳۲. در شکل مقابل $AB = ۳۴$ و $CD = ۳۲$ است. طول پاره خط BH را به دست آورید.



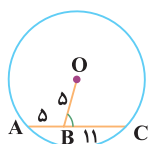
۱۳۳. در شکل مقابل طول وتر CD را به دست آورید.



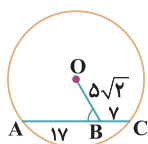
۱۳۴. فاصله مرکز دایره‌ای تا وترى به طول ۱۶ برابر است. طول وترى که به فاصله ۸ از مرکز دایره قرار دارد را به دست آورید.

۱۳۵. در دایره $(O, ۴)$ ، فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر نصف وتر AB است. طول کمان $\widehat{AB}$ را به دست آورید.

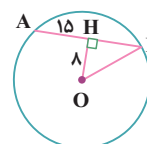
● در شکل‌های زیر O مرکز دایره است. طول شعاع دایره را به دست آورید.



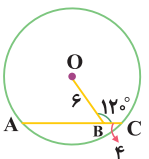
۱۳۸.



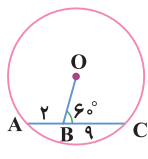
۱۳۷.



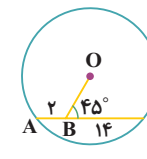
۱۳۶.



۱۴۱.

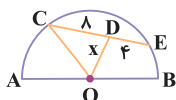


۱۴۰.

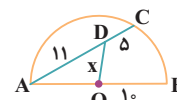


۱۳۹.

● در شکل‌های زیر، O مرکز نیم دایره است. مقدار x را به دست آورید.

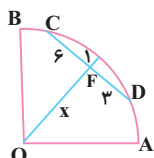


۱۴۳.

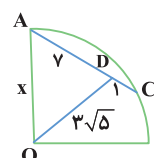


۱۴۲.

● در شکل‌های زیر، O مرکز ربع دایره است. مقدار x را به دست آورید.

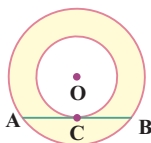


۱۴۵.

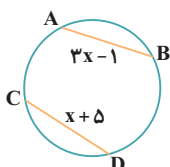


۱۴۴.

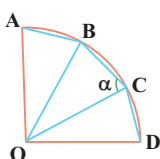
۱۴۶. در شکل مقابل، O مرکز دایره‌ها و وتر AB بر دایره کوچک‌تر مماس است. اگر $AB = ۱۰$ باشد، مساحت ناحیه رنگی را به دست آورید.



۱۴۷. در دو دایره هم‌مرکز طول وترى از دایره بزرگ‌تر که بر دایره کوچک‌تر مماس است، برابر ۱۸ است. مساحت ناحیه محدود بین دو دایره را به دست آورید.

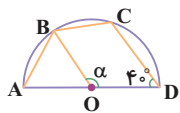


۱۴۸. در شکل مقابل، اندازه کمان‌های AB و CD برابر است. مقدار x را به دست آورید.

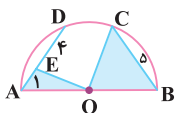


۱۴۹. در شکل مقابل O مرکز ربع دایره و $AB = BC = CD$ است. مقدار α را به دست آورید.

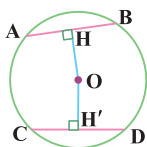
۱۵۰. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره و وترهای AB و BC برابرند. مقدار α را به دست آورید.



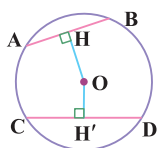
۱۵۱. در شکل مقابل، O مرکز نیم دایره است. نسبت مساحت مثلث های رنگی را به دست آورید.



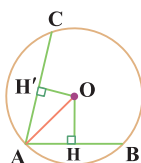
۱۵۲. در شکل مقابل O مرکز دایره و $OH = OH'$ است. اگر $AB = 3x + 8$ و $CD = x + 12$ باشند، مقدار x را به دست آورید.



۱۵۳. در شکل مقابل O مرکز دایره و $OH = 3OH'$ است. اگر $AB = 6$ و $CD = 10$ باشد، طول شعاع دایره را به دست آورید.



۱۵۴. در شکل مقابل O مرکز دایره، $OA = ۱۷$ ، $BH = ۲x + ۵$ و $CH' = ۳x + ۲$ است. اگر $OH' < OH$ باشد، حدود x را به دست آورید.



یادداشت:

۲ بخش



پاسخنامه

فصل ۱
دایره

۱

دایره - مرکز دایره - شعاع دایره

۲

ابتدا شعاع OD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم OA، OD و OB شعاع دایره هستند، پس با هم برابرند. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث DCO داریم:

$$OD^2 = OC^2 + CD^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + (2\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2}{4} = 12 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

۳

درون - شعاع

۴

مرکز - بیش‌تر

۵

بیرون

۶

مماس است.

۷

یک

۸

قاطع

۹

دو

۱۰

شعاع دایره

۱۱

AB بر d عمود

۱۲

برهم عمودند.

۱۳

نادرست - اندازه شعاع دایره همواره مثبت است نه نامنفی. وقتی می‌گوییم نامنفی یعنی اندازه شعاع دایره می‌تواند صفر نیز باشد.

۱۴

درست

۱۵

نادرست - کم‌ترین فاصله نقاط خط d از دایره برابر OA است. پس دو نقطه دیگری از خط d مانند B فاصله‌اش از مرکز دایره بیشتر از OA است.

۱۶

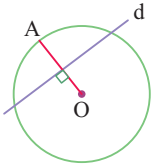
نادرست - در این حالت خط بر دایره مماس است.

۱۷

درست

۱۸

نادرست - در شکل مقابل خط d بر شعاع OA عمود است، در حالی‌که d بر دایره مماس نیست.



۱۹

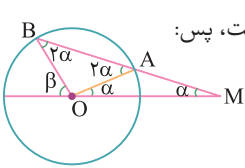
نادرست - چون خط d در نقطه B بر شعاع OB عمود است، پس خط d بر دایره مماس است و فقط یک نقطه مشترک دارند.

۲۰

درست - فاصله نزدیک‌ترین نقطه از خط d تا مرکز دایره همان فاصله مرکز از خط است و چون از شعاع دایره بزرگ‌تر است، پس خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.

۲۱

از O به A وصل می‌کنیم. چون $OA = R = MA$ است، پس مثلث OAM متساوی‌الساقین بوده و زاویه AOM نیز برابر α است. از طرفی مثلث AOB نیز متساوی‌الساقین است زیرا $OA = OB = R$ می‌باشد.

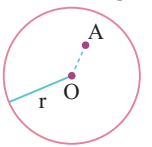


زاویه $\widehat{OAB} = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 2\alpha$

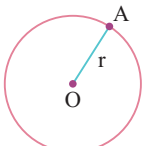
$\beta = 2\alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha$ پس: زاویه خارجی مثلث BOM است.

۲۲

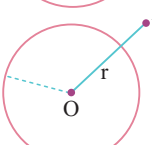
وضعیت نقطه A و دایره $C(O, r)$ به یکی از سه حالت زیر است:



۱- نقطه A درون دایره است. در این صورت فاصله نقطه A از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است.



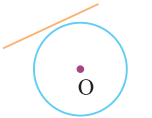
۲- نقطه A روی دایره است. در این صورت فاصله نقطه A از مرکز دایره برابر شعاع دایره است.



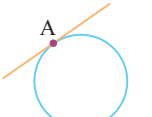
۳- نقطه A بیرون دایره است. در این صورت فاصله نقطه A از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

۲۳

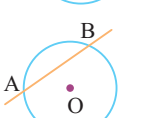
خط و دایره نقطه مشترکی ندارند.



خط و دایره یک نقطه مشترک دارند که در این حالت می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

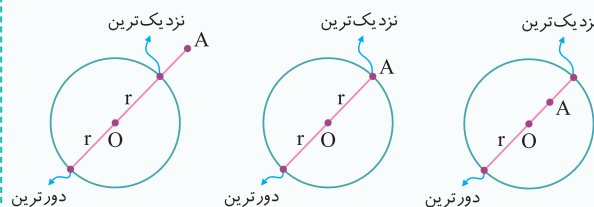


خط و دایره دو نقطه مشترک دارند که در این حالت می‌گوییم خط و دایره متقاطع هستند.



دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا یک نقطه

در شکل‌های زیر، دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطه A مشخص شده‌اند.



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید بدون توجه به وضعیت نقطه A و دایره $C(O, r)$ فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطه A به صورت زیر است:

۱. فاصله دورترین نقطه دایره تا نقطه A برابر است با:

$$\text{فاصله دورترین نقطه} = OA + r$$

۲. فاصله نزدیک‌ترین نقطه دایره تا نقطه A برابر است با:

$$\text{فاصله نزدیک‌ترین نقطه} = |OA - r|$$

پرا برای فاصله نزدیک‌ترین نقطه، قدرمطلق گذاشتیم؟ اگر A بیرون دایره باشد، فاصله همیشه $OA - r$ و اگر A درون دایره باشد، فاصله همیشه $r - OA$. به همین دلیل قدرمطلق گذاشتیم که هر دو حالت رو پوشش بده.

۳۰

نادرست - با توجه به این‌که فاصله دورترین نقطه دایره $C(O, 3)$ از نقطه A برابر ۵ است داریم: $5 = OA + r \Rightarrow 5 = OA + 3 \Rightarrow OA = 2$ چون $OA < r$ است، پس A درون دایره می‌باشد.

۳۱

نادرست - با توجه به گزاره داریم:

$$\frac{OA + r}{|OA - r|} = 9 \Rightarrow OA + r = 9|OA - r|$$

حال دو حالت داریم:

$$۱) OA < r \Rightarrow OA + r = 9(r - OA) \Rightarrow OA + r = 9r - 9OA$$

$$\Rightarrow ۱۰OA = ۸r \Rightarrow OA = \frac{۸}{۱۰}r$$

$$۲) OA > r \Rightarrow OA + r = 9(OA - r) \Rightarrow OA + r = 9OA - 9r$$

$$\Rightarrow ۸OA = ۱۰r \Rightarrow OA = \frac{۱۰}{۸}r$$

چون r همواره مثبت است، پس در حالت اول A درون دایره و در حالت دوم A بیرون دایره است.

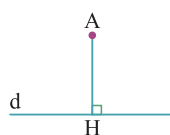
۳۲

نادرست - با توجه به گزاره $OA + r = ۱۲$ و $|OA - r| = ۲$ است. بنابراین دو حالت زیر را داریم:

$$۱) \begin{cases} OA + r = ۱۲ \\ OA - r = ۲ \end{cases} \Rightarrow 2OA = ۱۴ \Rightarrow OA = ۷$$

$$\Rightarrow r = ۵ \Rightarrow A \text{ بیرون دایره است.}$$

۲۴

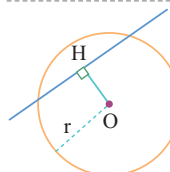


از نقطه A بر خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصله نقطه A از خط d، برابر با طول پاره خط AH است.

۲۵

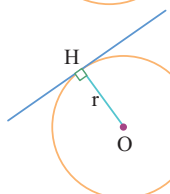
از نقطه A بر خط d عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. فاصله نقطه A از خط d، برابر با طول پاره خط AH است.

۲۶



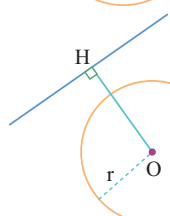
اگر فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کم‌تر باشد، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و متقاطع‌اند.

$$OH < r$$



اگر فاصله مرکز دایره تا خط d برابر شعاع دایره باشد، خط و دایره یک نقطه مشترک دارند یعنی خط بر دایره مماس است.

$$OH = r$$



اگر فاصله مرکز دایره تا خط بیشتر از شعاع دایره باشد، خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند.

$$OH > r$$

۲۷

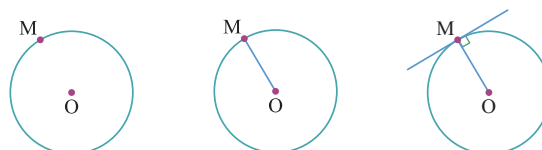
اگر هر نقطه دیگری غیر از F مانند B روی خط d در نظر بگیریم، فاصله‌شان تا نقطه O از مقدار شعاع دایره یعنی OF بیش‌تر است (زیرا OF بر خط d عمود است). بنابراین همه این نقاط خارج از دایره قرار دارند و خط و دایره تنها در یک نقطه F با هم مشترک هستند. پس می‌توان گفت که خط d بر دایره مماس است.

۲۸

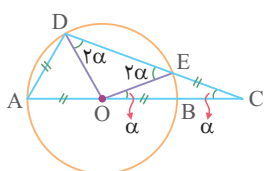
هر نقطه دیگری غیر از F روی خط d مانند B خارج از دایره قرار دارد. بنابراین فاصله آن تا مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره خواهد بود؛ یعنی $OB > r$. از طرف دیگر نقطه F روی دایره قرار دارد، بنابراین فاصله‌اش تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره است؛ یعنی $OF = r$. بنابراین می‌توان گفت که نقطه F نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O می‌باشد. حال اگر بخواهیم از O بر خط d عمود کنیم، از آن جایی که فاصله O تا پای عمود، کوتاه‌ترین فاصله نقاط خط d تا O خواهد بود، بنابراین پای عمود همان نقطه F می‌باشد. پس شعاع OF در نقطه F بر خط d، عمود خواهد بود.

۲۹

می‌دانیم که خط مماس بر دایره $C(O, r)$ در نقطه M بر شعاع OM عمود خواهد بود. بنابراین ابتدا شعاع OM را رسم می‌کنیم و سپس در نقطه M بر OM عمود می‌کنیم تا خط مماس بر دایره در نقطه M رسم شود.



۴۰



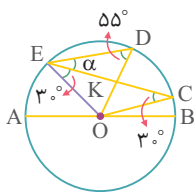
از O به D و E وصل می‌کنیم. با توجه به
برابری پاره‌خط‌ها در شکل، OD و OE نیز با
آن‌ها برابرند. مثلث OEC متساوی الساقین
است، پس $\widehat{EOB} = \alpha$ می‌باشد.

از طرفی مثلث DOE نیز متساوی الساقین می‌باشد و زاویه $\widehat{OED}$ زاویه خارجی
مثلث OEC است پس $\widehat{OED} = \widehat{OEC} = \alpha + \alpha = 2\alpha$ می‌باشد. مثلث
ADO متساوی الاضلاع است، پس $\widehat{DAO} = \widehat{ADO} = 60^\circ$ هستند. حال
در مثلث ADC داریم:

$$\widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 60^\circ + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

۴۱



از O به E وصل می‌کنیم. $OC = OE$ می‌باشد،
پس مثلث EOC متساوی الساقین بوده و زاویه
 $\widehat{OEC}$ برابر 30° می‌باشد. از طرفی مثلث EOD
نیز متساوی الساقین است؛ زیرا $OE = OD$
می‌باشد، پس $\widehat{OED} = \widehat{ODE}$ بوده و داریم:

$$\widehat{OED} = \widehat{ODE} \Rightarrow 30^\circ + \alpha = 55^\circ \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

۴۲

چون نقطه A درون دایره است، پس فاصله‌اش تا مرکز دایره باید کم‌تر از
شعاع دایره باشد. بنابراین داریم:

$$OA < r \Rightarrow 5 - 2x < 4 \Rightarrow -2x < 4 - 5 \Rightarrow -2x < -1 \xrightarrow{\div (-2)} x > \frac{1}{2}$$

متماهی دوتایی که چون طرفین نامساوی رو بر عدد منفی تقسیم کردیم، جهت
نامساوی عوض شد.

از طرفی می‌دانیم فاصله دو نقطه بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس:

$$OA \geq 0 \Rightarrow 5 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$$

از اشتراک حدود به دست آمده برای x، محدوده آن به صورت $\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{2}$
خواهد بود.

۴۳

چون نقطه A بیرون دایره $C(O, 4)$ نیست، پس درون یا روی دایره C
می‌باشد و در نتیجه $OA \leq 4$ است. بنابراین داریم:

$$OA \leq 4 \Rightarrow 6 - x \leq 4 \Rightarrow x \geq 6 - 4 \Rightarrow x \geq 2$$

از طرفی فاصله دو نقطه همواره بزرگ‌تر و یا مساوی صفر است، پس:

$$6 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$$

از اشتراک حدود به دست آمده برای x، محدوده آن به صورت $2 \leq x \leq 6$
می‌باشد که مجموع مقادیر صحیح x برابر است با:

$$x \text{ مجموع مقادیر صحیح } x = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$$

$$\begin{cases} OA + r = 12 \\ r - OA = 2 \end{cases} \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = 7$$

$$\Rightarrow OA = 5 \Rightarrow A \text{ درون دایره است.}$$

۳۳

بیرون - مرکز دایره C نقطه $O(1, -1)$ و شعاع دایره برابر $r = 2$ است. پس:

$$OA = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

چون $OA > r$ است، پس A بیرون دایره است.

۳۴

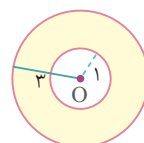
۶ - چون $OA > r$ است، پس نقطه A بیرون دایره است و داریم:

$$\begin{cases} \text{بیشترین فاصله} = OA + r \\ \text{کم‌ترین فاصله} = OA - r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{کم‌ترین فاصله} - \text{بیشترین فاصله} = (OA + r) - (OA - r) = 2r$$

بنابراین اختلاف فاصله‌ها برابر $2r = 2 \times 3 = 6$ می‌باشد.

۳۵



۸π - نقاط مورد نظر در ناحیه مقابل قرار دارند، پس:

$$S_{\text{رنجی}} = \pi(3)^2 - \pi(1)^2 = 9\pi - \pi = 8\pi$$

۳۶

۱/۵ - چون $OA < r$ است، داریم:

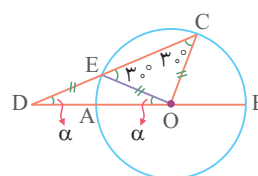
$$\begin{cases} OA + r = 7 \\ r - OA = 4 \end{cases} \Rightarrow 2r = 11 \Rightarrow r = 5/2 \Rightarrow OA = 1/5$$

۳۷

۹ - فاصله دورترین نقطه دایره تا نقطه A برابر $OA + r$ است، پس:

$$15 = 6 + r \Rightarrow r = 9$$

۳۸

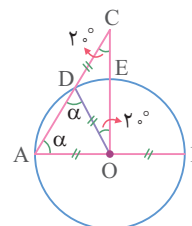


از O به E وصل می‌کنیم. چون OC و OE
شعاع‌های دایره‌اند، پس با هم برابرند و مثلث
COE متساوی الساقین است و داریم:
 $\widehat{OEC} = \widehat{OCE} = 30^\circ$

از طرفی چون $DE = OC$ می‌باشد، پس $DE = OE$ بوده و مثلث
DEO نیز متساوی الساقین بوده و چون زاویه OEC زاویه خارجی این
مثلث است، داریم:

$$\widehat{OEC} = \alpha + \alpha \Rightarrow 30^\circ = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 15^\circ$$

۳۹



از O به D وصل می‌کنیم. چون OD و OB
شعاع‌های دایره‌اند، پس با هم برابرند و از طرفی
چون CD با OB برابر است، پس $CD = OD$ نیز
می‌باشد و این یعنی مثلث ODC متساوی الساقین
بوده و زاویه DOE برابر 20° می‌باشد.

از طرفی واضح است که مثلث DOA نیز متساوی الساقین بوده و زاویه
 $\widehat{ADO}$ برابر α می‌باشد. زاویه $\widehat{ADO}$ زاویه خارجی مثلث ODC است،
 $\widehat{ADO} = 20^\circ + 20^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$
پس:

۴۹

چون خط d دایره C را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $OH < r$ است:
 $OH < r \Rightarrow 10 - x < 3 \Rightarrow x > 7$
 از طرفی $OH \geq 0$ است، پس:

$$10 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 10$$

از اشتراک حدود به دست آمده، $7 < x \leq 10$ می‌باشد که مجموع مقادیر طبیعی x برابر است با:

$$8 + 9 + 10 = 27$$

۵۰

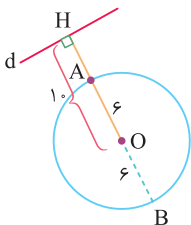
چون خط d_1 بر دایره مماس است، پس:

$$OH_1 = r \Rightarrow a + 8 = 3a + 2 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

به ازای $a = 3$ اندازه شعاع دایره برابر $11 = 3(3) + 2$ و
 $OH_2 < r$ که از آن جایی که $OH_2 = 5 - a = 5 - 3 = 2$
 است، خط d_2 قاطع است بنابراین خط d_2 و دایره دو نقطه مشترک دارند.

۵۱

با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases} OH = 10 \\ r = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{کم‌ترین فاصله} = AH = OH - r = 10 - 6 = 4 \\ \text{بیش‌ترین فاصله} = BH = OH + r = 10 + 6 = 16 \end{cases}$$

۵۲

شعاع

۵۳

وتر

۵۴

قطر

۵۵

مرکز

۵۶

کمان

۵۷

زاویه مرکزی

۵۸

قطاع

۵۹

نصف

۶۰

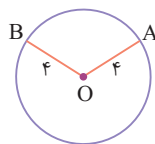
قطر دایره

۶۱

طول کمان $\widehat{AB}$ برابر است با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi \times 4 \times 90^\circ}{180^\circ} = 2\pi$$

۴۴



OA و OB شعاع‌های دایره هستند، پس:

$$OA = 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 10 = 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$OB = 4 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 6 = 4 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

واضح است که $x = 2$ قابل قبول است زیرا OA و OB را برابر ۴ می‌کند.

۴۵

ا چون A درون دایره است، پس باید $OA < r$ باشد:

$$OA < r \Rightarrow x + 7 < 3x - 3 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > 5$$

از طرفی باید $r > 0$ و $OA \geq 0$ باشد، پس:

$$r > 0 \Rightarrow 3x - 3 > 0 \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$$

$$OA \geq 0 \Rightarrow x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$$

از اشتراک حدود به دست آمده برای x ، مقدار آن به صورت $x > 5$ می‌باشد.

ب چون A بیرون دایره است، پس باید $OA > r$ باشد:

$$OA > r \Rightarrow x + 7 > 3x - 3 \Rightarrow 2x < 10 \Rightarrow x < 5$$

از طرفی باید $r > 0$ و $OA \geq 0$ باشد، پس:

$$r > 0 \Rightarrow 3x - 3 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$OA \geq 0 \Rightarrow x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -7$$

از اشتراک حدود به دست آمده $1 < x < 5$ می‌باشد.

توجه کن وقتی $r > 0$ است چون $OA > r$ هستش، پس قتماً $OA \geq 0$ همیشه.

۴۶

با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\begin{cases} OA = 7 \\ r = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{فاصله دورترین نقطه} = OA + r = 7 + 4 = 11 \\ \text{فاصله نزدیک‌ترین نقطه} = OA - r = 7 - 4 = 3 \end{cases}$$

۴۷

فرض می‌کنیم شعاع دایره r باشد، پس:

$$OA + r = 2/\delta r \Rightarrow OA = 1/\delta r$$

از آن جایی که OA برابر $1/\delta r$ شده است پس نقطه A بیرون دایره است و داریم:

$$OA - r = 4 \xrightarrow{OA=1/\delta r} 1/\delta r - r = 4 \Rightarrow 0/\delta r = 4 \Rightarrow r = 8$$

۴۸

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} OA + r = 11 \\ |OA - r| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA + r = 11 \\ OA - r = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2OA = 14 \Rightarrow OA = 7 \Rightarrow r = 4 \\ OA + r = 11 \\ r - OA = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r = 14 \Rightarrow r = 7 \end{cases}$$

۷۸

ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است را یک قطاع دایره می‌گویند.

۷۹

ناحیه محصور به یک وتر و کمان متناظرش را یک قطعه از دایره می‌گویند.

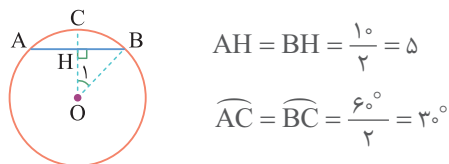
۸۰

اندازه کمان‌های AB و $A'B'$ برابر زاویه مرکزی مقابل آن‌ها است، پس اندازه آن‌ها برابر 60° می‌باشد. اما طول کمان‌های AB و $A'B'$ برابر است با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow \begin{cases} L_{AB} = \frac{\pi \times 1 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \\ L_{A'B'} = \frac{\pi \times 2 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۸۱

از O بر وتر AB عمود کرده و امتداد می‌دهیم تا کمان AB را در نقطه C قطع کند. می‌دانیم OC وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند، پس:



از O به B وصل می‌کنیم. زاویه O_1 زاویه مرکزی رو به کمان BC است، پس $\widehat{BC} = \widehat{O_1} = 30^\circ$ می‌باشد. حال در مثل قائم‌الزاویه OHB داریم:

$$\tan \widehat{O_1} = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{5}{OH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{OH} \Rightarrow OH = \frac{3 \times 5}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$

۸۲

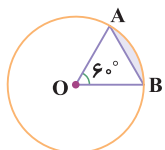
با توجه به صورت سؤال، شکل مسئله به صورت زیر است. می‌دانیم شعاع عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند. در مثل قائم‌الزاویه OHB به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = (5\sqrt{3})^2 + 5^2 \\ \Rightarrow R^2 &= 75 + 25 = 100 \Rightarrow R = 10 \end{aligned}$$

مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است، پس $\widehat{AOB} = 60^\circ$ بوده و داریم:

$$L_{AB} = \frac{\pi \times 10 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{10\pi}{3}$$

۸۳



$$\begin{aligned} S_{\text{قطعه}} &= S_{\text{قطاع}} - S_{\triangle OAB} \\ \Rightarrow S_{\text{قطعه}} &= \pi (4)^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin 60^\circ \\ \Rightarrow S_{\text{قطعه}} &= \frac{8\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Rightarrow S_{\text{قطعه}} &= \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

۶۲

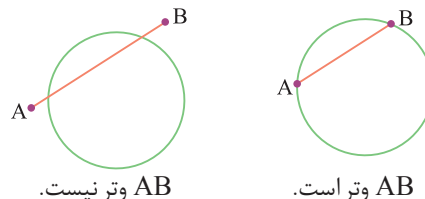
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow S = \frac{\pi \times 9^2 \times 120^\circ}{360^\circ} = 27\pi$$

۶۳

درست

۶۴

نادرست - در صورتی که دو نقطه متمایز دایره نقاط A و B باشند درست است.



AB وتر نیست.

AB وتر است.

۶۵

نادرست - اندازه زاویه مرکزی برابر اندازه کمان روبه‌رو به آن است.

۶۶

درست - نیم دایره کمانی با اندازه 180° است.

۶۷

نادرست - طول کمان AB از دایره $C(O, R)$ روبه‌رو به زاویه مرکزی با اندازه α برابر $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ است.

۶۸

درست

۶۹

درست

۷۰

درست

۷۱

نادرست - مساحت قطاع مورد نظر $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ است.

۷۲

$$S = \frac{\pi \times 6^2 \times 120^\circ}{360^\circ} = 12\pi$$

نادرست

۷۳

به پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع دایره می‌گویند.

۷۴

پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد را یک وتر از دایره می‌گویند.

۷۵

وتری از دایره که از مرکز دایره عبور می‌کند را قطر دایره می‌گویند.

۷۶

به قسمتی از محیط دایره که میان دو نقطه از آن محدود شده است را کمان می‌گویند.

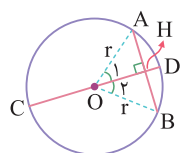
۷۷

زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع آن دو شعاع از دایره باشد را زاویه مرکزی می‌گویند.

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد؛ چون O_1 و O_2 زوایای مرکزی رو به کمان‌های AB و CD هستند، پس $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ می‌باشد.

۸۹

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم و داریم:



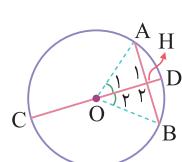
$$\begin{cases} OA = OB = r \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابری وتر و یک ضلع}} \triangle OHA \cong \triangle OHB$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، از جمله $AH = BH$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ می‌باشد.

چون $AH = BH$ است، پس قطر CD وتر AB را نصف کرده است و چون زوایای مرکزی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند، پس کمان نظیر آن‌ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ نیز برابر می‌باشند، پس قطر CD کمان $\widehat{AB}$ را نیز نصف کرده است.

۹۰

از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون CD وتر AB را نصف کرده است، پس $AH = BH$ می‌باشد و داریم:

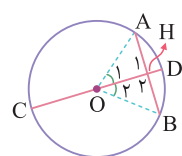


$$\begin{cases} OA = OB = r \\ AH = BH \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند از جمله $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ می‌باشد، چون زوایای مرکزی O_1 و O_2 برابرند، پس کمان مقابل آن‌ها یعنی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BD}$ برابرند؛ بنابراین CD کمان نظیر وتر AB را نصف کرده است. از طرفی چون $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ ، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ می‌باشد، بنابراین قطر CD بر وتر AB عمود است.

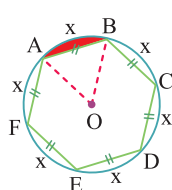
۹۱

وتر نظیر کمان AB را رسم می‌کنیم. چون قطر CD کمان AB را نصف کرده است، پس $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می‌باشد. حال از مرکز دایره به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم. چون $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ می‌باشد، پس زوایای مرکزی مقابل کمان‌های AD و BD یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ با هم برابرند، پس:



$$\begin{cases} OA = OB = r \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AHO \cong \triangle BHO$$

۸۴



اگر وترها در دایره برابر باشند، کمان‌های نظیر برابرند. چون شش‌ضلعی، منتظم است، پس کمان‌های نظیر ضلع‌های شش‌ضلعی برابرند.

$$6x = 360^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

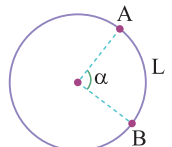
چون زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است، پس $\widehat{AOB} = 60^\circ$ می‌باشد؛ بنابراین مثلث AOB متساوی‌الاضلاع بوده و داریم:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

$$S = \frac{\pi \times (4)^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = \frac{8\pi}{3}$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر $4\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$ می‌باشد.

۸۵

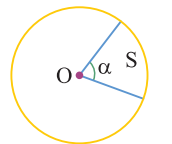


می‌دانیم دایره، کمانی با اندازه 360° درجه و طول $2\pi R$ است، پس به کمک تناسب زیر داریم:

$$\begin{array}{ccc} \text{اندازه} & \text{طول} & \\ 360^\circ & 2\pi R & \\ \alpha & L & \end{array} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} L \times 360^\circ = \alpha \times 2\pi R$$

$$\Rightarrow L = \frac{\alpha \times 2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$

۸۶

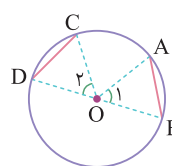


می‌دانیم دایره قطاعی با زاویه مرکزی 360° و مساحت πR^2 است، پس:

$$\begin{array}{ccc} \text{مساحت} & \text{زاویه مرکزی} & \\ \pi R^2 & 360^\circ & \\ S & \alpha & \end{array} \Rightarrow \pi R^2 \times \alpha = 360^\circ \times S \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

۸۷

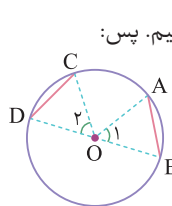
از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم. چون $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ است، پس زوایای مرکزی مقابل آن‌ها یعنی $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند، پس:



$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OD = r \\ OB = OC = r \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

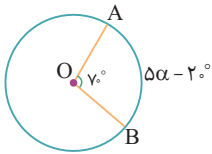
بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند، پس $AB = CD$ می‌باشد.

۸۸



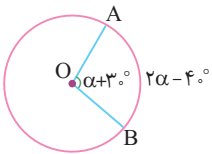
$$\begin{cases} OA = OC = r \\ OB = OD = r \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle AOB \cong \triangle COD$$

۹۶



زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است پس اندازه آن با اندازه کمان روبه‌رویش برابر است:
 $\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow 7^\circ = 5\alpha - 2^\circ$
 $\Rightarrow 5\alpha = 9^\circ \Rightarrow \alpha = 18^\circ$

۹۷

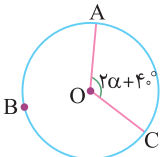


زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است، پس اندازه آن با اندازه کمان مقابلش برابر است.
 بنابراین داریم:
 $\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \alpha + 3^\circ = 2\alpha - 4^\circ$
 $\Rightarrow \alpha = 7^\circ$

۹۸

دایره کمائی با اندازه 36° است، پس:
 $4x - 4^\circ + x + 2^\circ = 36^\circ \Rightarrow 5x = 38^\circ \Rightarrow x = 7.6^\circ$
 زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی است، پس:
 $\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \alpha = x + 2^\circ \Rightarrow \alpha = 9.6^\circ$

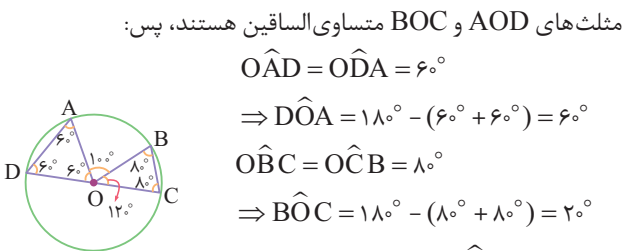
۹۹



دایره کمائی با اندازه 36° است، پس:
 $\widehat{ABC} + \widehat{AC} = 36^\circ \Rightarrow 23^\circ + \widehat{AC} = 36^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{AC} = 13^\circ$

می‌دانیم اندازه زاویه مرکزی با اندازه کمان روبه‌رویش برابر است، پس:
 $2\alpha + 4^\circ = 13^\circ \Rightarrow 2\alpha = 9^\circ \Rightarrow \alpha = 4.5^\circ$

۱۰۰



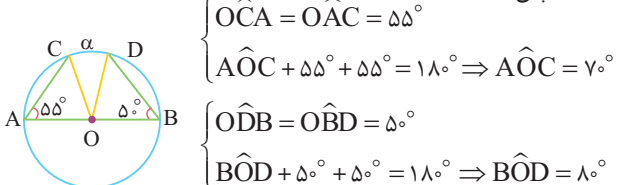
مثلث‌های AOD و BOC متساوی‌الساقین هستند، پس:
 $\widehat{OAD} = \widehat{ODA} = 6^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{DOA} = 180^\circ - (6^\circ + 6^\circ) = 168^\circ$
 $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 8^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ - (8^\circ + 8^\circ) = 164^\circ$

بنابراین زاویه $\widehat{AOB}$ برابر است با:

$\widehat{AOB} = 180^\circ - (6^\circ + 2^\circ) = 172^\circ$
 زاویه $\widehat{AOB}$ زاویه مرکزی رو به کمان $\widehat{AB}$ است، پس:
 $\widehat{AOB} = \widehat{AB} \Rightarrow \alpha = 172^\circ$

۱۰۱

از O به C و D وصل می‌کنیم. مثلث‌های AOC و BOD متساوی‌الساقین هستند، پس:



$\begin{cases} \widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 55^\circ \\ \widehat{AOC} + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 70^\circ \\ \widehat{ODB} = \widehat{OBD} = 5^\circ \\ \widehat{BOD} + 5^\circ + 5^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BOD} = 170^\circ \end{cases}$

بنابراین اجزای متناظر دو مثلث با هم برابرند یعنی $AH = BH$ و $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ می‌باشد. چون $AH = BH$ است پس قطر CD وتر نظیر کمان AB یعنی وتر AB را نصف کرده است. از آن جایی که $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 180^\circ$ پس $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ$ بوده و این یعنی قطر CD بر وتر AB عمود است.

۹۲

از O به B و C وصل می‌کنیم. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های OCH' و OHB داریم:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \\ \Rightarrow OH^2 &= R^2 - BH^2 \\ OC^2 &= OH'^2 + CH'^2 \\ \Rightarrow R^2 &= OH'^2 + CH'^2 \\ \Rightarrow OH'^2 &= R^2 - CH'^2 \end{aligned}$$

چون $OH < OH'$ است، پس $OH^2 < OH'^2$ می‌باشد و داریم:
 $R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2 \Rightarrow -BH^2 < -CH'^2$
 $\Rightarrow BH^2 > CH'^2 \Rightarrow BH > CH$

می‌دانیم H وسط وتر AB و H' وسط وتر CD است، پس:
 $BH > CH' \Rightarrow 2BH > 2CH' \Rightarrow AB > CD$

۹۳

از O به B و C وصل می‌کنیم. می‌دانیم H وسط AB و H' وسط CD می‌باشد، پس:

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow BH > CH'$$

حال به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های OCH' و OHB داریم:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OH^2 + BH^2 \Rightarrow R^2 = OH^2 + BH^2 \\ \Rightarrow BH^2 &= R^2 - OH^2 \\ OC^2 &= OH'^2 + CH'^2 \\ \Rightarrow R^2 &= OH'^2 + CH'^2 \\ \Rightarrow CH'^2 &= R^2 - OH'^2 \end{aligned}$$

چون $BH > CH'$ است، پس $BH^2 > CH'^2$ می‌باشد و داریم:
 $R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \Rightarrow OH^2 < OH'^2$
 $\Rightarrow OH < OH'$

۹۴

بزرگ‌ترین وتر همان قطر دایره است که طول آن دو برابر طول شعاع دایره می‌باشد، پس:

$$6x + 2 = 2 \times 10 \Rightarrow 6x = 20 - 2 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$$

۹۵

(ا) دایره کمائی با اندازه 36° است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} &= 36^\circ \Rightarrow 2x + 4x + 3x = 36^\circ \\ \Rightarrow 9x &= 36^\circ \Rightarrow x = 4^\circ \end{aligned}$$

(ب) دایره کمائی با اندازه 36° است، پس:

$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} &= 36^\circ \Rightarrow 2x + 10^\circ + 4x - 12^\circ + 3x + 2^\circ = 36^\circ \\ \Rightarrow 9x - 9^\circ &= 36^\circ \Rightarrow 9x = 45^\circ \Rightarrow x = 5^\circ \end{aligned}$$