



# حرکت بر خط راست



## صفحه

## ایستگاه عنوان

|     |                                                                                              |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ۸   | مفاهیم بردار مکان، جابجایی و مسافت طی شده                                                    | ۱  |
| ۱۱  | آشنایی با مفهوم سرعت متوسط و تندی متوسط                                                      | ۲  |
| ۱۳  | تحلیل نمودار مکان - زمان و محاسبه $ \vec{V}_{av} $ و $S_{av}$ از روی آن                      | ۳  |
| ۱۶  | تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای (محاسبه آن از روی نمودار مکان - زمان و تعیین جهت حرکت با کمک آن) | ۴  |
| ۱۹  | تحلیل نمودار سرعت - زمان                                                                     | ۵  |
| ۲۰  | شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای و یافتن آن‌ها به کمک نمودار سرعت - زمان                            | ۶  |
| ۲۳  | جابجایی، مسافت طی شده، $ \vec{V}_{av} $ ، $S_{av}$ در حرکت یک متحرک در صفحه                  | ۷  |
| ۴۹  | مروری بر روابط و نکات مهم حرکت با سرعت ثابت                                                  | ۸  |
| ۵۳  | نمودارهای حرکت با سرعت ثابت (یکنواخت)                                                        | ۹  |
| ۵۵  | تحلیل حرکت دو متحرک در حرکت با سرعت ثابت                                                     | ۱۰ |
| ۷۷  | مفهوم شتاب                                                                                   | ۱۱ |
| ۷۸  | روابط حرکت با شتاب ثابت                                                                      | ۱۲ |
| ۸۲  | بررسی مسائل توقف                                                                             | ۱۳ |
| ۸۳  | جابجایی در ثانیه‌های متوالی و مفهوم تصاعد در حرکت شتاب ثابت                                  | ۱۴ |
| ۸۵  | تحلیل نمودارهای حرکت با شتاب ثابت                                                            | ۱۵ |
| ۹۰  | بررسی حرکت‌های تندشونده و کندشونده                                                           | ۱۶ |
| ۱۳۱ | بررسی ارتباط بین جابجایی و نمودار سرعت - زمان                                                | ۱۷ |
| ۱۳۲ | محاسبه شتاب متوسط از روی نمودار شتاب - زمان                                                  | ۱۸ |
| ۱۳۳ | تحلیل دقیق‌تر نمودار شتاب - زمان در حرکت‌های چندمرحله‌ای                                     | ۱۹ |
| ۱۳۵ | بررسی حرکت دو متحرک با یکدیگر                                                                | ۲۰ |

# قسمت اول:

## نگاهی بر مفاهیم حرکت



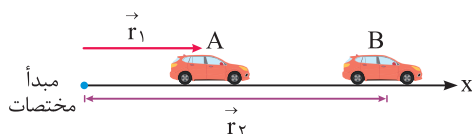
### مفاهیم بردار مکان، جابه‌جایی و مسافت طی شده

### ایستگاه ۱

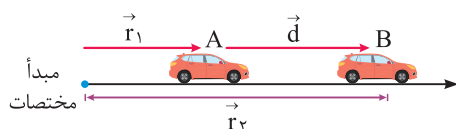
تو اولین ایستگاه ورودتون به فیزیک دوازدهم، بریم ببینیم پارامترهای بردار مکان و جابه‌جایی چی هستن؟ ایشالا که تا آخر کتاب خیلی خوش بگذره.

#### ۱. بردار مکان و جابه‌جایی

**بردار مکان:** در شکل مقابل اتومبیلی بر روی محور  $x$  در حال حرکت است. بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل می‌شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط  $A$  و  $B$  از مسیر نشان داده شده است.

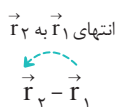


**بردار تغییر مکان (جابه‌جایی):** متحرک نشان داده شده در شکل مقابل، در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  از نقطه  $A$  تا نقطه  $B$  منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازه زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازه زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازه زمانی متصل می‌کند.



$$\vec{d} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

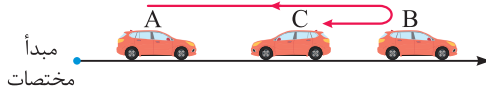
همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بردار جابه‌جایی ( $\vec{d}$ ) معادل با تفاضل بردارهای مکان در نقاط  $A$  و  $B$  است.



خوب یادتون باشه که بردار  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  از انتهای  $\vec{r}_1$  به انتهای  $\vec{r}_2$  وصل میشه.

#### ۲. مسافت طی شده

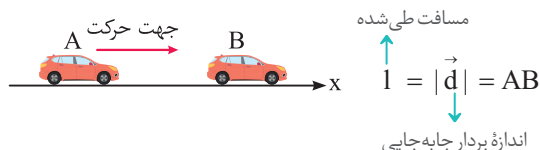
فرض کنید مطابق شکل، اتومبیلی از نقطه  $A$  به  $B$  رفته و سپس از نقطه  $B$  به نقطه  $C$  بازگردد. به طول مسیر طی شده توسط اتومبیل، مسافت پیموده شده یا به اختصار مسافت می‌گویند.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده  $ABC$  از طول پاره خط  $AC$  (اندازه جابه‌جایی) بزرگ‌تر است. در مجموع می‌توان گفت «مسافت طی شده توسط

یک متحرک، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی متحرک است.»

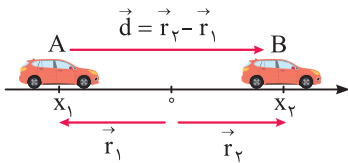
در شکل زیر یک اتومبیل در جهت محور  $x$  مستقیماً از  $A$  به  $B$  منتقل شده است. در این حالت خاص طول بردار جابه‌جایی و مسافت طی شده با یک‌دیگر برابر بوده و هم‌اندازه با طول پاره خط  $AB$  است.



هنگامی که متحرک در مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازه جابه‌جایی آن برابر مسافت طی شده است.

## نکات مهم و کاربردی

۱) فرض کنید متحرکی مطابق شکل مقابل از نقطه A تا نقطه B حرکت کند. بدین ترتیب بردار مکان متحرک در نقاط A و B و بردار جابه جایی به صورت زیر تعریف می شود:



$$\vec{r}_1 = x_1 \vec{i}, \quad \vec{r}_2 = x_2 \vec{i} \Rightarrow \vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2 \vec{i} - x_1 \vec{i} = (x_2 - x_1) \vec{i} = \Delta x \vec{i}$$

۲) اگر متحرک در سمت راست مبدأ باشد (B)، بردار مکان در جهت محور X قرار دارد و اگر متحرک در سمت چپ مبدأ باشد (A)، بردار مکان در خلاف جهت محور X قرار می گیرد.

۳) در هنگام عبور متحرک از مبدأ، بردار مکان متحرک تغییر جهت می دهد، این موضوع از نکات تست خیز این ایستگاه نکات محسوب می شود.

۴) اگر  $\Delta x > 0$  باشد، بردار جابه جایی در جهت محور X و اگر  $\Delta x < 0$  باشد، بردار جابه جایی در خلاف جهت محور X است.

۵) مسافت طی شده کمیتی نرده ای بوده و جابه جایی کمیتی برداری است.

۶) در جدول زیر، دو کمیت جابه جایی و مسافت مقایسه شده اند.

| مسافت                                                      | جابه جایی                                                               | کمیت          |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------|
| طول مسیر طی شده توسط متحرک است.                            | برداری است که نقطه شروع حرکت را مستقیماً به نقطه پایان حرکت وصل می کند. | تعریف         |
| نرده ای                                                    | برداری                                                                  | نوع           |
| m                                                          | m                                                                       | یکای SI       |
| اندازه جابه جایی همواره کوچک تر یا مساوی مسافت طی شده است. |                                                                         | مقایسه اندازه |

۷) جابه جایی کل متحرک در چند بازه زمانی متوالی، برابر مجموع برداری جابه جایی های متحرک در هر یک از این بازه ها است. مثلاً اگر متحرکی در  $t_1$  ثانیه اول حرکت

جابه جایی  $\vec{d}_1 = 5 \vec{i}$ ، در  $t_2$  ثانیه دوم حرکت جابه جایی  $\vec{d}_2 = -7 \vec{i}$  و در  $t_3$  ثانیه سوم حرکتش جابه جایی  $\vec{d}_3 = 8 \vec{i}$  را انجام داده باشد، جابه جایی آن در کل حرکت

برابر است با:

$$\vec{d}_{\text{کل}} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = 5 \vec{i} + (-7 \vec{i}) + (8 \vec{i}) = 6 \vec{i} \xrightarrow{\text{به طور ساده تر}} \Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 5 - 7 + 8 = 6 \text{ m}$$

حالا بریم بایه تمرین دُرست حسابی، مطالب این ایستگاه رو جمع بندی کنیم ...

**تمرین** در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده شده بر روی محور X از نقطه A شروع به حرکت کرده و به نقطه B می رود و سپس از نقطه B به سمت نقطه C باز

می گردد. کدام عبارت در مورد حرکت این اتومبیل از A تا C نادرست است؟



۲) ۸ متر از مسافت طی شده، در خلاف جهت محور X است.

۴) بردار جابه جایی متحرک از A تا C، برابر  $6 \vec{i}$  در SI می باشد.

۱) بردار مکان متحرک در نقطه C، برابر  $-1 \vec{i}$  در SI می باشد.

۳) این متحرک از A تا C، مسافت ۱۰ m را طی کرده است.

**پاسخ** برای تحلیل این سؤال آموزشی، به موارد زیر توجه کنید:

۱) بردار مکان متحرک در نقاط A، B و C به صورت زیر است:

$$\vec{r}_A = 5 \vec{i} \quad \vec{r}_B = -3 \vec{i} \quad \vec{r}_C = -1 \vec{i}$$

۲) این متحرک از نقطه A تا نقطه B، ۸ m در خلاف جهت محور X و از نقطه B تا نقطه C، ۲ m در جهت محور X حرکت کرده است و در مجموع مسافتی به اندازه ۱۰ m را طی کرده است.

۳) بردار جابه جایی متحرک از A تا C نیز به صورت مقابل به دست می آید:

$$\vec{d} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = -1 \vec{i} - 5 \vec{i} = -6 \vec{i}$$

بنابراین تنها عبارت مطرح شده در گزینه (۴) نادرست است.

### بررسی ویژگی‌های معادله مکان - زمان

تو ادامه کار درک مفهوم ساده معادله به پارامتر (مثل مکان) برحسب زمان، تو این فصل خیلی برامون مهمه. بریم ببینیم چه جوری میشه با این مفهوم به ارتباط خوبی برقرار کرد.

معادله مکان - زمان یک متحرک، معادله‌ای است که مکان متحرک را در هر لحظه مشخص می‌کند. فرض کنيد متحرکی بر روی محور  $x$  در حال حرکت است و معادله مکان - زمان آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

این معادله، معادله‌ای است که اگر زمان را در آن قرار دهیم، بلافاصله موقعیت متحرک را به ما می‌دهد. مثلاً داریم:

$$x = t^3 + 2t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 0^3 + 2 \times 0 + 5 = 5 \text{ m} \text{ (در } t_0 = 0 \text{ شروع حرکت، } x_0 = 5 \text{ m است.)} \\ t_1 = 1 \text{ s} \rightarrow x_1 = 1^3 + 2 \times 1 + 5 = 8 \text{ m} \text{ (در } t_1 = 1 \text{ s، } x_1 = 8 \text{ m است.)} \\ t_2 = 2 \text{ s} \rightarrow x_2 = 2^3 + 2 \times 2 + 5 = 17 \text{ m} \text{ (در } t_2 = 2 \text{ s، } x_2 = 17 \text{ m است.)} \end{cases}$$

**تذکره** اگر ما بخواهیم جابه‌جایی متحرک را در یک بازه زمانی مانند  $t_1 = 1 \text{ s}$  تا  $t_2 = 2 \text{ s}$  از روی معادله مکان - زمان به دست آوریم، کافی است مقادیر  $t_1$  و  $t_2$  را در معادله مکان قرار داده و حاصل  $x_1$  و  $x_2$  را به دست آوریم.  $x_2 - x_1$ ، معادل جابه‌جایی متحرک است.

$$\begin{cases} t_2 = 2 \text{ s} \rightarrow x_2 = 17 \text{ m} \\ t_1 = 1 \text{ s} \rightarrow x_1 = 8 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 17 - 8 = 9 \text{ m}$$

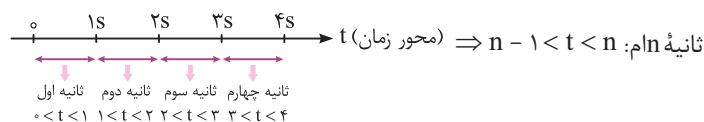
### نکات مهم و کاربردی

۱) مکان اولیه متحرک، یعنی مکان آن در لحظه  $t = 0$ . بنابراین برای پیدا کردن مکان اولیه یک متحرک، کافی است در معادله مکان - زمان آن، پارامتر  $t$  را برابر صفر قرار دهیم.

۲) متحرکی بر روی محور  $x$  در حال حرکت است، این متحرک هنگامی از مبدأ عبور می‌کند که  $x = 0$  شود. به عبارتی برای پیدا کردن لحظات عبور یک متحرک از مبدأ، کافی است برای آن  $x = 0$  قرار داده شود.

مثال  $x = 4t - 8$  پیدا کردن لحظه عبور از مبدأ  $\rightarrow x = 4t - 8 = 0 \rightarrow t = 2 \text{ s}$

۳) ثانیه اول حرکت، یک بازه زمانی است که طول آن برابر یک ثانیه بوده و از  $t = 0$  شروع می‌شود یعنی  $0 < t < 1 \text{ s}$ ، ثانیه دوم حرکت یعنی  $1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$  و به همین صورت می‌توان گفت:



۴) دو ثانیه اول حرکت، یک بازه زمانی است که طول آن برابر دو ثانیه و از  $t = 0$  شروع می‌شود، یعنی  $0 < t < 2 \text{ s}$ . دو ثانیه دوم یعنی  $2 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$  و به همین صورت دو ثانیه‌های بعدی نیز نوشته می‌شود.



در ادامه با حل چند تمرین نسبتاً ساده، مفاهیم ارائه شده را بهتر درک می‌کنیم.

#### تمرین ۲) دو ثانیه هشتم از یک حرکت، معادل با چه بازه زمانی است؟

**پاسخ** دو ثانیه هشتم یک حرکت، یعنی ۸ بازه زمانی ۲ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای این بازه زمانی  $16 \text{ s} = 8 \times 2$  است، از طرفی طول هر بازه زمانی ۲ است یعنی:  $16 \text{ s} < t < 18 \text{ s}$  ← ۲ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

#### تمرین ۳) نه ثانیه پنجم از یک حرکت، معادل با چه بازه زمانی است؟

**پاسخ** نه ثانیه پنجم یک حرکت، یعنی ۵ بازه زمانی ۹ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای بازه زمانی  $45 \text{ s} = 5 \times 9$  است، از طرفی طول هر بازه زمانی ۹ است یعنی  $45 \text{ s} < t < 54 \text{ s}$  ← ۹ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.

\* اگر بخواهیم بازه‌های زمانی را دقیق‌تر بنویسیم، ۲ ثانیه اول معادل با  $0 \leq t < 2 \text{ s}$  و ۲ ثانیه دوم معادل با  $2 \text{ s} \leq t < 4 \text{ s}$  و ... می‌باشد که البته این موضوع از اهمیت چندانی برخوردار نیست و معمولاً در کتاب‌های کنکور رعایت نمی‌شود.



**تمرین ۴** معادله حرکت متحرکی بر روی محور  $x$ ، در SI از رابطه  $x = t^2 - 4t$  به دست می‌آید. در این صورت جابه جایی متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت و در ۲ ثانیه سوم حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر است؟

$$۱۰, -۴ (۴)$$

$$۸, -۴ (۳)$$

$$۱۰, -۶ (۲)$$

$$۱۲, -۴ (۱)$$

**پاسخ** برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

**گام اول:** محاسبه جابه جایی متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت ( $0 < t < 2$ ):

$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^2 - 4 \times 2 = -4m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -4m$$



**گام دوم:** محاسبه جابه جایی در ۲ ثانیه سوم حرکت ( $4s < t < 6s$ ):

$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4s \rightarrow x_1 = 4^2 - 4 \times 4 = 0 \\ t_2 = 6s \rightarrow x_2 = 6^2 - 4 \times 6 = 12m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 12 - 0 = 12m$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

## ۲. شرط به هم رسیدن دو متحرک

فرض کنید معادله مکان - زمان دو متحرک A و B که همزمان شروع به حرکت کرده‌اند، به صورت  $x_A = 4t + 2$  و  $x_B = -5t + 20$  است. شرط به هم رسیدن دو متحرک آن است که مکان دو متحرک یکسان شود و این یعنی داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 4t + 2 = -5t + 20 \Rightarrow t = 2s$$

از سوی دیگر ممکن است پرسیده شود که این دو متحرک در چه مکانی به هم می‌رسند؟ برای محاسبه این موضوع داریم:

$$t = 2s \xrightarrow{\text{در یکی از } x \text{ ها قرار می‌دهیم}} x_A = 4t + 2 = 4 \times 2 + 2 = 10m$$

در مکان  $x = +10m$  دو متحرک به هم می‌رسند.

**حالا وقتشه به سری به تستای ۱ تا ۱۴ بزنیم ...**



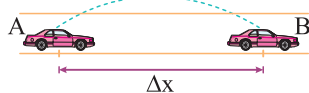
## آشنایی با مفهوم سرعت متوسط و تندی متوسط

## ایستگاه ۲

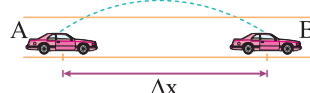


**درک مفهوم تندی متوسط و سرعت متوسط، یکی از خواسته‌های اصلی ما تو این فصل هست. خوب روی این موضوع تمرکز کنید ...**

**سرعت متوسط:** در شکل زیر متحرکی با سرعت متغیر، از نقطه A به سمت نقطه B حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان  $\Delta t$  ثانیه، به نقطه B می‌رسد. حال می‌خواهیم ببینیم این متحرک با چه سرعت ثابتی از نقطه A تا نقطه B حرکت کند تا مجدداً در همان زمان  $\Delta t$  از A به B برسد.



با سرعت متغیر در مدت  $\Delta t$  از A تا B می‌رود.



می‌خواهیم با سرعت ثابت  $v_{av}$  در همان زمان  $\Delta t$  از A تا B برویم.

این پارامتر، **سرعت متوسط** نام دارد که به نوعی مقدار متوسطی برای سرعت متحرک در طی لحظات حرکت از نقطه A تا نقطه B محسوب می‌شود. اگر متحرک روی

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \vec{i}$$

محور x در حال حرکت باشد، برای محاسبه  $\vec{v}_{av}$ ، کافی است جابه جایی  $\vec{d}$  را بر زمان انجام آن جابه جایی، یعنی  $\Delta t$  تقسیم کنیم:

**تندی متوسط:** به نسبت مسافت طی شده (l) به زمان طی مسافت ( $\Delta t$ ) تندی متوسط گویند. تندی متوسط را با نماد  $s_{av}$  نشان می‌دهند و برای محاسبه  $s_{av}$  داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

## نکات مهم و کاربردی

سرعت متوسط مانند جابه جایی کمیتی برداری و تندی متوسط مانند مسافت، کمیتی عددی (نرده‌ای) می‌باشد.

۲) اگر جابه‌جایی متحرک در طی انجام یک حرکت صفر شود، سرعت متوسط آن نیز صفر می‌شود. به طور مثال در حرکت زیر که متحرک ابتدا  $10\text{ m}$  در جهت محور  $x$  حرکت کرده و سپس  $10\text{ متر}$  در خلاف جهت محور  $x$  حرکت کرده و به محل اولیه خود بازمی‌گردد، سرعت متوسط در کل زمان حرکت صفر است.



$$\begin{cases} x_{\text{شروع}} = 0 \\ x_{\text{پایان}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_{\text{پایان}} - x_{\text{شروع}} = 0$$

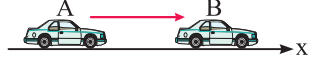
۳) اگر یک متحرک در جهت محور  $x$  جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن مثبت بوده و اگر در خلاف جهت محور  $x$  جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن منفی است.

۴) تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. به عبارت دیگر تندی متوسط فقط زمانی برابر صفر می‌شود که متحرک ساکن باشد.

۵) مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر از اندازه جابه‌جایی یا برابر با آن است، بنابراین تندی متوسط هم همواره بزرگ‌تر از اندازه سرعت متوسط یا برابر با آن است.

$$s_{av} \geq |\vec{v}_{av}|$$

۶) فرض کنید مطابق شکل مقابل متحرکی روی محور  $x$  از نقطه  $A$  تا نقطه  $B$  بدون تغییر جهت جابه‌جا شود. در این حالت چون مسافت طی شده برابر اندازه جابه‌جایی است، تندی متوسط برابر اندازه سرعت متوسط می‌شود.  $s_{av} = |\vec{v}_{av}|$



حالا بریم تو چند تا تمرین بعدی، ببینیم چه جوری از نکاتی که یاد گرفتیم میشه توی حل مسائل استفاده کرد ...

**تمرین ۵)** معادله حرکت متحرکی که روی محور  $x$  حرکت می‌کند، در SI به صورت  $x = 0.25 + \sin \pi t$  می‌باشد. اندازه سرعت متوسط آن در  $5$  ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

$$0.15 \text{ (۴)}$$

$$0.25 \text{ (۳)}$$

$$0.05 \text{ (۲)}$$

$$\text{صفر (۱)}$$

**پاسخ)** برای محاسبه سرعت متوسط در  $5$  ثانیه اول حرکت، کافیه مکان متحرک در لحظات  $t_1 = 0$  و  $t_2 = 5\text{ s}$  را به دست آوریم:

$$x = 0.25 + \sin \pi t \quad , \quad (0 < t < 5\text{ s}) \rightarrow |\vec{v}_{av}| = ?$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0.25 + \sin(0) = 0.25\text{ m} \\ t_2 = 5\text{ s} \rightarrow x_2 = 0.25 + \sin 5\pi = 0.25\text{ m} \end{cases} \rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} \vec{i} = \frac{0.25 - 0.25}{5 - 0} \vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = 0 \text{ (گزینه ۱)}$$

**دقت)** همان طور که مشاهده می‌کنید، هرگاه جابه‌جایی متحرک برابر صفر شود، سرعت متوسط متحرک نیز برابر صفر می‌شود.

**تمرین ۶)** مطابق شکل، اتومبیلی روی محور  $x$  از نقطه  $A$  شروع به حرکت کرده و در مدت  $6\text{ s}$  به نقطه  $B$  رفته و سپس در مدت  $4\text{ s}$  از نقطه  $B$  به نقطه  $C$  می‌رود. کدام عبارت در مورد این حرکت نادرست است؟



۱) این اتومبیل به طور متوسط در هر ثانیه،  $5\text{ m}$  از مسیر را پیموده است.

۲) این اتومبیل به طور متوسط در هر ثانیه،  $3\text{ m}$  از نقطه  $A$  به مقصد نزدیک شده است.

۳) تندی متوسط این اتومبیل  $5\text{ m/s}$  است.

۴) اندازه سرعت متوسط این اتومبیل  $15\text{ m/s}$  است.

**پاسخ)** این اتومبیل از نقطه  $A$  تا  $B$ ، مسافت  $40\text{ m}$  را طی کرده و سپس از نقطه  $B$  تا  $C$ ، به اندازه مسافت  $10\text{ m}$  برگشته است. بنابراین در مجموع مسافت طی شده توسط اتومبیل  $50\text{ m}$  می‌شود و تندی متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{50}{10} = 5\text{ m/s}$$

بنابراین تندی متوسط  $5\text{ m/s}$  می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه، به طور متوسط  $5\text{ m}$  از مسیر را طی کرده است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{30}{10} \vec{i} = 3 \vec{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = 3\text{ m/s}$$

در ادامه سرعت متوسط اتومبیل را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

بنابراین اندازه سرعت متوسط  $3\text{ m/s}$  می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه به طور متوسط  $3\text{ m}$  از نقطه  $A$  به سمت مقصد، یعنی نقطه  $C$  نزدیک شده است، پس گزینه (۴) عبارت نادرستی است.

$$1\text{ km/h} = 1 \left( \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} \right) \Rightarrow 1\text{ km/h} = \frac{1}{3.6}\text{ m/s}$$

**تذکره)** برای تبدیل  $\text{km/h}$  به  $\text{m/s}$ ، کافی است عدد مورد نظر را بر  $3.6$  تقسیم کنیم:

$$1\text{ m/s} = 3.6\text{ km/h}$$

و برای تبدیل  $\text{m/s}$  به  $\text{km/h}$ ، عدد مورد نظر را در  $3.6$  ضرب می‌کنیم:

حالا وقتشه به سری به تستای ۱۵ تا ۳۸ بنزیم ...



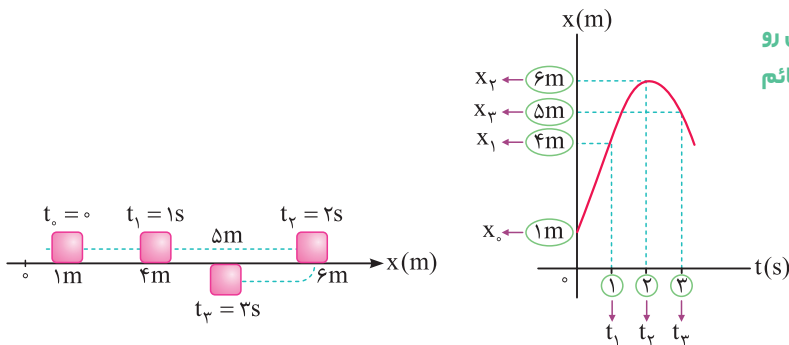
## تحلیل نمودار مکان - زمان و محاسبه $|\vec{v}_{av}|$ و $s_{av}$ از روی آن



### ۱. تحلیل مفهومی نمودار مکان - زمان

فرض کنید مکان متحرکی مطابق شکل، در لحظات  $t_0, t_1, t_2, t_3$  و ... داده شده است. اگر این مکان ها و زمان ها را در یک نمودار ترسیم کنیم، از لحاظ مفهومی نمودار مکان - زمان حرکت متحرک به دست می آید.

**به زبان خودمونی، نمودار مکان - زمان نموداریه که آگه زمان رو از روی محور افقی داشته باشی، خیلی راحت مکان رو روی محور قائم بهت میده.**

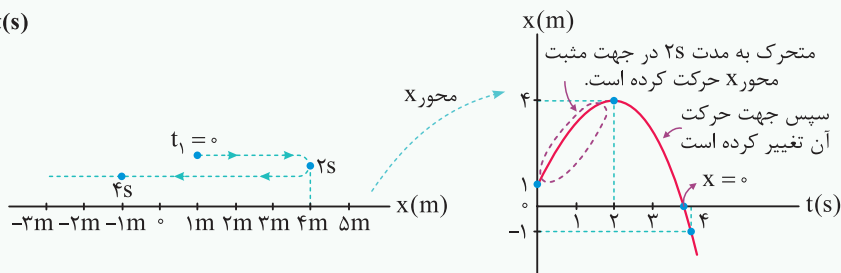
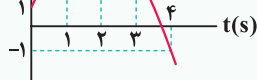


**تذکره** یک دانش آموز خلاق، از روی نمودار مکان - زمان مسیر حرکت متحرک را در ذهن خود تجسم می کند. این موضوع یعنی با خود تصور می کند که از  $t = 0$  تا  $t_2 = 2s$ ، متحرک در جهت محور  $x$  حرکت کرده و از مکان  $1m$  به مکان  $6m$  منتقل می شود. در ادامه از  $t_2 = 2s$  تا  $t_3 = 3s$  در خلاف جهت محور  $x$  جابه جا شده و از مکان  $6m$  به مکان  $5m$  رفته است.

### تمرین ۷ نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت مقابل است. جابه جایی و مسافت طی شده توسط این

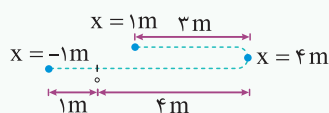
متحرک تا پایان ثانیه چهارم، برابر چند متر است؟

**پاسخ** با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، مسیر حرکت این متحرک به صورت زیر است و می توان نوشت:



جابه جایی این متحرک به صورت زیر است:

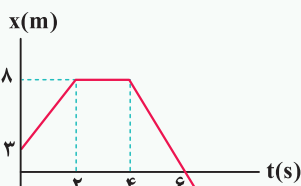
$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1m \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = -1m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -1 - (1) = -2m$$



حال به محاسبه مسافت طی شده می پردازیم. متحرک ابتدا از  $x = 1m$  شروع به حرکت کرده و تا  $x = 4m$  رفته است (  $3m$  مسافت طی کرده است). در ادامه از  $x = 4m$  شروع به حرکت کرده و به  $x = 0$  رفته است (  $4m$  مسافت طی کرده است)، در پایان نیز از  $x = 0$  به  $x = -1m$  رفته است (  $1m$  مسافت طی کرده است) و مجموع مسافت طی شده توسط متحرک برابر  $3 + 4 + 1 = 8m$  است.

**تذکره** جابه جایی متحرک هیچ ربطی به چگونگی مسیر حرکت آن ندارد و برای محاسبه آن، کافی است مکان متحرک را در ابتدا و انتهای حرکت بدانیم، ولی برای محاسبه مسافت طی شده، باید حتماً چگونگی مسیر حرکت را بدانیم.

### تمرین ۸ نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور $x$ حرکت می کند، مطابق شکل است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) در کدام بازه زمانی، متحرک متوقف بوده است؟

ب) بردار مکان متحرک چند ثانیه در جهت محور  $x$  بوده است؟

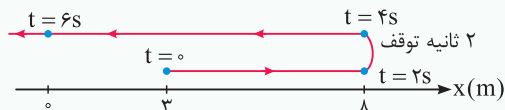
ج) در بازه ای که متحرک در جهت محور  $x$  حرکت می کند، اندازه جابه جایی آن چند متر است؟

د) مسافت طی شده در ۶ ثانیه اول حرکت چند متر است؟

**پاسخ** الف) در بازه زمانی  $2s < t < 4s$ ، نمودار افقی است، یعنی مکان متحرک تغییر نمی‌کند و متحرک متوقف بوده است.

ب) در ۶ ثانیه اول حرکت،  $x > 0$  است، یعنی بردار مکان متحرک در جهت محور  $x$  است. پس از لحظه  $t = 6s$ ، بردار مکان در خلاف جهت محور  $x$  می‌شود.

ج) با توجه به نمودار، مسیر حرکت متحرک به صورت شکل مقابل است:



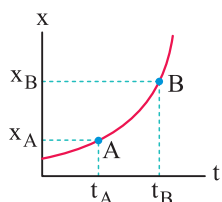
همان طور که می‌بینید، در ۲ ثانیه اول، متحرک در جهت محور  $x$  حرکت می‌کند و به اندازه  $5m$  جابه‌جا می‌شود.

د) در ۶ ثانیه اول، متحرک ابتدا  $5m$  در جهت محور  $x$  جابه‌جا می‌شود و پس از ۲ ثانیه توقف، در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی شده برابر  $l = 5 + 8 = 13m$  است.

## ۲. محاسبه سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان

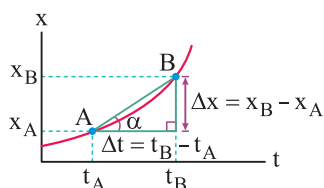
فرض کنید نمودار مکان - زمان را برای یک متحرک در اختیار داریم و سرعت متوسط آن بین دو لحظه  $t_A$  و  $t_B$  از حرکت خواسته شده است. در این گونه مسائل برای محاسبه سرعت متوسط، از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

**روش اول (نمودار خوانی):** در این روش ابتدا بر روی نمودار، نقاط  $A$  و  $B$  را مشخص کرده و مکان متحرک در نقاط  $A$  و  $B$  را به دست می‌آوریم. در نهایت به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$B \text{ و } A \text{ : سرعت متوسط بین } \vec{v}_{av}|_{A,B} = \frac{\Delta x_{A,B}}{\Delta t_{A,B}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

**روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار):** در این حالت، ابتدا نقاط  $A$  و  $B$  را روی نمودار مشخص کرده و سپس خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه  $t_A$  و  $t_B$  از حرکت است.



$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}| = \text{شیب خط } AB$$

این روش در مسائلی که می‌خواهند سرعت متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنند، بسیار کاربرد دارد.

## ۳. محاسبه تندی متوسط از روی نمودار مکان - زمان

فرض کنید نمودار مکان - زمان را برای یک متحرک را در اختیار داریم و تندی متوسط بین دو لحظه  $t_A$  و  $t_B$  از حرکت خواسته شده است. برای محاسبه تندی متوسط، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

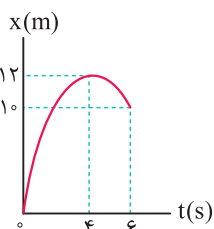
**گام اول:** ابتدا مسافت طی شده بین دو لحظه  $t_A$  و  $t_B$  را با توجه به نکات ارائه شده محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

**گام دوم:** به کمک رابطه مقابل، تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

## ۴. بررسی یک مفهوم بسیار پرکاربرد

برای به دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان، فقط باید به مکان ابتدا و انتهای حرکت توجه کنیم. اما برای به دست آوردن تندی متوسط باید کل مسیر طی شده توسط متحرک را به دست آوریم. به طور مثال فرض کنید نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور  $x$  حرکت می‌کند، به صورت شکل مقابل باشد. این متحرک از مبدأ مختصات در جهت محور  $x$  حرکت کرده در نقطه  $x = 12m$  تغییر جهت داده و سپس در خلاف جهت محور  $x$  حرکت کرده و به نقطه  $x = 10m$  می‌رسد. برای به دست آوردن اندازه سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت داریم:



$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{6} = \frac{5}{3} \text{ m/s}$$

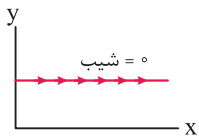
اما برای به دست آوردن تندی متوسط حرکت باید مسافت طی شده را به دست آوریم. این متحرک  $12m$  در جهت محور  $x$  و  $2m$  در خلاف جهت محور  $x$  حرکت کرده است، بنابراین در مجموع مسافت  $14m$  را طی کرده است و داریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ m/s}$$

## ۵. سه یادآوری مهم و بسیار کاربردی از ریاضی

الان می‌خواهیم به چند تا نکته ریاضی براتون بیاریم که تو کل فیزیک دوازدهم، خیلی به کارتون میاد ...

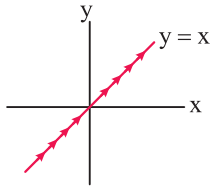
۱ خطوط افقی دارای شیب صفر هستند.



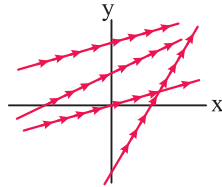
(با افزایش  $x$ ،  $y$  ثابت است.)

۲ خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط  $y = x$  (نیمساز ربع اول و سوم) هستند،

شیب مثبت دارند.



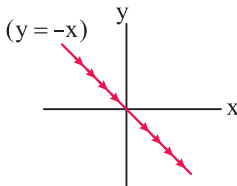
(با افزایش  $x$ ، پیشروی نمودار به سمت بالا است.)



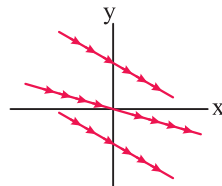
(خطوط دارای شیب مثبت)

۳ ساده بگیریم خطوطی که سمت راستشون بالاتر از سمت چپشون، شیبشون مثبت و بالعکس ...

خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط  $y = -x$  (نیمساز ربع دوم و چهارم) هستند، شیب منفی دارند.



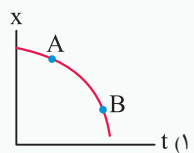
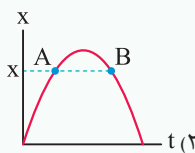
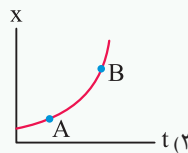
(با افزایش  $x$ ، پیشروی نمودار به سمت پایین است.)



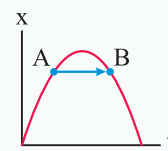
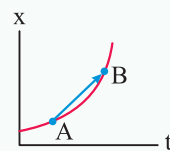
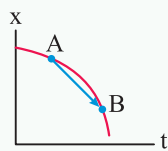
(خطوط دارای شیب منفی)

## حالا بریم با حل چند تا تمرین، این ایستگاه رو بترکونیم ...

تمرین ۹ در هریک از نمودارهای مکان - زمان زیر، علامت سرعت متوسط متحرک از A تا B را مشخص کنید.



پاسخ: با توجه به این که نمودار مکان - زمان برای هر سه متحرک داده شده است، سرعت متوسط برابر شیب خط واصل بین نقاط A و B از نمودار است:

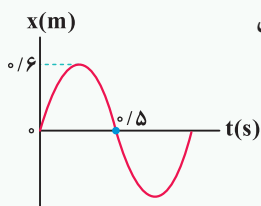


شیب  $AB$  صفر است ( $v_{av} = 0$ )    شیب  $AB$  مثبت است ( $v_{av} > 0$ )    شیب  $AB$  منفی است ( $v_{av} < 0$ )

دقت شود که قرار دادن فلش بر روی خط‌های واصل بین دو نقطه، فقط به منظور درک بیشتر شما عزیزان از علامت شیب نمودار است.

تمرین ۱۰ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط آن در  $0.5$  ثانیه اول

حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر بر ثانیه است؟



(۲) صفر -  $1/2$

(۴) صفر -  $2/4$

(۱) صفر -  $1/2$

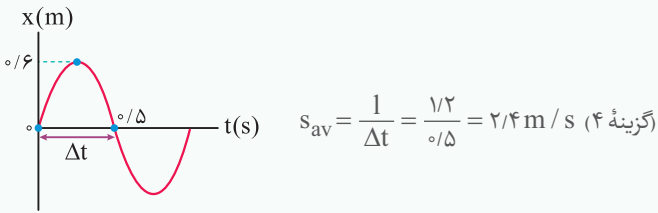
(۳) صفر -  $2/4$

پاسخ: نمودار داده شده نمودار مکان - زمان متحرک است و می‌خواهیم با خواندن مکان متحرک در  $t_1 = 0$  و  $t_2 = 0.5$  از

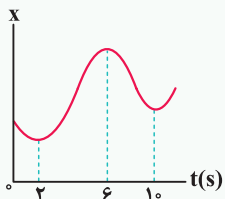
روی نمودار، سرعت متوسط در  $0.5$  ثانیه اول حرکت را به دست آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 0.5 \Rightarrow x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{اندازه سرعت متوسط} : |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 0}{0.5 - 0} = 0$$

از طرفی با توجه به نمودار، این متحرک  $0.6 \text{ m}$  در جهت محور  $x$  حرکت کرده و سپس  $0.6 \text{ m}$  در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می‌کند. بنابراین در مدت  $0.5 \text{ s}$  مسافت  $1.2 \text{ m}$  را طی کرده است و تندی متوسط آن برابر است با:



**تمرین ۱۱** نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل است. تندی متوسط در کدامیک از بازه‌های زمانی مشخص شده در گزینه‌ها بیشتر است؟



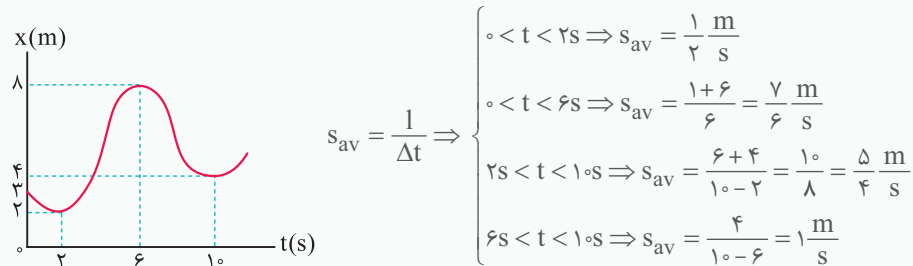
۲) صفر تا ۶s

۱) صفر تا ۲s

۴) ۶s تا ۱۰s

۳) ۲s تا ۱۰s

**پاسخ** برای پاسخ دادن به این سؤال بسیار جالب، می‌توان اعدادی مناسب و منطقی متناسب با نمودار را بر روی آن فرض کرده و تندی متوسط را در تمامی بازه‌های اشاره شده با توجه به این اعداد به دست آوریم. به طور مثال، می‌توان نوشت:



همان طور که می‌بینید، تندی متوسط در بازه ۲s تا ۱۰s ، بیشترین را دارد. بنابراین گزینه ۳) صحیح است.

حالا وقتشه یه سری به تستای ۳۹ تا ۶۵ بزنیم ...



## تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای (محاسبه آن از روی نمودار مکان - زمان و تعیین جهت حرکت با کمک آن)

## ایستگاه ۴

حالا بریم ببینیم تندی لحظه‌ای چیه و چه اطلاعات مفیدی ارزش استخراج میشه ...

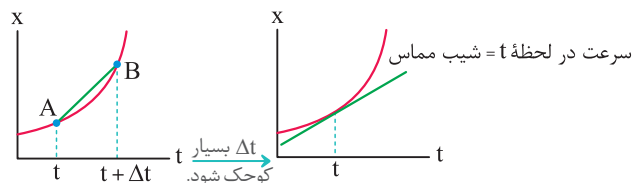
### ۱. مفهوم تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

تندی متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر را، **تندی لحظه‌ای** می‌نامند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، در واقع سرعت لحظه‌ای آن را بیان کرده‌ایم. برای مثال وقتی درون خودرویی به طرف شمال در حال حرکت باشید و در نقطه‌ای از مسیر، عقربه تندی سنج خودروی شما روی  $100 \text{ km/h}$  باشد، در این صورت تندی لحظه‌ای خودرو برابر  $100 \text{ km/h}$  و سرعت لحظه‌ای آن  $100 \text{ km/h}$  به طرف شمال است.

**تذکر** برای سادگی و بنا به قراردادی که در کتاب‌های فیزیک به کار می‌رود، سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای را به ترتیب به صورت سرعت و تندی بیان می‌کنند. هم چنین سرعت را که کمیتی برداری است با نماد  $\vec{v}$  و تندی را که برابر اندازه سرعت و کمیتی نرده‌ای است با نماد  $v$  نشان می‌دهند.

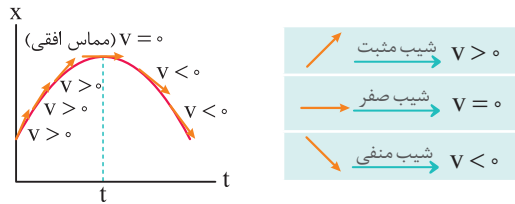
### ۲. محاسبه سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان - زمان

همان طور که می‌دانیم شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، برابر سرعت متوسط متحرک است. حال اگر بازه زمانی  $\Delta t$  بسیار کوچک شود، عملاً  $A$  و  $B$  بر روی هم منطبق شده و شیب خط واصل بین دو نقطه  $A$  و  $B$ ، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطه  $A$  برابر است. این موضوع یعنی شیب مماس ترسیمی بر نمودار مکان - زمان در لحظه  $t$ ، برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در این لحظه است.



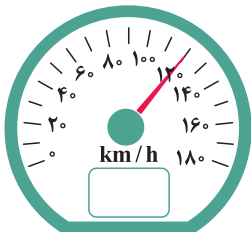
## نکات مهم و کاربردی

۱) با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی در شکل مقابل، سرعت متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قلّه نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد. بنابراین متحرک ابتدا در جهت محور X حرکت می‌کند ( $v > 0$ )، سپس توقف کرده ( $v = 0$ ) و سپس در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند ( $v < 0$ ).

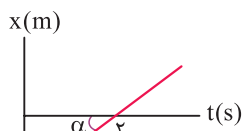


قرار دادن فلش برای مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است و از نظر علمی برای مماس‌ها نباید جهت بگذاریم.

۲) عقربه تندى سنج، تندى لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد و هیچ‌گونه اطلاعاتی در خصوص جهت حرکت خودرو به ما گزارش نمی‌کند. استفاده از واژه سرعت سنج برای این وسیله نادرست است، هر چند در زندگی روزمره معمولاً به اشتباه از این واژه استفاده می‌کنیم.



اتومبیل با تندى  $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  حرکت می‌کند ولی جهت حرکت آن مشخص نیست.



$$|\tan \alpha| = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{1}{2} = 5$$

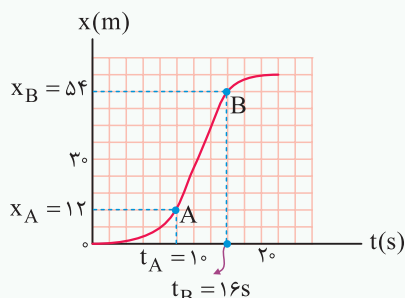
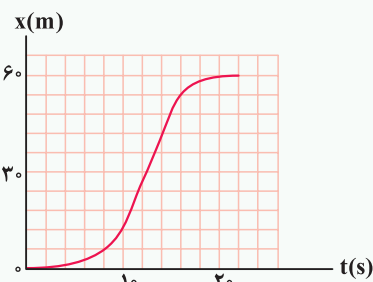
$$v = v_{av} = \tan \alpha = 5 \text{ m/s}$$

شیب نمودار مثبت است.

۳) اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازه سرعت متحرک در آن بازه زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازه زمانی، برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است. به عنوان مثال، در نمودار مکان - زمان مقابل، سرعت متوسط در هر بازه زمانی دلخواه ثابت بوده و برابر سرعت لحظه‌ای (یعنی شیب نمودار) می‌باشد.

این یعنی اگه یه طرح، سرکارتون بزاره و پیرسه سرعت در هنگام عبور از مبدأ چنده، جواب همون  $5 \text{ m/s} + \text{هستش}$ .

یا حتی اگه پیرسه سرعت متوسط در  $5 \text{ m/s} + \text{هست}$ ، احتمالاً باورش سخت بود براتون ...



$$v_{AB} = v_{avAB} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{54 - 12}{16 - 10} \Rightarrow v_{AB} = 7 \text{ m/s} \text{ (گزینه ۳)}$$

تمرین ۱۲) شکل مقابل، نمودار مکان - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت کرده است. پیشینه

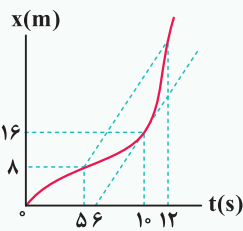
(تجربی خارج ۹۵)

سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۵
- ۳) ۷
- ۴) ۹

پاسخ

در حرکت این متحرک، از لحظه  $t = 0$  تا A، سرعت متحرک در حال افزایش است (شیب مماس ترسیمی بر نمودار در حال افزایش است)، در ادامه از A تا B، نمودار مکان - زمان خط صاف بوده و سرعت متحرک ثابت است و در نهایت از B سرعت کاهش یافته و در نهایت به صفر می‌رسد. با توجه به این موضوع، بیشترین سرعت بین A تا B است و کفایت شیب خط AB را بیابیم (هر یک از خانه‌های محور قائم معادل ۶ m و هر یک از خانه‌های محور افقی معادل ۲ s است):



**تمرین ۱۳** نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متحرک در لحظه  $t = 10s$  برابر اندازه سرعت متوسط آن بین دو لحظه  $t_1 = 5s$  و  $t_2 = 12s$  باشد، متحرک در لحظه  $t = 12s$  در چند متری مبدأ می‌باشد؟

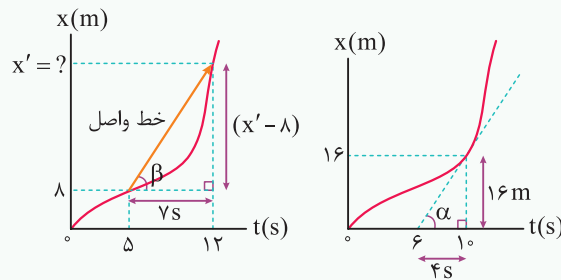
- (۱) ۲۸  
(۲) ۲۴  
(۳) ۳۶  
(۴) ۲۰

**پاسخ** برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

طبق صورت سؤال، تندی متحرک در لحظه  $t = 10s$ ، برابر اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه  $t_1 = 5s$  تا  $t_2 = 12s$  است و داریم:

$$v = \tan \alpha = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/s} \quad \text{تندی در لحظه } t = 10s$$

در صورتی که متحرک در لحظه  $t = 12s$  در مکان  $x'$  باشد، با محاسبه اندازه سرعت متوسط از لحظه  $5s$  تا  $12s$  داریم:

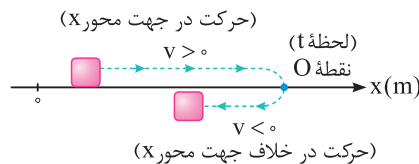


$$v_{av} = \tan \beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x' - 8}{7} = 4 \Rightarrow x' = 36 \text{ m} \quad (\text{گزینه ۳})$$

### بررسی لحظه تغییر جهت یک متحرک

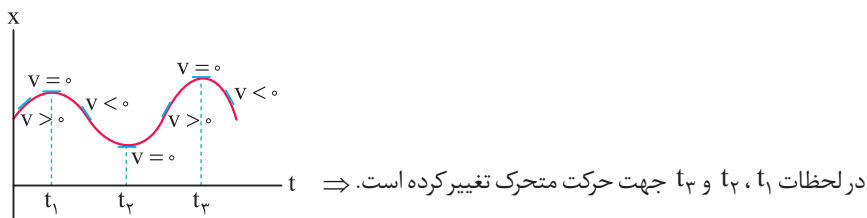
**تو اینجا، می‌خواهیم معنی تغییر جهت متحرک رو بفهمیم ... این موضوع تو خیلی از سؤالها به کارمون میاد.**

در شکل زیر متحرکی بر روی محور  $x$  در حال حرکت است. این متحرک در ابتدا در جهت محور  $x$  در حال حرکت است (این موضوع یعنی سرعت آن مثبت است) در لحظه  $t$ ، متحرک به نقطه  $O$  رسیده و در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می‌کند (این موضوع یعنی در ادامه حرکت سرعت آن منفی می‌شود)، لحظه  $t$  را در اصطلاح **لحظه تغییر جهت متحرک** می‌نامیم.

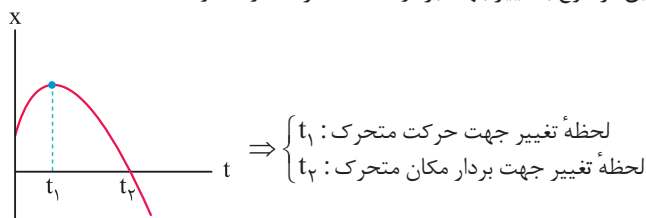


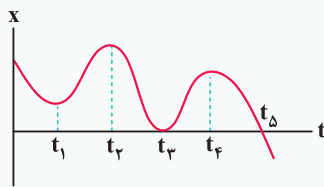
**شرط تغییر جهت دادن متحرک در نقطه O:** برای این منظور باید سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لزوماً علامت سرعت متحرک تغییر کند.

**نکته** در ده‌ها و قله‌های نمودار مکان - زمان، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت (تغییر علامت) می‌دهد. این موضوع یعنی در این مکان‌ها متحرک تغییر جهت می‌دهد.



**نکته** تغییر جهت حرکت متحرک در واقع به معنی تغییر جهت بردار سرعت آن است. این موضوع با تغییر جهت بردار مکان متحرک تفاوت دارد.





**تمرین ۱۴** نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور  $x$  حرکت می‌کند، مطابق شکل است. بردارهای مکان و سرعت آن چند بار تغییر جهت داده‌اند؟

**پاسخ** در لحظات  $t_1$ ،  $t_2$ ،  $t_3$  و  $t_4$ ، یعنی در دره‌ها و قله‌های نمودار، علامت شیب نمودار تغییر کرده و جهت بردار سرعت عوض شده است. در لحظه  $t_5$ ، علامت مکان ( $x$ ) تغییر کرده است و جهت بردار مکان عوض شده است. دقت کنید در لحظه  $t_3$ ، مکان برای یک لحظه صفر می‌شود ولی علامت آن تغییر نمی‌کند.

حالا وقتشه به سری به تستای ۶۶ تا ۷۹ بزنیم ...

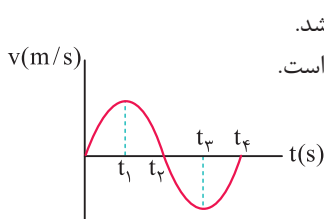


## تحلیل نمودار سرعت - زمان



**حالا بریم جلوتر و یاد بگیریم که از روی نمودار سرعت - زمان چی میشه فهمید ...**

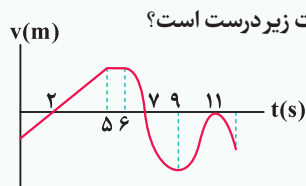
فرض کنید نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور  $x$  حرکت می‌کند به صورت مقابل باشد:



- ۱ در بازه زمانی که نمودار بالای محور ( $t$ ) است، ( $t_2$  تا  $t_3$ ) سرعت مثبت بوده و متحرک در جهت محور  $x$  در حال حرکت می‌باشد.
- ۲ در بازه زمانی که نمودار زیر محور ( $t$ ) است، ( $t_3$  تا  $t_4$ ) سرعت منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور  $x$  در حال حرکت است.

۳ در لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لحظه علامت سرعت عوض می‌شود (مانند  $t_2$ )، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

**تمرین بعد، خیلی خوب و مفهومی. با دقت همه عبارت‌هاش رو بخونید ...**



**تمرین ۱۵** با توجه به نمودار سرعت - زمان زیر که مربوط به متحرکی است که روی محور  $x$  حرکت می‌کند، چند مورد از عبارات زیر درست است؟

- (الف) متحرک ۵ ثانیه در جهت محور  $x$  حرکت کرده است.
- (ب) تندی حرکت، سه بار صفر می‌شود.
- (ج) متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.
- (د) در شش ثانیه اول حرکت، متحرک ۲ s در خلاف جهت محور  $x$  حرکت کرده است.
- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

**پاسخ** به بررسی تک تک عبارت‌ها می‌پردازیم:

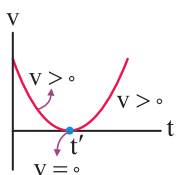
(الف) سرعت متحرک در بازه زمانی  $t_1 = 2s$  تا  $t_2 = 7s$  مثبت بوده و متحرک در این ۵ ثانیه در جهت محور  $x$  حرکت می‌کند و عبارت (الف) درست است.

(ب) تندی حرکت در سه لحظه  $t_1 = 2s$ ،  $t_2 = 7s$  و  $t_3 = 11s$  صفر می‌شود و عبارت (ب) درست است.

(ج) در لحظات  $t_1 = 2s$  و  $t_2 = 7s$  سرعت متحرک صفر شده و علامت آن عوض می‌شود، بنابراین متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد. دقت کنید که در لحظه  $t = 11s$  با این که سرعت متحرک صفر می‌شود، اما تغییر علامت نمی‌دهد (در قبل و بعد از آن سرعت منفی است) و در نتیجه متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد و عبارت (ج) هم درست است.

**در واقع در لحظه  $t = 11s$ ، متحرک یک لحظه ایستاده و دوباره به حرکتش در خلاف جهت محور  $x$  ادامه داده، یعنی اصطلاحاً متحرک توقف کرده، ولی تغییر جهت نداده است.**

(د) در شش ثانیه اول در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 2s$  سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می‌کند و در نتیجه عبارت (د) هم درست است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.



**تذکر** هر توقفی، لزوماً لحظه تغییر جهت نیست. به طور مثال در شکل زیر در لحظه  $t'$ ، سرعت صفر شده (لحظه توقف) ولی تغییر علامت نمی‌دهد و این یعنی در این لحظه متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

**تمرین ۱۶** کدام یک از دو مورد زیر در رابطه با حرکت یک جسم بر روی مسیر مستقیم نادرست است؟

۱) اگر متحرک تغییر جهت دهد، حتماً توقف کرده است.

۲) اگر متحرک توقف کرده باشد، لزوماً تغییر جهت می دهد.

**پاسخ** با توجه به توضیحات مطرح شده در تذکراته شده، عبارت (۱) صحیح است.

حالا وقتشه به سری به تستای ۸۰ تا ۸۶ بنزیم ...



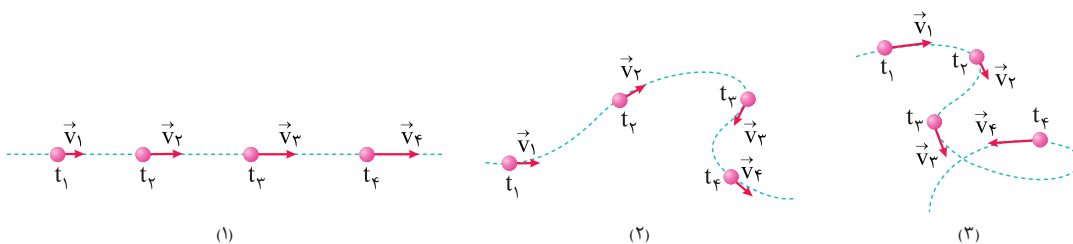
## ایستگاه ۶

### شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای و یافتن آن‌ها به کمک نمودار سرعت - زمان

تو این قسمت، می‌خوایم کلی مطلب در مورد شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای یاد بگیریم...

#### ۱. آشنایی با مفهوم شتاب متوسط

همان‌طور که در علوم سال نهم دیدید، هرگاه سرعت حرکت جسمی تغییر کند، حرکت آن شتابدار است. با توجه به این که بردار سرعت در هر نقطه از مسیر، بر مسیر حرکت مماس است، تغییر سرعت جسم می‌تواند مانند شکل (۱)، به دلیل تغییر در اندازه بردار سرعت (تندی) جسم باشد، یا مانند شکل (۲) می‌تواند به دلیل تغییر در جهت بردار سرعت آن باشد، یا هم‌چنین می‌تواند مانند شکل (۳) به دلیل تغییر هم‌زمان در اندازه و جهت بردار سرعت متحرک باشد.



شتاب متوسط متحرک در هر بازه زمانی دلخواه  $(t_1, t_2)$ ، به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود که در آن  $\vec{v}_1$ ، سرعت متحرک در لحظه  $t_1$  و  $\vec{v}_2$ ، سرعت متحرک در لحظه  $t_2$  است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

شتاب متوسط

**تذکر** همان‌طور که دیده می‌شود شتاب متوسط  $(\vec{a}_{av})$ ، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت  $(\Delta \vec{v})$  است. یکای SI شتاب متوسط، متر بر مربع ثانیه  $(m/s^2)$  است.

**تذکر** در حالت یک بعدی (مثلاً هنگامی که متحرک بر روی محور X حرکت می‌کند)، برای محاسبه  $\Delta v$ ، کافیست  $v_2$  و  $v_1$  را با در نظر گرفتن علامت محاسبه کرده و  $v_2 - v_1$  را به صورت جبری به دست آوریم.

**تمرین ۱۷** متحرکی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند و معادله سرعت - زمان آن در SI به صورت  $v = 2t^2 - 4t - 2$  است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیه دوم، چند

متر بر مجذور ثانیه است؟

(تجربی خارج ۹۸)

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

**پاسخ** با توجه به رابطه  $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ، در ۲ ثانیه دوم  $(2s \leq t \leq 4s)$  می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow v_1 = 2 \times 2^2 - 4 \times 2 - 2 = -2 \frac{m}{s} \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 2 \times 4^2 - 4 \times 4 - 2 = 14 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{14 - (-2)}{4 - 2} = 8 \frac{m}{s^2}$$

(گزینه ۴)

**تمرین ۱۸** متحرکی روی محور X در حال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی  $t_1 = 5s$  تا  $t_2 = 10s$  در SI برابر  $4\vec{i}$  و در بازه زمانی  $t_2 = 10s$  تا  $t_3 = 12s$  برابر  $2\vec{i}$  است. بردار شتاب متوسط آن در بازه زمانی  $t_1 = 5s$  تا  $t_3 = 12s$  در SI، کدام است؟

(تجربی داخل ۱۴۰۰)

۸  $\vec{i}$  (۴)

۴  $\vec{i}$  (۳)

$-\frac{16}{7}\vec{i}$  (۲)

$-\frac{2}{7}\vec{i}$  (۱)

**پاسخ گام اول:** محاسبه تغییرات سرعت در بازه‌های زمانی داده شده:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} -4 = \frac{\Delta v_1}{10-5} \Rightarrow \Delta v_1 = -20 \frac{m}{s} \\ 2 = \frac{\Delta v_2}{12-10} \Rightarrow \Delta v_2 = 4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

**گام دوم:** محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی  $t_1 = 5s$  تا  $t_2 = 12s$ :

تغییر سرعت در کل بازه زمانی  $t_1 = 5s$  تا  $t_2 = 12s$ ، برابر مجموع تغییر سرعت در بازه‌های زمانی  $t_1 = 5s$  تا  $t_2 = 10s$  و  $t_2 = 10s$  تا  $t_3 = 12s$  است، بنابراین می‌توان نوشت:

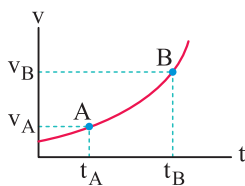
$$a_{av} = \frac{\Delta v_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{12-5} = \frac{-20+4}{12-5} = -\frac{16}{7} \frac{m}{s^2} \Rightarrow \vec{a}_{av} = -\frac{16}{7} \vec{i} \left( \frac{m}{s^2} \right) \quad (\text{گزینه ۲})$$

## ۲. محاسبه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان

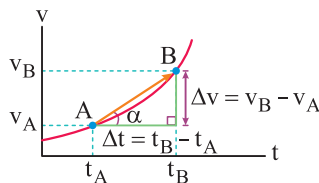
**نکات این قسمت، خیلی شبیه محاسبه سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمانه ...**

فرض کنید نمودار سرعت - زمان حرکت یک متحرک داده شده و شتاب متوسط بین دو لحظه  $t_A$  و  $t_B$  از آن خواسته شده است. در این گونه مسائل برای محاسبه شتاب متوسط، از دو روش زیر می‌توان استفاده کرد:

**روش اول (نمودارخوانی):** ابتدا بر روی نمودار، نقاط  $A$  و  $B$  را مشخص می‌کنیم. سپس سرعت متحرک در نقاط  $A$  و  $B$  را به دست آورده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$a_{av,A,B} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}$$



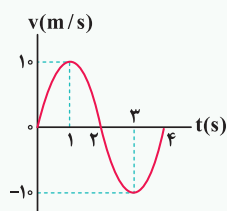
**روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار):** در این حالت، ابتدا نقاط  $A$  و  $B$  را روی نمودار مشخص کرده و خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه  $A$  و  $B$  از حرکت است.

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{av}$$

این روش در مسائلی که می‌خواهد شتاب متوسط را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کند، روش بسیار مناسبی است.

**تو ادامه کار با به تمرین توپ، این موضوع رو بهتر می‌فهمیم ...**

**تمرین ۱۹** نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب متوسط در بازه زمانی ۱ تا ۳ ثانیه در SI برابر است با:



۱۰ (۲)

صفر (۱)

۱۰ (۴)

۵ (۳)

**پاسخ** نمودار داده شده یک نمودار سرعت - زمان است و برای محاسبه  $a_{av}$  در آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

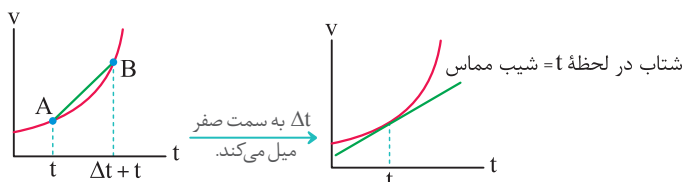
با توجه به نمودار، سرعت لحظه‌ای در  $t = 1s$  و  $t = 3s$  به ترتیب برابر  $10 m/s$  و  $-10 m/s$  است. بنابراین شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر است با:

$$\begin{cases} t_A = 1s \Rightarrow v_A = 10 m/s \\ t_B = 3s \Rightarrow v_B = -10 m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{-10 - 10}{3 - 1} = -10 m/s^2 \quad (\text{گزینه ۲})$$

## ۳. تحلیل کیفی شتاب از روی نمودار سرعت - زمان

**حالا ببینیم به کم روی شتاب لحظه‌ای هم کار کنیم ...**

می‌دانیم که شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک است. حال اگر بازه زمانی  $\Delta t$  بسیار کوچک شود، نقاط  $A$  و  $B$  عملاً تبدیل به یک نقطه شده و شیب خط واصل بین دو نقطه  $A$  و  $B$ ، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطه  $B$  برابر است. شیب مماس ترسیمی بر نمودار، برابر شتاب لحظه‌ای متحرک در لحظه  $t$  است.

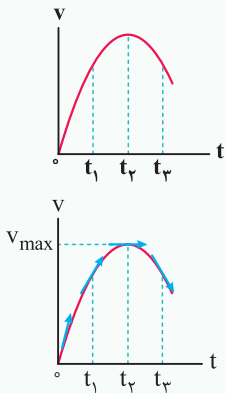


### نکات مهم و کاربردی

- ۱) با توجه به مماس‌های رسم شده در شکل مقابل، شتاب متحرک در ابتدا مثبت بوده، در قله نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد. (قرار دادن فلش‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است.)
- ۲) در نمودار داده شده، قله نمودار سرعت - زمان، لحظه تغییر جهت بردار شتاب است، زیرا شتاب در قله صفر بوده، قبل از آن مثبت و بعد از آن منفی است.
- ۳) به طور کلی در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک صفر شده و بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد. (دقت شود که قرار دادن جهت برای مماس‌ها، به منظور درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.)
- (در  $t_1$ ،  $t_2$  و  $t_3$  شتاب تغییر جهت می‌دهد.)

تو ادامه با دو تا تمرین توپ، این موضوع رو کامل یاد می‌گیریم...

#### تمرین ۲۰: شکل مقابل نمودار سرعت - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در کدام لحظه، شتاب متحرک مثبت و بیشینه است؟



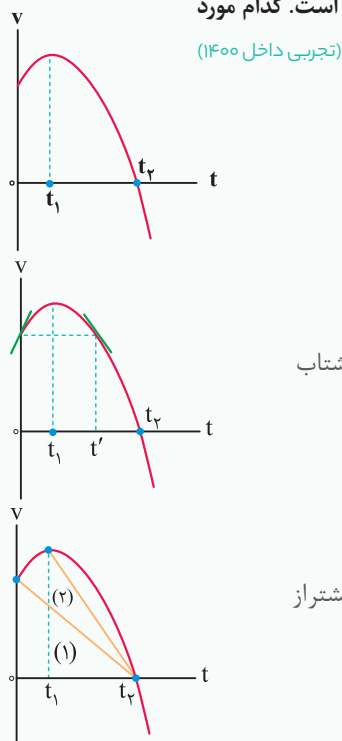
$t_2$  (۲)  
(۴) مبدأ زمان

$t_3$  (۱)  
 $t_1$  (۳)

**پاسخ** می‌دانیم شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک را نشان می‌دهد. با توجه به این موضوع ابتدا باید در تمام لحظات مطرح شده در گزینه‌ها، مماس رسم شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود از  $t = 0$  تا  $t_2$ ، زاویه مماس با محور افق دائماً در حال کاهش بوده و شتاب متحرک دائماً کاهش می‌یابد تا در  $t_2$  صفر می‌شود. پس از  $t_2$ ، شیب نمودار (شتاب) منفی شده و اندازه آن تا  $t_3$  در حال افزایش است. بنابراین در لحظه  $t = 0$ ، شیب مماس رسم شده بر نمودار سرعت - زمان مقدار ماکزیمم و مثبت را داشته و در نتیجه در این لحظه شتاب متحرک مثبت و بیشینه است و گزینه (۴) صحیح است.

**دقت** در تمرین قبل در لحظه  $t_2$ ، سرعت متحرک ماکزیمم و شتاب آن صفر است و در لحظه  $t_3$ ، شتاب متحرک مقداری منفی دارد.

#### تمرین ۲۱: نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل، قسمتی از یک سهمی است. کدام مورد درست است؟



- در بازه صفر تا  $t_1$  تندی در حال کاهش است.
- بزرگی شتاب در لحظه صفر و  $t_2$  برابر است.
- در بازه صفر تا  $t_2$  شتاب خلاف جهت محور X است.
- بزرگی شتاب متوسط در بازه  $t_1$  تا  $t_2$ ، بیشتر از بزرگی شتاب متوسط در بازه صفر تا  $t_2$  است.

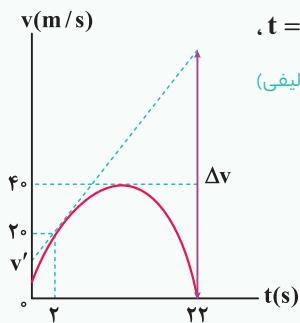
#### پاسخ بررسی گزینه‌ها

(۱) اندازه سرعت متحرک از لحظه صفر تا  $t_1$  در حال افزایش است. بنابراین تندی متحرک در این بازه زمانی افزایش می‌یابد.

(۲) توجه به تقارن سهمی نسبت به رأس آن، اندازه شیب خط مماس بر نمودار در لحظات صفر و  $t'$  برابر است. بنابراین اندازه شتاب متحرک در این دو لحظه با هم برابر است و گزینه (۲) نادرست است.

(۳) از لحظه صفر تا  $t_1$  شیب خط مماس بر نمودار مثبت بوده و در نتیجه شتاب متحرک، مثبت و در جهت محور X است.

(۴) شتاب متوسط برابر شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان است. در این سؤال، اندازه شیب خط (۲) بیشتر از اندازه شیب خط (۱) است، بنابراین گزینه (۴) صحیح است.



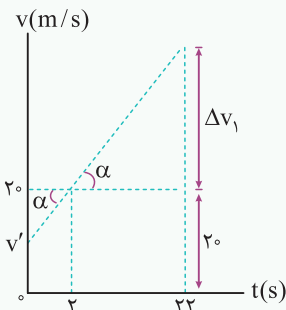
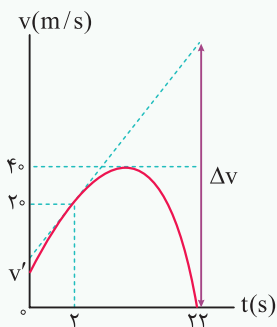
**تمرین ۳۲** نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور x در حال حرکت است، مطابق شکل می باشد. اگر در لحظه  $t = 2s$ ، بردار شتاب متحرک در SI برابر  $5\vec{i} + \Delta\vec{v}$  باشد، مقادیر  $v'$  و  $\Delta v$  به ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟

۱) ۵، ۱۰۰

۲) ۵، ۱۲۰

۳) ۱۰، ۱۰۰

۴) ۱۰، ۱۲۰



**پاسخ** همان طور که می دانیم، شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت - زمان، معادل با شتاب حرکت متحرک است. در این سؤال، شیب مماس ترسیم شده بر نمودار سرعت - زمان در لحظه  $t = 2s$  برابر ۵ واحد است. بنابراین در ادامه با توجه به این موضوع می توان نوشت:

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{20 - v'}{2 - 0} = 5 \Rightarrow v' = 10 \text{ m/s}$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta v_1}{22 - 2} = 5 \Rightarrow \Delta v_1 = 100 \text{ m/s} \Rightarrow \Delta v = \Delta v_1 + 20 \text{ m/s} = 120 \text{ m/s}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

**حالا وقتشه یه سری به تستای ۸۷ تا ۱۲۱ بزنیم ...**

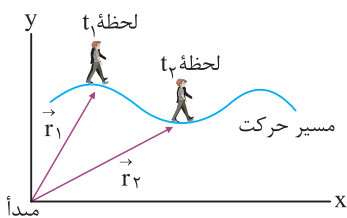


**ایستگاه V**  
جابه جایی، مسافت طی شده،  $|\vec{v}_{av}|$ ،  $s_{av}$   
در حرکت یک متحرک در صفحه



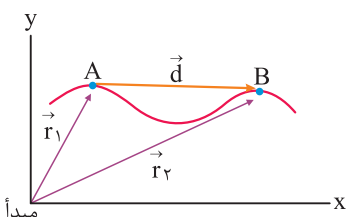
**تو آخر این قسمت از فصل، می خواهیم یه کمی هم روی فضای دو بعدی و سه بعدی کار کنیم. البته در حدی که کتاب دلش می خواد ...**

**۱. بردار مکان**



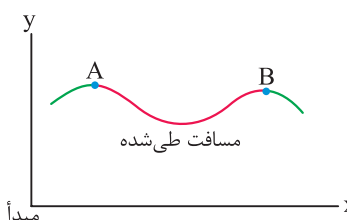
در شکل مقابل متحرکی (مثلاً یک کوه نورد) بر روی مسیر نشان داده شده (مثلاً یک کوه) در حال حرکت است. بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده شده است.

**۲. بردار تغییر مکان (جابه جایی)**



متحرک نشان داده شده در شکل مقابل، در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  از نقطه A تا نقطه B منتقل شده است. بردار جابه جایی در هر بازه زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازه زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازه زمانی متصل می کند.

**۳. مسافت طی شده**



متحرک فوق، از نقطه A تا نقطه B حرکت کرده است و طول واقعی مسیر حرکتش برابر طول منحنی واقع در بین نقاط A و B است (که با رنگ قرمز نشان داده شده است). این طول مسافت طی شده نام دارد.

توی درس ریاضی، با فرمول های تفاضل دو تا بردار آشنا میشیید. ما هم بدمون نیومد این جا به سری به این موضوع بزنیم و با بردار مکان قاطیش کنیم. البته کتاب درسی قصد نداره وارد این بحث بشه. به خاطر همین هم، ما این بحث رو به صورت مجزا، اونم فقط برای بچه درسخونا آوردیمش ...

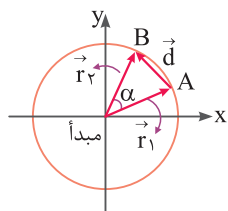
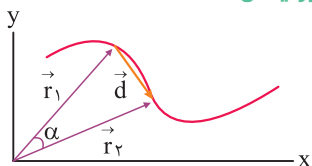
### نکات مهم و کاربردی

برای به دست آوردن اندازه بردار جابه جایی  $|\vec{d}|$ ، می توان از رابطه زیر نیز کمک گرفت:

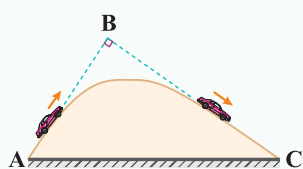
$$|\vec{d}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha}$$

**حالت خاص:** اگر متحرک بر روی یک دایره به مرکز مبدأ مختصات در حال حرکت باشد، اندازه بردار مکان در A و B یکسان بوده (برابر شعاع دایره) و اندازه بردار جابه جایی آن برابر است با:

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r \text{ (شعاع دایره)} \Rightarrow |\vec{d}| = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$



**تمرین ۲۳:** در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده شده ابتدا از تپه بالا رفته و سپس از طرف دیگر آن پایین می آید. در مسیر نشان داده شده، جابه جایی متحرک از A تا C چه قدر است؟ ( $AB = 300 \text{ m}$ ,  $BC = 400 \text{ m}$ )



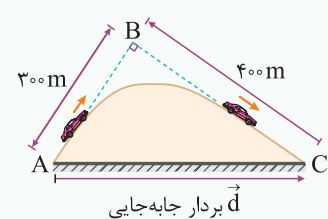
(۱) ۵۰۰ متر

(۲) ۷۰۰ متر

(۳) کم تر از ۵۰۰ متر

(۴) بیشتر از ۵۰۰ متر

**پاسخ:** همان طور که در شکل مقابل مشاهده می کنید، متحرک در طول حرکت خود از نقطه A (ابتدای مسیر) به نقطه C (انتهای مسیر) رفته و جابه جایی آن برابر بردار  $\vec{AC}$  است:



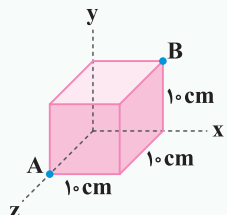
$$|\vec{AC}| = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(300)^2 + (400)^2} = 500 \text{ m} \text{ (گزینه ۱)}$$

**دقت:** توجه کنید که در این سؤال، مسافت طی شده (طول خط آبی رنگ) از یک طرف بزرگ تر از جابه جایی بوده و از سوی دیگر بیشتر از ۵۰۰ متر و کم تر از ۷۰۰ متر است (چرا؟).

**تذکر:** در صورتی که طول، عرض و ارتفاع یک متحرک در فضای سه بعدی تغییر کرده و متحرک از نقطه A به نقطه B منتقل شود، اندازه بردار جابه جایی آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$A: \begin{matrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{matrix} \rightarrow B: \begin{matrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{matrix} \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

**تمرین ۲۴:** در شکل زیر، متحرکی با حرکت بر روی سطوح جانبی یک مکعب توپر به ضلع ۱۰ سانتی متر، خود را از نقطه A به نقطه B می رساند. اندازه جابه جایی متحرک در این تغییر مکان چند سانتی متر است؟



(۱)  $10\sqrt{3}$

(۲)  $10(1 + \sqrt{2})$

(۳)  $10\sqrt{2}$

(۴)  $5\sqrt{3}$

**پاسخ:** برای این سؤال، دو روش زیر را ارائه می کنیم:

**روش اول:** با توجه به مختصات نقاط A و B و تذکر ارائه شده در قبل از سؤال داریم:

$$A: \begin{matrix} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 10 \text{ cm} \end{matrix} \rightarrow B: \begin{matrix} x_B = 10 \text{ cm} \\ y_B = 10 \text{ cm} \\ z_B = 0 \end{matrix} \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(10-0)^2 + (10-0)^2 + (0-10)^2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

**روش دوم:** همان طور که در شکل فوق می بینید، نقاط A و B دو انتهای یک قطر مکعب هستند و جابه جایی برابر اندازه AB است، پس کافی است اندازه قطر مکعب را بیابیم. از طرفی اندازه یک قطر از مکعبی به ضلع a برابر با  $d = a\sqrt{3}$  است و داریم:

$$a = 10 \text{ cm} \rightarrow |\vec{d}| = a\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm} \text{ (گزینه ۱)}$$

## دقت

در این سؤال، در لحظه  $t_2$ ، سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن تغییر جهت نمی‌دهد. این موضوع توسط بسیاری از دانش‌آموزان اشتباه درک می‌شود.

## ۲۵

اتومبیل A از مکان  $x_1 = -20\text{m}$  به مکان  $x_2 = 0$  رسیده است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\Delta x_A = x_2 - x_1 = 0 - (-20) = +20\text{m}$$

اتومبیل B از مکان  $x_1 = +40\text{m}$  به مکان  $x_2 = 0$  رسیده است و جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\Delta x_B = x_2 - x_1 = 0 - 40 = -40\text{m}$$

بنابراین نسبت جابه‌جایی A به B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{20}{-40} = -\frac{1}{2}$$

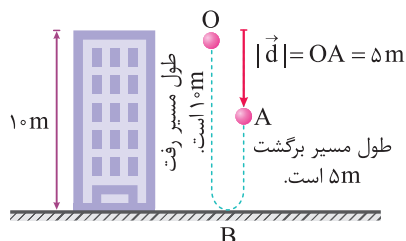
## دقت

علامت منفی نشان دهنده آن است که جهت جابه‌جایی دو اتومبیل در خلاف جهت هم است.

## ۳۶

با توجه به شکل نشان داده شده، گلوله بعد از پرتاب ابتدا ۱۰ متر به سمت پایین رفته و پس از برخورد به زمین در نقطه B، تغییر جهت داده و ۵ متر به سمت بالا می‌آید تا به نقطه A برسد. بنابراین مسافت طی شده توسط گلوله برابر  $10 + 5 = 15$  متر است.

از طرفی مطابق تعریف، جابه‌جایی برداری است که نقطه ابتدای حرکت را مستقیماً به نقطه انتهای حرکت (A) متصل کند، یعنی اندازه پاره خط OA به طول ۵ m، معادل با مقدار جابه‌جایی متحرک است.



اندازه جابه‌جایی:  $|\vec{d}| = |\vec{OA}| = 5\text{m}$

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازه جابه‌جایی}} = \frac{\text{برگشت} + \text{رفت}}{OA} = \frac{10 + 5}{5} = 3$$

## دقت

مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر و یا مساوی جابه‌جایی است و گزینه (۱) هیچ‌گاه نمی‌تواند صحیح باشد.

## ۲۷

مکان متحرک در لحظه  $t = 0$  (مبدأ زمان) معادل با مکان اولیه متحرک است. در این سؤال با داشتن معادله‌های مکان دو متحرک، کافی است به جای t مقدار صفر را قرار دهیم:

$$x_A = 3t^2 - 7t + 5 \xrightarrow{t=0} x_{A_0} = 5\text{m}$$

$$x_B = 2\cos\pi t + 1$$

$$\xrightarrow{t=0} x_{B_0} = 2\cos(0) + 1 = 2 + 1 = 3\text{m}$$

## ۱۱ بررسی موارد

الف) برداری که مبدأ مختصات را به محل جسم متصل می‌کند، بردار مکان جسم است، بنابراین برداری که نقطه O را به A متصل می‌کند، بردار مکان هواپیما در نقطه A است. ب) برداری که نقطه ابتدایی و انتهایی مسیر را به هم وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی جسم است، بنابراین در جابه‌جایی هواپیما از A تا B، بردار جابه‌جایی برابر برداری است که نقطه A را به B متصل می‌کند.

ج) بردار جابه‌جایی بین دو نقطه برابر تفاضل بردارهای مکان آن نقطه است، بنابراین تفاضل بردار مکان هواپیما در نقطه A از بردار مکان آن در نقطه B برابر بردار جابه‌جایی هواپیما است. بردار مکان A - بردار مکان B = بردار جابه‌جایی  $\vec{d}$

د) اگر هواپیما روی خط مستقیم و بدون تغییر جهت از A به B برود، مسافتی که طی می‌کند هم اندازه بردار جابه‌جایی آن است و در غیر این صورت، مسافت بزرگ‌تر از اندازه بردار جابه‌جایی است. پس با توجه به این که مسیر حرکت هواپیما را نمی‌دانیم، ممکن است مسافت طی شده هم اندازه یا بزرگ‌تر از بردار جابه‌جایی باشد. بنابراین فقط عبارت (د) نادرست است.

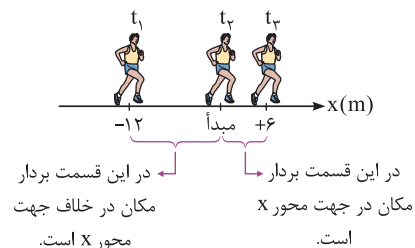
## ۲۲ بررسی موارد

الف) در لحظه  $t_3$ ، مکان دوندۀ مثبت است، یعنی بردار مکان در جهت محور X است. ب) دوندۀ از مکان  $x_1 = -12\text{m}$  به مکان  $x_2 = 6\text{m}$  رفته است، بنابراین جابه‌جایی آن برابر است با:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 6 - (-12) = +18\text{m} \Rightarrow \vec{d} = (18\text{m})\hat{i}$$

ج) هنگامی که دوندۀ از مبدأ محور عبور می‌کند، بردار مکان آن صفر است و حداقل اندازه را دارد.

د) در بازه  $t_1$  تا  $t_2$  که مکان دوندۀ منفی است (در خلاف جهت محور X است)، دوندۀ از مکان  $x_1 = -12\text{m}$  به مکان  $x_2 = 0$  (مبدأ محور) می‌رسد و اندازه جابه‌جایی آن برابر ۱۲ m نیست.



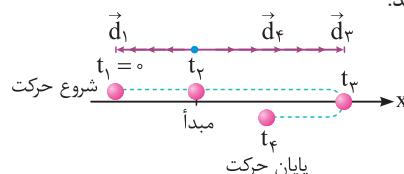
۳۳ همواره با دور شدن متحرک از مبدأ محور، اندازه بردار مکان آن افزایش و با نزدیک شدن متحرک به مبدأ محور، اندازه بردار مکان آن کاهش می‌یابد. با توجه به این موضوع، در این سؤال در طی حرکت از  $x_1 = -12\text{m}$  تا  $x_2 = 0$ ، اندازه بردار مکان در حال کاهش و از  $x_2 = 0$  تا  $x_3 = 6\text{m}$ ، اندازه بردار مکان در حال افزایش است.

۲۴ برای پاسخ به این سؤال مفهومی، به موارد زیر توجه کنید:

① در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  متحرک در سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و بردار مکان آن در خلاف جهت محور X قرار می‌گیرد.

② در بازه زمانی  $t_2$  تا  $t_3$  متحرک در سمت راست مبدأ مختصات قرار می‌گیرد و بردار مکان آن در جهت محور X می‌باشد.

③ در لحظه  $t_2$ ، متحرک از مبدأ عبور کرده و بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. به شکل مقابل دقت کنید:



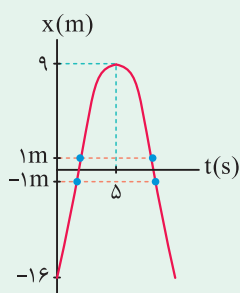
**۴ ۱۱** وقتی متحرک در فاصله یک متری از مبدأ مکان قرار دارد، باید در مکان‌های  $x = 1\text{m}$  یا  $x = -1\text{m}$  قرار داشته باشد. برای حل این سؤال، باید بررسی کنیم که متحرک چند بار از مکان‌های  $x = 1\text{m}$  یا  $x = -1\text{m}$  عبور می‌کند.

$$x = -t^2 + 10t - 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1\text{m} \Rightarrow -t^2 + 10t - 16 = 1 \Rightarrow t^2 - 10t + 17 = 0 \\ \Rightarrow t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 17}}{2} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \\ x = -1\text{m} \Rightarrow -t^2 + 10t - 16 = -1 \Rightarrow t^2 - 10t + 15 = 0 \\ \Rightarrow t_{3,4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 15}}{2} \Rightarrow \text{دو جواب مثبت و قابل قبول} \end{cases}$$

با توجه به چهار جواب مثبت به دست آمده، متحرک ۴ بار از فاصله یک متری مبدأ مکان عبور می‌کند.

### خلاقیت حرفه‌ای‌ها



با رسم نمودار مکان - زمان این متحرک نیز به راحتی مشخص می‌شود که متحرک دو بار از مکان  $x = 1\text{m}$  و دو بار از مکان  $x = -1\text{m}$  عبور می‌کند.

$$x = -t^2 + 10t - 16 \Rightarrow t_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \times (-1)} = 5\text{s}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x_{\text{رأس}} = -5^2 + 10 \times 5 - 16 = 9\text{m}$$

**۴ ۱۲** با توجه به تمرین (۴) در درسنامه، گزینه (۱) صحیح است.

**۴ ۱۳** ابتدا باید توجه شود که نیم‌ثانیه سوم یعنی  $1/5\text{s} < t < 1\text{s}$  و جابه‌جایی در این بازه زمانی برابر است با:

$$x = 4t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1\text{s} \rightarrow x_1 = 4 - 4 = 0 \\ t_2 = 1/5\text{s} \rightarrow x_2 = 4(1/5)^2 - 4(1/5) = 3\text{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 3\text{m}$$

### تذکر

۵/۵ ثانیه‌های متوالی در حرکت یک متحرک عبارت است از:

$$\begin{cases} 0 < t < 0/5\text{s} \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه اول} \\ 0/5\text{s} < t < 1\text{s} \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه دوم} \\ 1\text{s} < t < 1/5\text{s} \rightarrow \text{یعنی } 0/5 \text{ ثانیه سوم} \end{cases}$$

**۴ ۱۴** به عنوان یک نکته اساسی و بسیار مهم، هنگامی که دو متحرک به هم می‌رسند، بردار مکان آن‌ها با یک دیگر برابر می‌شود. بدین ترتیب داریم:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B \Rightarrow 3t + 1 = 2t^2 + t + 1 \Rightarrow 2t = 2t^2$$

$$\Rightarrow 2t(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{یا} \\ t = 1\text{s} \end{cases}$$

در ادامه چون در صورت سؤال ذکر شده است که این دو متحرک در کدام لحظه پس از شروع حرکت به هم می‌رسند،  $t = 1\text{s}$  قابل قبول است.

### تذکر

برخی از داوطلبان ممکن است در رابطه  $x_B = 2 \cos \pi t + 1$ ، فریب خورده و به اشتباه عدد ۱ را به عنوان  $x_B$  اعلام کنند، در صورتی که با قرار دادن  $t = 0$  در عبارت  $2 \cos \pi t + 1$ ، به عدد ۳ می‌رسیم!

### ۸ ۱

برای محاسبه بردار مکان متحرک در لحظه  $t = 1\text{s}$ ، کافیست ابتدا در معادله مکان - زمان، لحظه  $t = 1\text{s}$  را جای‌گذاری کنیم:

$$\xrightarrow{\text{مکان متحرک در } t=1\text{s}} x = t^3 - t + 2$$

$$x = (1)^3 - 1 + 2 = 2\text{m} \xrightarrow{\vec{r}_1 = x \vec{i}} \vec{r}_1 = 2\vec{i} \text{ (SI)}$$

### دقت

معادله حرکت یا مکان - زمان معادله‌ای است که از ما مقدار  $t$  را گرفته و بلافاصله، موقعیت متحرک نسبت به مبدأ در آن لحظه را می‌دهد.

### تذکر

این تست شاید ساده به نظر برسد، اما دارای دام آموزشی است. یعنی شما به جواب  $2\vec{i}$  می‌رسید و به اشتباه گزینه ۲ را در پاسخ‌نامه وارد کرده و به سادگی نمره منفی می‌گیرید! حدود ۲۰ درصد تست‌های سراسری دارای این‌گونه دام‌های آموزشی هستند.

### ۹ ۲

ابتدا بردار مکان اولیه متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right) \xrightarrow{t=0} x_0 = 2\text{m}$$

$$\Rightarrow x = -2\text{m} \Rightarrow \text{بردار مکان، قرینه بردار مکان اولیه باشد.}$$

در ادامه مکان متحرک را در هر یک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم تا ببینیم در کدام گزینه، مکان متحرک، قرینه مکان اولیه نیست.

### بررسی گزینه‌ها

$$1) \text{ پایان ثانیه دوم } t = 2\text{s} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 2\right) = -2\text{m} \quad \times$$

$$2) \text{ پایان ثانیه چهارم } t = 4\text{s} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 4\right) = 2\text{m} \quad \checkmark$$

$$3) \text{ پایان سه ثانیه دوم } t = 6\text{s} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 6\right) = -2\text{m} \quad \times$$

$$4) \text{ پایان دو ثانیه پنجم } t = 10\text{s} \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times 10\right) = -2\text{m} \quad \times$$

### ۱۰ ۱

### تذکر

لحظه‌ای که مکان یک متحرک صفر باشد ( $x = 0$ )، متحرک از مبدأ عبور می‌کند و اندازه بردار مکان آن حداقل است. بنابراین برای یافتن لحظاتی که اندازه بردار مکان حداقل است (متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند)، کافی است ریشه‌های معادله حرکت را به دست آوریم.

دقت شود با توجه به این که حرکت را در زمان‌های مثبت بررسی می‌کنیم، ریشه‌های منفی قابل قبول نیستند.

$$\text{معادله مکان - زمان } x = t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3\text{s} \\ t_2 = 4\text{s} \end{cases} \Rightarrow \Delta t = 4 - 3 = 1\text{s}$$

## دقت

هنگامی که در یک بازه زمانی معین، نسبت سرعت متوسط دو متحرک را می‌خواهیم، کافی است نسبت جابه‌جایی آن‌ها را محاسبه کنیم.

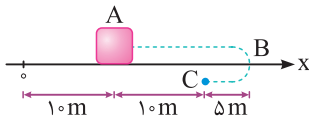
$$\begin{cases} v_{avA} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} \\ v_{avB} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{avA}}{v_{avB}} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B}$$

مثلاً در این سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{v_{avA}}{v_{avB}} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{40}{-30} = -\frac{4}{3}$$

در واقع نیازی به دانستن طول بازه زمانی نداریم.

۲۰ متحرک ابتدا به اندازه ۱۵ m از A به B رفته و سپس ۵ m از B به C می‌رود، بنابراین کل مسافت طی شده توسط متحرک برابر ۲۰ m = l می‌شود. از طرف دیگر اندازه جابه‌جایی متحرک از نقطه A تا C، برابر فاصله AC بوده و برابر ۱۰ m = Δx می‌باشد. بنابراین داریم:

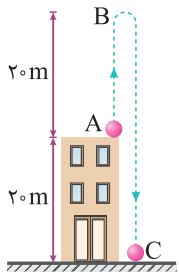


$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{l}{\Delta x} = \frac{20}{10} = 2$$

۲۱ به موارد زیر توجه کنید:

۱ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، گلوله حداکثر تا ارتفاع ۴۰ متری از سطح زمین بالا می‌رود. بنابراین از لحظه شروع حرکت تا نقطه B، گلوله به اندازه ۲۰ m به سمت بالا می‌رود و در ادامه از نقطه B تا C گلوله ۴۰ m پایین می‌آید. بنابراین گلوله در مجموع مسافتی به اندازه ۶۰ m را طی می‌کند.

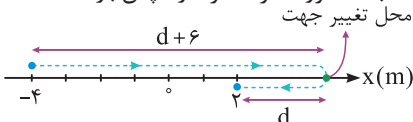
۲ اندازه جابه‌جایی آن از نقطه A تا C برابر ۲۰ m می‌شود و داریم:



$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{l}{\Delta y} = \frac{60}{20} = 3$$

۲۲ این تست، یک سؤال جالب می‌باشد، طبق صورت سؤال، جسم فقط یک بار تغییر جهت داده و در یک بازه زمانی مشخص، تندی متوسط آن، ۴ برابر اندازه سرعت متوسط آن است. این موضوع یعنی مسافت طی شده توسط متحرک، ۴ برابر اندازه جابه‌جایی‌اش است. این سؤال دو حالت دارد:

حالت اول: جسم ابتدا در جهت مثبت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:



$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = (d+6) + d = 2d+6 \\ \text{اندازه جابه‌جایی} = 2 - (-4) = 6m \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2d+6) = 4 \times (6) \Rightarrow d = 9m$$

$$\rightarrow \text{فاصله محل تغییر جهت دادن تا مبدأ مکان} = d + 2 = 11m$$

بردار جابه‌جایی

۱۵ سرعت متوسط کمیتی برداری است که از رابطه  $\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$  به دست می‌آید و یکای آن در SI برابر متر بر ثانیه است.

مسافت

تندی متوسط کمیتی نرده‌ای است که از رابطه  $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$  به دست می‌آید و یکای آن هم در SI برابر متر بر ثانیه است.

۱۶ برداری که نقطه شروع را به نقطه پایان حرکت وصل می‌کند همان بردار جابه‌جایی است. سرعت متوسط برابر نسبت بردار جابه‌جایی به زمان انجام جابه‌جایی است و هم جهت با بردار جابه‌جایی می‌باشد، از طرفی عبارت (الف) نیز تعریف تندی متوسط است و عبارت‌های (الف) و (ج) صحیح هستند.

## بررسی موارد

(ب) سرعت متوسط و تندی متوسط فقط در شرایطی هم‌اندازه هستند که متحرک بدون تغییر جهت روی یک خط راست حرکت کند. در غیر این صورت اندازه سرعت متوسط کوچک‌تر از تندی متوسط است.

(د) تندی متوسط و مسافت طی شده کمیت برداری نیستند و جهت ندارند و این عبارت از پایه نادرست است.

۱۷ اگر متحرک بر روی یک خط راست و بدون تغییر جهت جابه‌جا شود، اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط آن یکسان است، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۱۸ عبارت (الف) صحیح است. علت نادرستی عبارت‌های (ب)، (ج)، (د) و (ه) به صورت زیر است:

(ب) ممکن است متحرک پس از طی مسافتی به محل اولیه‌اش بازگردد. در این صورت سرعت متوسط آن صفر، اما تندی متوسط آن مخالف صفر است.

(ج) در یک مسیر منحنی، مسافت طی شده توسط متحرک، می‌تواند بزرگ‌تر از اندازه جابه‌جایی باشد و در نتیجه تندی متوسط نیز می‌تواند بزرگ‌تر از اندازه سرعت متوسط شود.

(د) چون مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی است، تندی متوسط نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه سرعت متوسط است.

(ه) چون مسافت طی شده نمی‌تواند منفی باشد، تندی متوسط نیز نمی‌تواند منفی باشد.

۱۹ جابه‌جایی و سرعت متوسط خودروی A برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مکان اولیه A: } x_A = -50m \\ \text{مکان نهایی A: } x_A = -10m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_A = -10 - (-50) = +40m$$

$$\Rightarrow v_{avA} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{40}{5} = 8m/s$$

به همین ترتیب جابه‌جایی و سرعت متوسط خودروی B برابر است با:

$$\begin{cases} \text{مکان اولیه B: } x_B = +20m \\ \text{مکان نهایی B: } x_B = -10m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_B = -10 - 20 = -30m$$

$$\Rightarrow v_{avB} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{-30}{5} = -6m/s \Rightarrow \frac{v_{avA}}{v_{avB}} = -\frac{4}{3}$$

۲۶ با توجه به جدول داده شده، می توان نوشت:

| مکان آغازین         | مکان پایانی    | جابه جایی      | سرعت متوسط         |         |
|---------------------|----------------|----------------|--------------------|---------|
| $\vec{r}_{\circ A}$ | $(-2m)\vec{i}$ | $(-5m)\vec{i}$ | $(\vec{v}_{av})_A$ | متحرک A |
| $(2m)\vec{i}$       | $(8m)\vec{i}$  | $\vec{d}_B$    | $(\vec{v}_{av})_B$ | متحرک B |

$$\begin{cases} \text{A جابه جایی: } \vec{d}_A = -5\vec{i} = -2\vec{i} - \vec{r}_{\circ A} \Rightarrow \vec{r}_{\circ A} = 3\vec{i} \\ \text{B جابه جایی: } \vec{d}_B = 8\vec{i} - 2\vec{i} = 6\vec{i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{d}_B}{\vec{r}_{\circ A}} = \frac{6\vec{i}}{3\vec{i}} = 2$$

از طرفی با توجه به این که حرکت هر دو متحرک در مدت زمان یکسان انجام شده است، نسبت سرعت متوسط دو متحرک برابر نسبت جابه جایی آن ها است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان } \Delta t} \frac{(\vec{v}_{av})_A}{(\vec{v}_{av})_B} = \frac{\vec{d}_A}{\vec{d}_B} = \frac{-5\vec{i}}{6\vec{i}} = -\frac{5}{6}$$

۲۷ با توجه به رابطه مربوط به سرعت متوسط  $(\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ ، جابه جایی متحرک در ۵ ثانیه اول و ۵ ثانیه سوم و ۱۵ ثانیه اول حرکت را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \text{در ۵ ثانیه اول حرکت: } -5 = \frac{\Delta x_1}{5} \Rightarrow \Delta x_1 = -25m \\ \text{در ۵ ثانیه سوم حرکت: } +3 = \frac{\Delta x_2}{5} \Rightarrow \Delta x_2 = 15m \\ \text{در ۱۵ ثانیه اول حرکت: } +2 = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{15} \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = +30m \end{cases}$$

از طرفی جابه جایی در ۱۵ ثانیه اول حرکت برابر مجموع جابه جایی در ۵ ثانیه اول، ۵ ثانیه دوم و ۵ ثانیه سوم است، بنابراین جابه جایی در ۵ ثانیه دوم حرکت برابر است با:

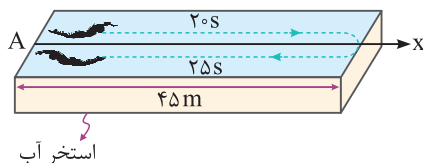
$$\Delta x_{\text{کل}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

$$\Rightarrow +30 = -25 + \Delta x_2 + 15 \Rightarrow \Delta x_2 = 40m$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} \text{ :سرعت متوسط در ۱۰ ثانیه اول حرکت}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{-25 + 40}{10} = +1/2 \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = +1/2 \vec{i} \left( \frac{m}{s} \right)$$

۲۸ شناگر پس از ۴۵ ثانیه شنا کردن، به مکان اولیه خود برمی گردد، بنابراین جابه جایی کل آن برابر صفر بوده و در نتیجه سرعت متوسط کل آن نیز صفر است.

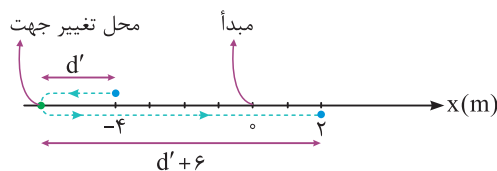


$$x_{\text{شروع}} = x_{\text{پایان}} \Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

از طرف دیگر شناگر مسافت  $2 \times 45m = 90m$  را شنا کرده است. بنابراین تندی متوسط آن برابر است با:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{90}{20 + 25} = 2m/s$$

حالت دوم: جسم ابتدا در خلاف جهت محور x حرکت کرده و سپس بازگشته است:



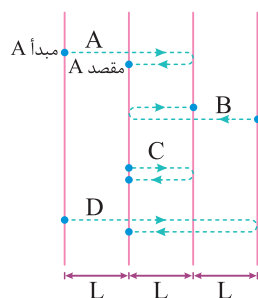
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مسافت طی شده} = d' + (d' + 6) = 2d' + 6 \\ \text{اندازه جابه جایی} = 6m \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (2d' + 6) = 4 \times (6) \Rightarrow d' = 9m$$

$$\Rightarrow (2d' + 6) = 4 \times (6) \Rightarrow d' = 9m$$

$$\Rightarrow \text{فاصله محل تغییر جهت دادن متحرک تا مبدأ مکان} = d' + 4 = 9 + 4 = 13m$$

۲۳ گام اول: ابتدا اندازه جابه جایی هر متحرک را به دست می آوریم. با توجه به این که زمان حرکت برای هر چهار متحرک یکسان است، برای مقایسه اندازه سرعت متوسط آن ها، کافی است اندازه جابه جایی آن ها (فاصله مبدأ از مقصد) را با یک دیگر مقایسه کنیم:



$$|\vec{d}_A| = L, |\vec{d}_B| = L, |\vec{d}_C| = 0, |\vec{d}_D| = L$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان است } \Delta t} v_{avA} = v_{avB} = v_{avD} > v_{avC}$$

بنابراین گزینه های (۱) و (۳) نادرست هستند.

گام دوم: در ادامه مسافت های طی شده (که معادل با طول خط چین برای هر متحرک است) توسط هر چهار متحرک را به دست می آوریم و به کمک آن ها تندی متوسط را مقایسه می کنیم:

$$l_A = 3L, l_B = 3L, l_C = 2L, l_D = 5L$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان است } \Delta t} s_{avD} > s_{avA} = s_{avB} > s_{avC}$$

۲۴ مطابق تعریف، سرعت متوسط یک متحرک که بر روی یک خط راست (محور x) حرکت می کند، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \vec{i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 2s \rightarrow x_1 = 8m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = -16m \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{-16 - 8}{10 - 2} \vec{i} = -3\vec{i} \text{ (در SI)}$$

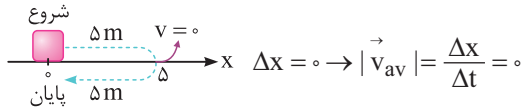
علامت منفی برای سرعت متوسط، یعنی بردار سرعت متوسط (و هم چنین جابه جایی  $(\vec{d})$ ) در این بازه زمانی در خلاف جهت محور x است.

۲۵ طبق صورت سؤال، متحرک در لحظه  $t = 0$ ، در مکان  $x_0 = -40m$  و در لحظه  $t_2 = 10s$ ، در مکان  $x_2 = 20m$  قرار دارد. بنابراین سرعت متوسط این متحرک در طی ۱۰ ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = -40m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = 20m \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{20 - (-40)}{10 - 0} = 6m/s$$

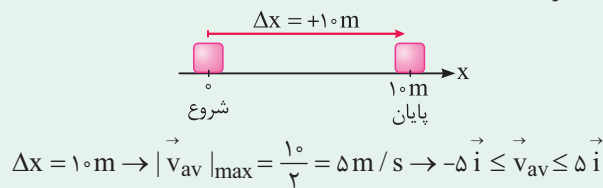
۳۲ برای به دست آوردن سرعت متوسط یک متحرک، مقدار جابه جایی آن مهم است، نه مسافت طی شده. بنابراین در این سؤال می توانیم نشان دهیم که هر سه گزینه می تواند صحیح باشد.

به عنوان مثال در این مسأله، متحرک می تواند ۵ متر به جلو رفته و سپس به جای اول خود برگردد، در این حالت مسافت طی شده برابر ۱۰ متر بوده ولی جابه جایی آن صفر است (بررسی سایر حالت ها را به خودتان می سپاریم!).



## تذکر

به عنوان یک موضوع مفهومی، باید گفت که در این سؤال بیشترین مقدار سرعت متوسط متحرک، مربوط به حالتی است که متحرک بدون تغییر جهت، ۱۰ m جابه جاشود.



۳۳ ۲ ثانیه دوم حرکت معادل  $t_1 = 2s$  تا  $t_2 = 4s$  است. در ادامه با توجه به رابطه  $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، به راحتی می توان نوشت:

$$x = t^3 - 4t^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow x_1 = 8 - 16 + 2 = -6m \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = 64 - 64 + 2 = 2m \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{2 - (-6)}{4 - 2} = 4 \frac{m}{s}$$

۳۴ برای پاسخ به این سؤال، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \times 4^3 - 2 \times 4^2 + 3 \times 4 = \frac{64}{3} - 32 + 12 = \frac{4}{3} > 0 \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Big|_{x_1=0, x_2>0} v_{av} > 0$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در جهت محور X است.

## تذکر

همیشه سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه زمانی، بین بیشترین و کمترین اندازه سرعت لحظه ای متحرک در آن بازه می باشد. بنابراین گزینه (۴) قطعاً نادرست است.

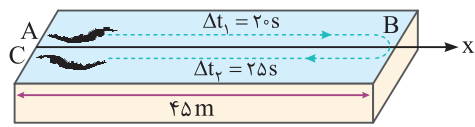
۳۵ برای آن که سرعت متوسط در خلاف جهت محور X باشد، کافی است جابه جایی، منفی باشد. در ادامه نشان می دهیم که در دو ثانیه اول ( $0 < t < 2s$ ) حرکت، چگونه جابه جایی می تواند منفی باشد.

$$x = 2t^3 - bt - 10$$

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -10m \\ t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 6 - 2b \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 16 - 2b$$

$$\Delta x < 0 \Rightarrow 16 - 2b < 0 \Rightarrow b > 8$$

۲۹ در صورتی که جهت مثبت محور X را به سمت راست فرض کنیم، داریم:



(AB) سرعت متوسط در مسیر رفت:  $\Delta x_1 = x_B - x_A = 45 - 0 = +45 m$

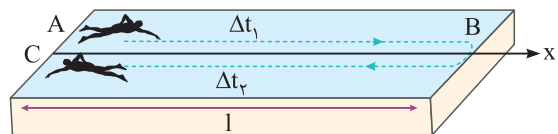
$$\Rightarrow v_{av_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{45}{20} = 2.25 m/s$$

(BC) سرعت متوسط در مسیر برگشت:  $\Delta x_2 = x_C - x_B = 0 - 45 = -45 m$

$$\Rightarrow v_{av_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-45}{25} = -1.8 m/s$$

دقت داشته باشید که در حالت برگشت، شناگر در خلاف جهت محور X حرکت کرده است و در نتیجه سرعت متوسط آن مقداری منفی است.

۳۰ برای حل این سؤال، به شکل زیر که مسیر رفت و برگشت حرکت شناگر را نشان می دهد، توجه کنید:



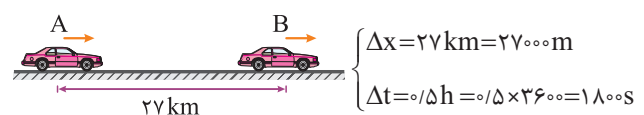
$$(1) \text{ تندى متوسط در هنگام رفت: } (s_{av})_1 = s = \frac{l}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{l}{s}$$

$$(2) \text{ تندى متوسط در هنگام برگشت: } (s_{av})_2 = 2s = \frac{l}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{l}{2s}$$

$$s_{av} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\text{مسافت کل}}{\text{زمان کل شنا کردن}}$$

$$\Rightarrow s_{av} = \frac{2l}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow s_{av} = \frac{2l}{(\frac{l}{s}) + (\frac{l}{2s})} = \frac{2l}{(\frac{3}{2} \frac{l}{s})} = \frac{4}{3} s$$

۳۱ روش اول: متحرک در طول نیم ساعت از حرکت خود، تغییر جهت نداده است، بنابراین جابه جایی آن برابر مسافت طی شده، یعنی ۲۷ کیلومتر می باشد.



$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27000}{1800} = 15 m/s = 1500 cm/s$$

روش دوم:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27}{0.5} = 54 km/h$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{54}{3.6} = 15 m/s = 1500 cm/s$$

دقت کنید در این سؤال چون اندازه جابه جایی و مسافت یکسان است، پس اندازه سرعت متوسط برابر تندى متوسط است.

## تذکر

برای تبدیل  $km/h$  به  $m/s$ ، کافی است عدد مورد نظر را بر ۳/۶ تقسیم کنیم:

$$1 km/h = 1 \frac{(1000 m)}{(3600 s)} \Rightarrow 1 km/h = \frac{1}{3.6} m/s$$

و برای تبدیل  $m/s$  به  $km/h$ ، عدد مورد نظر را در ۳/۶ ضرب می کنیم:

$$1 m/s = 3.6 km/h$$

### دقت

با توجه به این که یکای  $x$  در SI برابر متر و یکای  $t$  در SI برابر ثانیه است، یکای کمیت  $b$  برابر  $\frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$  می باشد.

۳۶ | ۱

با توجه به تمرین (۵) در درسنامه، گزینه (۱) صحیح است.

۳۷ | ۴

برای حل این سؤال، گام های زیر را طی می کنیم.

**گام اول:** دو ثانیه اول، یعنی از لحظه  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 2$  s. بنابراین ابتدا مکان متحرک را در این لحظات به دست می آوریم:

$$x = kt^2 - 5t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \text{ m} \\ t_2 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_2 = (4k - 5) \text{ m} \end{cases}$$

**گام دوم:** از آن جایی که اندازه سرعت متوسط در دو ثانیه اول حرکت برابر صفر شده است، می توانیم نتیجه بگیریم که جابه جایی در این بازه زمانی نیز برابر صفر بوده  $x_1 = x_2$  می باشد. بنابراین می توان نوشت:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 5 = 4k - 5 \Rightarrow k = 2/5$$

**گام سوم:** حال مقدار  $k$  را در معادله قرار داده و در ادامه مکان متحرک را در لحظات  $t_2 = 2$  s و  $t_3 = 4$  s به دست می آوریم:

$$\begin{cases} t_2 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 5 \text{ m} \\ t_3 = 4 \text{ s} \Rightarrow x_3 = 25 \text{ m} \end{cases}$$

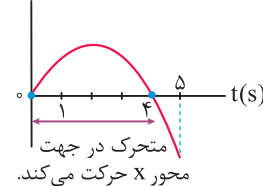
$$\Rightarrow |\bar{v}_{av}| = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{25 - 5}{2} = 10 \text{ m/s}$$

۳۸ | ۱

در حالتی که متحرک در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می کند، علامت سرعت متحرک، منفی است. با توجه به نمودار سرعت - زمان رسم شده، در بازه زمانی  $4 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$ ، علامت سرعت متحرک منفی است.

$$v = -t^2 + 4t = -t(t - 4) \Rightarrow \text{ریشه ها: } \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 4 \text{ s} \end{cases}$$

$v(\text{m/s})$



در نتیجه در  $\frac{1}{5}$  از ۵ ثانیه اول حرکت، یعنی در بازه  $4 \text{ s} < t < 5 \text{ s}$ ، متحرک در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می کند.

### بررسی موارد

(الف) در بازه  $t_1 < t < t_2$ ، نمودار زیر محور افقی است، یعنی مکان متحرک منفی است یا به عبارت دیگر، بردار مکان در خلاف جهت محور  $x$  است. ✓

(ب) در لحظه  $t_2$ ، متحرک بیشترین فاصله از مبدأ را در جهت مخالف محور  $x$  دارد. ✓

(ج) در بازه  $t_2 < t < t_3$ ، ابتدا نمودار به محور افقی نزدیک می شود و سپس از آن دور می شود، پس می توان گفت اندازه بردار مکان ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد. ✗

(د) جابه جایی در بازه های  $t_1$  تا  $t_2$  و  $t_2$  تا  $t_3$  هم اندازه است ولی جهت حرکت در این دو بازه برعکس است و در نتیجه بردار جابه جایی در این دو بازه قرینه یکدیگر است. ✗

۴۰ | ۲

برای آن که جابه جایی متحرک در یک بازه صفر شود، باید مکان آن در ابتدا و انتهای بازه یکسان باشد. مطابق نمودار داده شده، مکان متحرک در لحظات  $t_1$  و  $t_5$  مشابه است، پس جابه جایی در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_5$  صفر است.

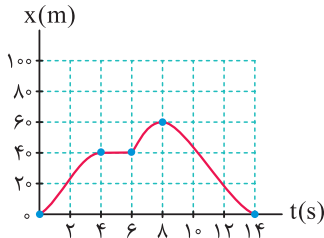
۴۱ | ۳

در لحظات  $t_1$  و  $t_2$ ، نمودار محور افقی را قطع می کند و علامت مکان ( $x$ ) تغییر می کند، بنابراین بردار مکان متحرک ۲ بار تغییر جهت داده است. دقت کنید که در لحظه  $t_5$ ، مکان متحرک صفر می شود ولی علامت آن تغییر نمی کند.

### ۴۲ | ۴

با توجه به شکل زیر، حرکت این متحرک را در هر مرحله به صورت جداگانه بررسی می کنیم:

**$0 \leq t < 4$  s:** همان طور که مشاهده می کنیم در این بازه زمانی، با گذشت زمان مکان متحرک در حال افزایش بوده و از  $x = 0$  به  $x = 40 \text{ m}$  رسیده است. با توجه به این موضوع، متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.



**$4 \text{ s} \leq t < 6 \text{ s}$ :** در این بازه، متحرک در مکان  $x = 40 \text{ m}$  ایستاده و حرکت نمی کند (دقت شود که با گذشت زمان، مکان متحرک عوض نمی شود و  $x$  ثابت است).

**$6 \text{ s} \leq t < 8 \text{ s}$ :** در این بازه همانند بازه اول، متحرک در جهت محور  $x$  در حال حرکت می باشد و از مکان  $x = 40 \text{ m}$  به مکان  $x = 60 \text{ m}$  رفته و از مبدأ دور می شود و در  $t = 8 \text{ s}$  به بیشترین فاصله از مبدأ می رسد.

**$8 \text{ s} \leq t < 14 \text{ s}$ :** در این بازه با گذشت زمان، متحرک از مکان  $x = 60 \text{ m}$  به سمت مبدأ ( $x = 0$ ) در حال حرکت بوده و در لحظه  $t = 14 \text{ s}$  به مبدأ ( $x = 0$ ) می رسد، در نتیجه متحرک در این بازه به مبدأ نزدیک می شود.

### دقت

متحرک در چهار ثانیه دوم حرکت ( $4 \text{ s} \leq t < 8 \text{ s}$ ) از مکان  $x = 40 \text{ m}$  به مکان  $x = 60 \text{ m}$  رفته است و  $20 \text{ m}$  جابه جا شده و گزینه «۴» عبارت نادرستی است.

### ۴۳ | ۳

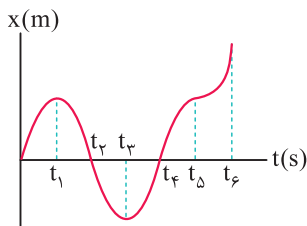
چون دوچرخه سوار از مکان  $x = 0$  شروع به حرکت کرده و در نهایت به  $x = 0$  بازگشته است، اندازه جابه جایی آن صفر می باشد. از طرف دیگر دوچرخه سوار در ۸ ثانیه اول حرکت از  $x = 0$  به  $x = 60 \text{ m}$  رفته و در بازه زمانی ۸ s تا ۱۴ s از  $x = 60 \text{ m}$  به  $x = 0$  بازگشته است و در مجموع مسافت  $120 \text{ m}$  را طی کرده است.

### ۴۴ | ۱

برای حل، درستی تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

### بررسی گزینه ها

(۱) در بازه زمانی  $t_2$  تا  $t_3$ ، متحرک در خلاف جهت محور  $x$  حرکت کرده و در حال دور شدن از مبدأ می باشد. بنابراین عبارت مطرح شده در گزینه (۱) نادرست است.

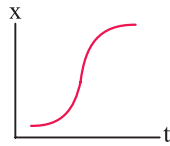


(۲) در بازه زمانی  $t_4$  تا  $t_5$ ، متحرک در جهت محور  $x$  از مبدأ دور می شود.

(۳) در بازه زمانی  $t_4$  تا  $t_5$ ، متحرک در قسمت منفی محور  $x$  قرار دارد و در لحظه  $t_3$  بیشترین فاصله را در قسمت منفی محور  $x$  از مبدأ دارد.

(۴) هنگامی که متحرک در قسمت مثبت محور  $x$  است، بردار مکان در جهت محور  $x$  و هنگامی که متحرک در قسمت منفی محور  $x$  است، بردار مکان در خلاف جهت محور  $x$  قرار دارد.

در گزینه (۳)، در ابتدای حرکت، متحرک با گذشت زمان به مبدأ مکان ( $x = 0$ ) نزدیک می‌شود، بنابراین فقط گزینه (۲) صحیح است. همان‌طور که در شکل گزینه (۲) می‌بینید، مقدار  $x$  با گذشت زمان افزایش می‌یابد، بنابراین متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود.



#### ۴۷ بررسی موارد

الف) در ۳ ثانیه اول، متحرک از مکان  $x_1 = 6\text{m}$  به  $x_2 = 9\text{m}$  رسیده است و سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{9 - 6}{3} = 1\text{m/s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = (1\text{m/s}) \hat{i}$$

ب) مکان متحرک در لحظات  $t = 6\text{s}$  و  $t = 10\text{s}$  یکسان است، بنابراین در بازه  $t = 6\text{s}$  تا  $t = 10\text{s}$ ، جابه‌جایی و سرعت متوسط صفر است.

ج) در سه ثانیه اول، متحرک در جهت محور  $x$  حرکت می‌کند (نمودار بالا می‌رود)، در حالی که در سه ثانیه دوم، متحرک در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می‌کند (نمودار پایین می‌رود)، پس سرعت متوسط در سه ثانیه اول مثبت و در سه ثانیه دوم منفی است.

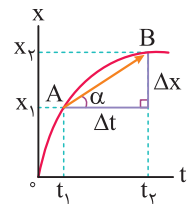
$$v_{av_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{9 - 6}{3} = 1\text{m/s} \quad \text{سه ثانیه اول}$$

$$v_{av_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 9}{3} = -3\text{m/s} \Rightarrow \frac{|v_{av_2}|}{|v_{av_1}|} = 3 \quad \text{سه ثانیه دوم}$$

بنابراین عبارت‌های (الف)، (ب) و (ج) صحیح هستند.

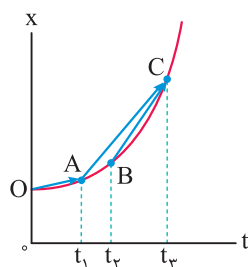
۴۸ نمودار داده شده یک نمودار مکان - زمان است. بنابراین شیب خط

واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متوسط در فاصله زمانی بین آن دو لحظه ( $t_1$  تا  $t_2$ ) می‌باشد.



$$\text{شیب } AB = \tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}|$$

۴۹ سرعت متوسط بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار مکان - زمان مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.



همان‌طور که در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید، شیب پاره‌خط BC از سایر پاره‌خط‌ها بیشتر است (تمایل آن به قائم شدن بیشتر است)، بنابراین سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_3$  بزرگ‌تر است.

$$\tan \alpha_{BC} > \tan \alpha_{AC} > \tan \alpha_{OA}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}|_{BC} > |\vec{v}_{av}|_{AC} > |\vec{v}_{av}|_{OA}$$

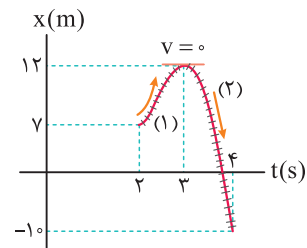
بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

به‌طور کلی هنگامی که متحرک از  $x = 0$  عبور کرده و علامت  $x$  تغییر کند، بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. متحرک مورد نظر در دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  از مبدأ مکان عبور کرده است و دوبار بردار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. بنابراین تنها گزینه (۱) عبارت نادرستی است.

۴۵ با بررسی جهت حرکت و اندازه جابه‌جایی در دو ثانیه دوم حرکت ( $2\text{s} \leq t < 4\text{s}$ )، مسافت طی شده به دست می‌آید.

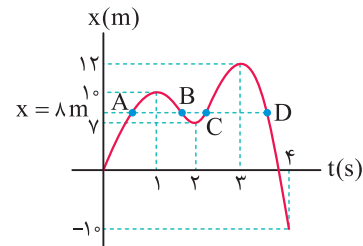
مرحله اول: از لحظه  $t = 2\text{s}$  تا  $t = 3\text{s}$ ، متحرک در جهت مثبت محور  $x$  حرکت کرده و مسافت  $l_1 = 12 - 7 = 5\text{m}$  را پیموده است.

مرحله دوم: از لحظه  $t = 3\text{s}$  تا  $t = 4\text{s}$ ، متحرک در خلاف جهت محور  $x$  حرکت کرده و مسافت  $l_2 = |-10 - 12| = 22\text{m}$  را پیموده است.



بنابراین مسافت طی شده در دو ثانیه دوم برابر  $l = l_1 + l_2 = 27\text{m}$  است.

از طرفی با توجه به نمودار داده شده، متحرک ۴ بار در مکان  $x = +8\text{m}$  قرار گرفته است (در واقع خط افقی که از  $x = 8\text{m}$  رسم می‌شود، نمودار را در چهار نقطه  $A, B, C, D$  قطع می‌کند)، بنابراین ۴ بار بردار مکان متحرک برحسب متر برابر  $\vec{d} = +8\hat{i}$  می‌شود.



تمرین اندازه جابه‌جایی متحرک در دو ثانیه دوم حرکت چند متر است؟

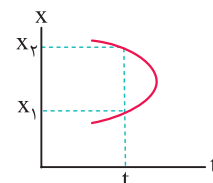
پاسخ

$$\begin{cases} t_1 = 2\text{s} \rightarrow x_1 = 7\text{m} \\ t_2 = 4\text{s} \rightarrow x_2 = -10\text{m} \end{cases} \rightarrow |\vec{d}| = |x_2 - x_1| = 17\text{m}$$

تمرین در طی حرکت، بردار مکان در کدام بازه زمانی تغییر جهت می‌دهد؟

پاسخ در ثانیه چهارم ( $3\text{s} \leq t < 4\text{s}$ )، متحرک از مبدأ عبور کرده و علامت  $x$  تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک در این بازه زمانی تغییر جهت می‌دهد.

۴۶ شکل‌های رسم شده در گزینه‌های (۱) و (۴)، نمی‌توانند مربوط به نمودار مکان - زمان یک متحرک باشند، زیرا متحرک در یک لحظه مشخص در بیش از یک مکان قرار دارد. این موضوع برای گزینه (۱) در شکل زیر نشان داده شده است.



۴۵۲ در ۵ ثانیه اول، سرعت متوسط برابر  $-4 \text{ m/s}$  است، بنابراین

$$\Delta x_1 = v_{av_1} \Delta t_1 = -4 \times 5 = -20 \text{ m}$$

جابه جایی برابر است با:

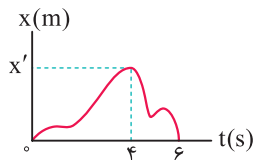
در ۴ ثانیه بعدی، سرعت متوسط  $+3 \text{ m/s}$  است و جابه جایی برابر است با:

$$\Delta x_2 = v_{av_2} \Delta t_2 = 3 \times 4 = 12 \text{ m}$$

بنابراین تنها چیزی که راجع به این حرکت می توانیم بگوئیم آن است که در ۵ ثانیه اول، نمودار مکان - زمان باید در مجموع  $20 \text{ m}$  پایین بیاید و در ۴ ثانیه بعد، باید  $12 \text{ m}$  بالا برود که این موضوع در هر سه گزینه رعایت شده است. دقت کنید که

سرعت متوسط در مورد چگونگی حرکت به ما اطلاعی نمی دهد.

۴۵۳ محاسبه سرعت متوسط از  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 4 \text{ s}$ :



$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4 \text{ s} \rightarrow x_2 = x' \end{cases} \Rightarrow v_{av_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x' - 0}{4 - 0} = \frac{x'}{4}$$

محاسبه سرعت متوسط از  $t_2 = 4 \text{ s}$  تا  $t_3 = 6 \text{ s}$ :

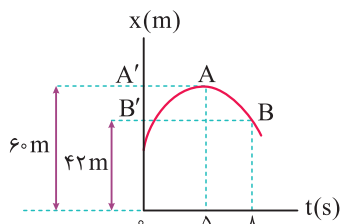
$$\begin{cases} t_2 = 4 \text{ s} \rightarrow x_2 = x' \\ t_3 = 6 \text{ s} \rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{av_2} = \frac{0 - x'}{6 - 4} = -\frac{x'}{2}$$

و نسبت سرعت متوسط در این دو بازه زمانی برابر است با:

$$\frac{v_{av_1}}{v_{av_2}} = \frac{\frac{x'}{4}}{-\frac{x'}{2}} = -\frac{1}{2}$$

۴۵۴ با سؤال بسیار جالب و مفهومی روبه رو شده ایم. ابتدا باید دقت کنیم که

متحرک بر روی محور  $x$  در حال حرکت است و بردار سرعت متوسط آن یا در جهت محور  $x$  است و یا در خلاف جهت آن و این موضوع یعنی سرعت متوسط در جهت  $AB$  نمی باشد و گزینه های (۲) و (۳) نادرست هستند.



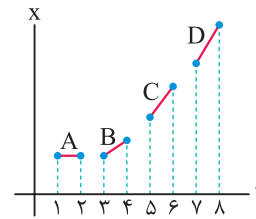
با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، متحرک در لحظه  $t_1 = 5 \text{ s}$  در مکان  $A'(x_1 = 42 \text{ m})$  و در لحظه  $t_2 = 8 \text{ s}$  در مکان  $B'(x_2 = 6 \text{ m})$  قرار دارد و

داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 - 42}{8 - 5} = -6 \text{ m/s}$$

در ادامه از روی نمودار مشخص است که از لحظه  $t = 5 \text{ s}$  تا  $t = 8 \text{ s}$  متحرک بر روی محور  $x$  از  $A'$  به طرف  $B'$  حرکت کرده و سرعت متوسط در راستای  $A'B'$  (یعنی در خلاف جهت محور  $x$ ) است.

تمرین در شکل زیر، اندازه سرعت متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟

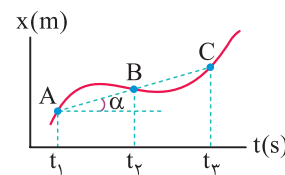


$$|\vec{v}_{av}|_A = 0 < |\vec{v}_{av}|_B < |\vec{v}_{av}|_C < |\vec{v}_{av}|_D$$

پاسخ

۴۵۰ شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت

متوسط در آن بازه است. در شکل روبه رو، شیب خط واصل بین نقاط  $A$  و  $B$  با شیب خط واصل بین نقاط  $B$  و  $C$  یکسان بوده و در نتیجه سرعت متوسط متحرک برای هر دو بازه زمانی  $(t_1 \text{ تا } t_2)$  و  $(t_2 \text{ تا } t_3)$  یکسان و برابر  $2 \text{ m/s}$  است.



$$(\vec{v}_{av})_1 = (\vec{v}_{av})_2 = \tan \alpha = 2 \text{ m/s}$$

تذکر

دقت کنید پاره خط های  $AB$  و  $BC$  در یک امتداد قرار دارند و شیب هر دو یکسان است.

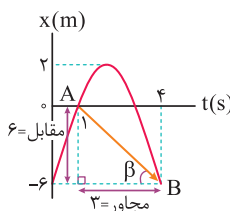
۴۵۱ روش اول (نمودارخوانی): با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده،

متحرک در لحظه  $t_1 = 1 \text{ s}$  در مبدأ قرار داشته  $(x_A = 0)$  و در لحظه  $t_2 = 4 \text{ s}$  در مکان  $x_2 = -6 \text{ m}$   $(x_B = -6 \text{ m})$  قرار دارد و داریم:

$$\begin{aligned} v_{av} &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 0}{4 - 1} = -2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

روش دوم (شیب نمودار): سرعت متوسط متحرک در یک بازه، برابر شیب خط واصل

بین نقاط ابتدای بازه زمانی و انتهای بازه زمانی در نمودار مکان - زمان است.



$$\begin{aligned} |\vec{v}_{av}| &= |\tan \beta| = \left| \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \right| = \left| \frac{6}{3} \right| = 2 \text{ m/s} \\ v_{av} &= -2 \text{ m/s} \text{ (شیب خط AB منفی است).} \end{aligned}$$

دقت

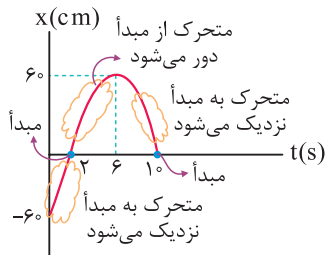
با توجه به جهت فلش  $AB$  در این سؤال، علامت  $v$  در نمودار مکان - زمان فوق مشخص می شود:

$$\Rightarrow v_{av} = 0$$

$$\Rightarrow v_{av} > 0$$

$$\Rightarrow v_{av} < 0$$

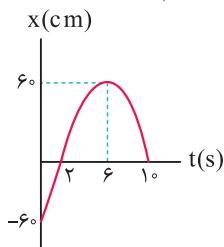
**گام اول:** در بازه زمانی  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 2s$  متحرک از قسمت منفی محور  $x$  به سمت مبدأ حرکت کرده و به مبدأ نزدیک می‌شود، در بازه زمانی  $t_2 = 2s$  تا  $t_3 = 6s$  متحرک از مبدأ دور شده و در نهایت در بازه زمانی  $t_3 = 6s$  تا  $t_4 = 10s$  به مبدأ نزدیک می‌شود.



**گام دوم:** بنابراین تندی متوسط در بازه زمانی  $t_2 = 2s$  تا  $t_3 = 6s$  که متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{60}{6-2} = \frac{60}{4} = 15 \text{ cm/s} = 0.15 \text{ m/s}$$

با توجه به نمودار داده شده، متحرک در دو لحظه  $t_1 = 0$  و  $t_2 = 6s$  به ترتیب در نقاط  $x_1 = -60 \text{ cm}$  و  $x_2 = +60 \text{ cm}$  قرار دارد و تنها در این دو لحظه، فاصله متحرک تا مبدأ برابر  $60 \text{ cm}$  می‌شود. بنابراین باید تندی متوسط متحرک را در ۶ ثانیه اول حرکت به دست آوریم:



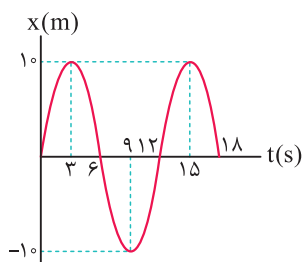
$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{120}{6} = 20 \text{ cm/s} = 0.2 \text{ m/s}$$

برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

همان طور که می‌دانید، طبق رابطه  $s_{av} = \frac{1}{\Delta t}$ ، تندی متوسط به مسافت طی شده توسط متحرک بستگی دارد.

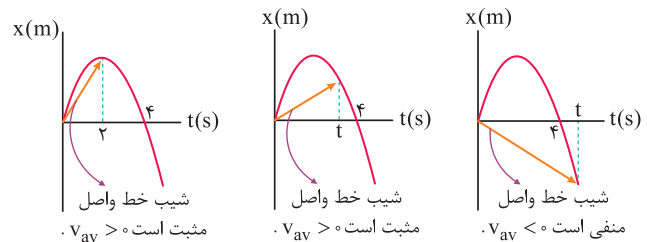
بعد از لحظه  $t = 0$ ، متحرک در جهت محور  $x$  شروع به حرکت می‌کند و در ادامه مسیر، مسافت‌های متفاوتی را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی شده توسط آن در هیچ یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌باشد.

دقت کنید حتی زمانی که متحرک به مکان اولیه خود باز می‌گردد، باز هم مسافت طی شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت صفر نمی‌شود و در این حالت جابه‌جایی و سرعت متوسط حرکت صفر می‌شود.

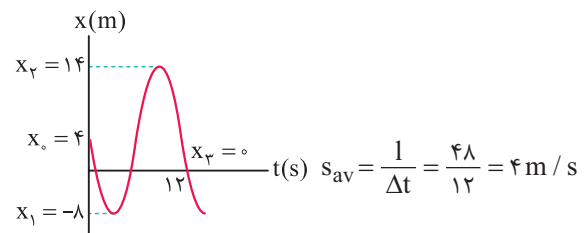


بنابراین در بازه زمانی  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 6s$  که متحرک به محل اولیه‌اش باز می‌گردد، سرعت متوسط صفر شده و تندی متوسط در هیچ یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌شود.

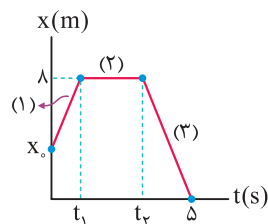
با توجه به شیب خط واصل از لحظه صفر تا  $t$ ، مشاهده می‌شود که نهایتاً تا لحظه  $t = 4s$ ، شیب خط واصل مثبت و سرعت متوسط متحرک در جهت محور  $x$  است.



متحرک ابتدا  $12 \text{ m}$  در خلاف جهت محور  $x$  حرکت کرده و از مکان  $x_0 = 4 \text{ m}$  به مکان  $x_1 = -8 \text{ m}$  می‌رسد. سپس تغییر جهت داده و با طی مسافت  $22 \text{ m}$  به مکان  $x_2 = 14 \text{ m}$  می‌رسد و در ادامه دوباره تغییر جهت داده و پس از طی مسافت  $14 \text{ m}$  در لحظه  $t = 12s$  به مبدأ ( $x_3 = 0$ ) می‌رسد. بنابراین متحرک در مجموع مسافت  $12 + 22 + 14 = 48 \text{ m}$  را طی می‌کند و داریم:



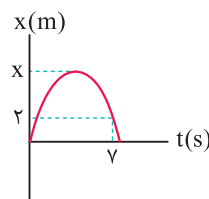
این متحرک از لحظه شروع حرکت تا لحظه  $t_1$  مسافت  $(8 - x_0)$  را طی کرده است. از طرفی از لحظه  $t_1$  تا  $t_2$  ساکن بوده و از لحظه  $t_2$  تا لحظه  $t = 5s$  از مکان  $x = 8 \text{ m}$  به مبدأ مکان رسیده است و در نتیجه در این بازه زمانی مسافت  $8 \text{ m}$  را طی کرده است.



$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{16 - x_0}{5} = \frac{16 - 4}{5} = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ m/s}$$

$$s_{av} = \frac{\text{کل مسافت طی شده}}{\text{کل زمان}} \Rightarrow 2 = \frac{16 - x_0}{5} \Rightarrow x_0 = 4 \text{ m}$$

مطابق شکل، فرض می‌کنیم بیشترین فاصله ذره تا مبدأ مکان برابر  $x$  باشد، به این ترتیب داریم:



$$1 = (x) + (x - 2) = 2x - 2$$

$$|\Delta x| = 2 \text{ m}$$

$$s_{av} = 5 |v_{av}| \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} = 5 \frac{|\Delta x|}{\Delta t} \Rightarrow (2x - 2) = 5 \times (2)$$

$$\Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \text{ m}$$

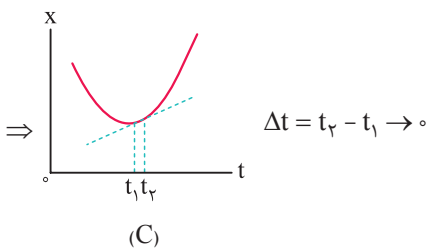
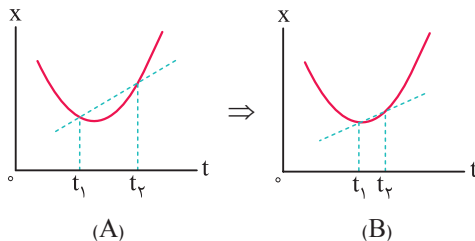
$$s_{av} = \frac{L}{\frac{1}{2}} \rightarrow s_{av} = 2L \quad \text{در بازه زمانی } t_1 \text{ تا } t_2, \quad s_{av} = \frac{L}{\frac{1}{2}} \rightarrow s_{av} = 2L$$

$$s_{av} = \frac{2L}{\frac{1}{2}} \rightarrow s_{av} = 4L \quad \text{در بازه زمانی } t_1 \text{ تا } t_2, \quad s_{av} = \frac{2L}{\frac{1}{2}} \rightarrow s_{av} = 4L$$

۶۵ به تمرین (۱۱) در درسنامه، گزینه (۳) صحیح است.

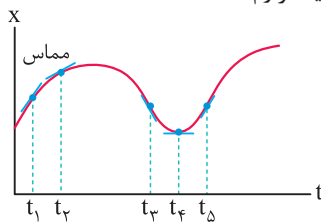
۶۶ تندی سنج خودرو به صورت تقریبی، تندی لحظه‌ای حرکت خودرو را نشان می‌دهد.

۶۷ همان گونه که در شکل‌های ترسیم شده مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$ ، شیب خط واصل، به سمت مماس رسم شده بر نمودار مکان - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب خط مماس رسم شده بر هر نقطه از نمودار مکان - زمان، بیانگر اندازه سرعت لحظه‌ای در آن نقطه است.



۶۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

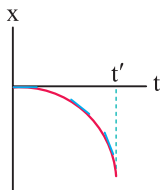
۱) اندازه شیب مماس رسم شده بر نمودار در لحظه  $t_1$  بیشتر از  $t_2$  است، پس تندی متحرک در  $t_1$  بیشتر از  $t_2$  است.



۲) در لحظه  $t_4$ ، مماس رسم شده بر نمودار افقی است و در نتیجه تندی حرکت در این لحظه صفر است.

۳) در لحظه  $t_3$ ، مماس بر نمودار به سمت پایین است و شیب آن منفی است، پس علامت سرعت هم منفی است و بردار سرعت در لحظه  $t_3$  در خلاف جهت محور  $x$  است.

۶۹ همان طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه، بیانگر اندازه سرعت متحرک (تندی متحرک) در آن لحظه است. با توجه به این که در نمودار رسم شده در گزینه (۳)، همواره شیب خط مماس در حال افزایش است، بنابراین در این نمودار از لحظه صفر تا  $t'$ ، همواره تندی متحرک افزایش می‌یابد.



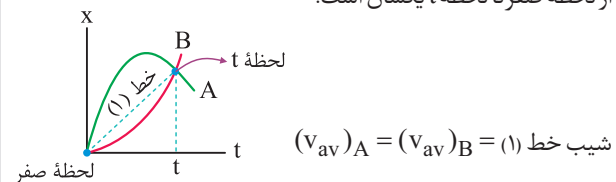
۶۲ در بازه  $t_1$  تا  $t_2$ ، مکان متحرک ثابت بوده و این یعنی متحرک حرکت نکرده و مسافت طی شده توسط آن صفر است. بنابراین تندی متوسط متحرک در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  برابر صفر است.

### دقت

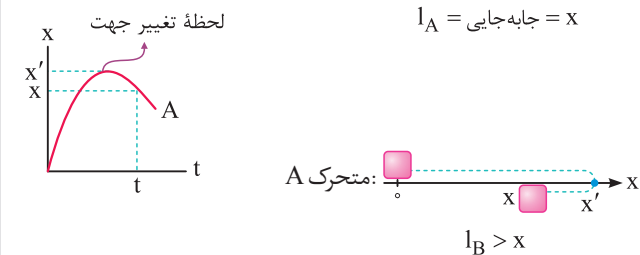
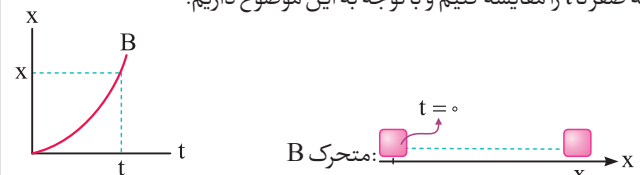
در بازه زمانی صفر تا  $t_3$ ، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است ولی تندی متوسط آن مخالف صفر است (زیرا جابه‌جایی در این بازه زمانی صفر شده ولی مسافت طی شده مخالف صفر است).

۶۳ این سؤال را در دو گام حل می‌کنیم:

گام اول: خط واصل از لحظه صفر تا لحظه  $t$  برای دو متحرک یکسان بوده و با توجه به این که شیب این خط برابر سرعت متوسط متحرک است، سرعت متوسط دو متحرک از لحظه صفر تا لحظه  $t$  یکسان است.



گام دوم: برای مقایسه تندی متوسط، باید مسافت طی شده توسط دو متحرک از لحظه صفر تا  $t$  را مقایسه کنیم و با توجه به این موضوع داریم:



همان طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده توسط متحرک A به دلیل تغییر جهت دادن، از جابه‌جایی آن (یعنی  $x$ ) بیشتر بوده و در مجموع تندی متوسط A از B بیشتر است.

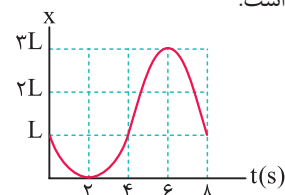
$$(s_{av}) = \frac{1}{\Delta t} \frac{l_A > l_B}{\Delta t} \rightarrow (s_{av})_A > (s_{av})_B$$

۶۴

### دقت

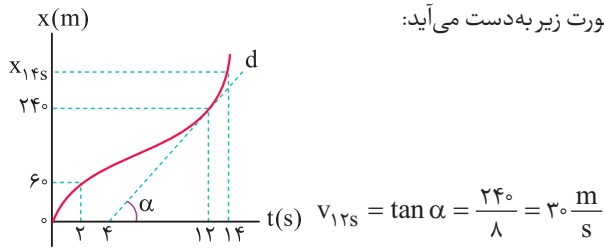
در هر بازه زمانی که تندی متوسط متحرک بزرگ‌تر باشد، متحرک تندتر و سریع‌تر حرکت کرده است و بالعکس.

با توجه به نمودار داده شده، چون تندی متوسط متحرک در بازه زمانی ۴s تا ۶s بیش‌تر از سایر گزینه‌ها است، بنابراین متحرک در این بازه زمانی تندتر حرکت کرده است و گزینه (۳) صحیح است.



با توجه به تمرین (۱۲) در درسنامه، گزینه (۳) صحیح است.

**گام اول:** تندی متحرک در لحظه  $t = ۱۲s$ ، برابر شیب خط  $d$  می باشد



**گام دوم:** با توجه به صورت سؤال، تندی متوسط در بازه  $t = ۲s$  تا  $t = ۱۴s$  برابر تندی در لحظه  $t = ۱۲s$  می باشد. بنابراین مکان متحرک در  $t = ۱۴s$  برابر است با:

$$S_{av} = V_{12s} \Rightarrow \frac{x_{14s} - 6}{14 - 2} = 3 \Rightarrow x_{14s} = 42m$$

دقت شود که متحرک از  $۲s$  تا  $۱۴s$  بدون تغییر جهت روی خط راست در حال حرکت است و تندی متوسط متحرک برابر سرعت متوسط آن است.

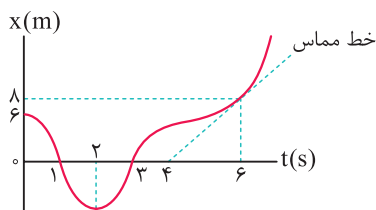
**گام سوم:** نسبت خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\frac{(v_{av})_{۲ تا ۱۴}}{(v_{av})_{۱۴ تا ۱۲}} = \frac{\frac{6 - 0}{2}}{\frac{42 - 24}{2}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

این سؤال را در گام های زیر حل می کنیم:

**گام اول:** محاسبه سرعت متحرک در لحظه  $t = ۶s$ :

$$t = ۶s : v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 - 0}{6 - 0} = 1 \frac{m}{s}$$

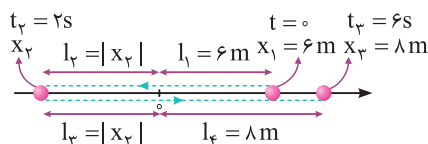


بنابراین چون تندی متوسط متحرک در بازه زمانی  $0 < t < ۶s$  برابر تندی در لحظه  $t = ۶s$  است، تندی متوسط در  $0 < t < ۶s$  برابر  $1 \frac{m}{s}$  است.

**گام دوم:** محاسبه مسافت طی شده در بازه زمانی  $0 < t < ۶s$ :

$$S_{av} = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow 1 = \frac{1}{6} \Rightarrow l = ۳m$$

**گام سوم:** شکل نشان داده شده نحوه حرکت متحرک را در  $۶$  ثانیه اول حرکت، با توجه به نمودار مکان - زمان نشان می دهد. با توجه به این شکل می توان نوشت:



$$۳ = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \Rightarrow ۳ = 6 + |x_2| + |x_2| + 6 \Rightarrow |x_2| = 6m$$

در نهایت باید دقت شود که در  $t = ۲s$ ، متحرک در خلاف جهت محور  $x$ ، بیشترین فاصله از مبدأ را دارد و این فاصله همان  $6m$  است.

### نکته

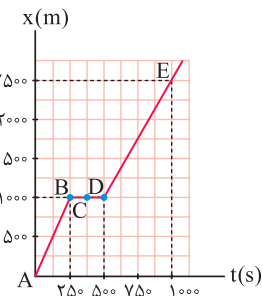
اگر نمودار مکان - زمان در بازه ای از حرکت به صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازه سرعت متحرک در آن بازه زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه ای در تمامی لحظات آن بازه زمانی برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است.

با توجه به نکته ارائه شده، واضح است که شیب  $DE$  مقدار ثابتی است و سرعت متحرک در این بازه نیز مقدار ثابتی است. بنابراین سرعت متوسط در هر بازه زمانی قرار گرفته در این بازه ( $E$  تا  $D$ ) برابر سرعت لحظه ای در این بازه است. یعنی سرعت متوسط در بازه زمانی  $۶۰۰s < t < ۹۰۰s$  برابر سرعت لحظه ای متحرک در لحظه  $t = ۵۵۰s$  (یا هر لحظه دیگر که در بازه زمانی  $۵۰۰s$  تا  $۱۰۰۰s$  قرار گرفته باشد) می باشد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

### بررسی سایر گزینه ها

(۲) متحرک در بازه  $A$  تا  $B$  در مدت  $t = ۲۵۰s$  به اندازه  $۱۰۰۰m - ۰ = ۱۰۰۰m$  جابه جاشده است، بنابراین اندازه سرعت متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{۱۰۰۰ - ۰}{۲۵۰ - ۰} = ۴ m/s$$



از طرفی سرعت متوسط متحرک در بازه  $D$  تا  $E$  برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_E - x_D}{t_E - t_D} = \frac{۲۵۰۰ - ۱۰۰۰}{۱۰۰۰ - ۵۰۰} = ۳ m/s$$

بنابراین متحرک در  $AB$ ، تندتر از  $DE$  حرکت می کند.

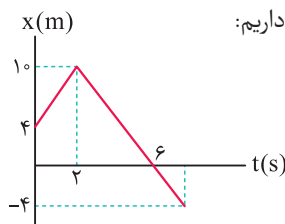
(۳) برای محاسبه اندازه سرعت متوسط در کل زمان حرکت، نسبت جابه جایی کل متحرک را بر کل بازه زمانی به دست می آوریم:

$$v_{av \text{ کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{x_E - x_A}{t_E - t_A} = \frac{۲۵۰۰ - ۰}{۱۰۰۰ - ۰} = ۲/۵ m/s$$

(۴) با توجه به نمودار، مشاهده می کنیم که متحرک در تمام لحظات بین  $t = ۲۵۰s$  تا  $t = ۵۰۰s$  در مکان  $x = ۱۰۰۰m$  قرار داشته و جابه جا نمی شود. بنابراین متحرک در این بازه زمانی ساکن بوده و سرعت آن در این بازه صفر است (بنابراین سرعت در نقطه  $C$  نیز صفر می باشد).

### ۷۱

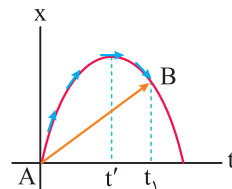
با توجه به نکته مطرح شده در سؤال قبل، می توانیم بگوییم که سرعت متحرک در لحظه  $t = ۶s$  (که متحرک از مبدأ عبور می کند)، برابر سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی  $۲s$  تا  $۶s$  است. بنابراین داریم:



$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{۰ - ۱۰}{۶ - ۲} \vec{i} = -\frac{۱۰}{۴} \vec{i} = -۲/۵ \vec{i}$$

۷۵ به موارد زیر توجه کنید:

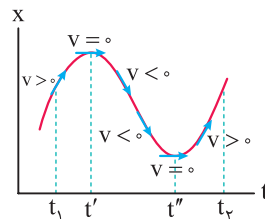
همان طور که می دانیم، شیب خط رسم شده بین دو لحظه  $t = 0$  و  $t_1$  (خط AB) بیانگر سرعت متوسط حرکت جسم می باشد. چون شیب خط موردنظر مثبت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازه زمانی مثبت بوده و در جهت مثبت محور X است.



از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه، بیانگر سرعت لحظه ای متحرک در آن لحظه است. همان طور که می بینید، از شروع حرکت تا لحظه  $t'$  شیب خط مماس و سرعت لحظه ای مثبت و از لحظه  $t'$  تا  $t_1$  شیب خط مماس و سرعت لحظه ای منفی می باشد.

بنابراین سرعت لحظه ای و سرعت متوسط ابتدا هم جهت و سپس در خلاف جهت هم هستند.

با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، سرعت متحرک در دو لحظه  $t'$  و  $t''$  صفر شده و تغییر علامت می دهد (یعنی اگر سرعت مثبت بوده، منفی شده و بالعکس)، زیرا در این لحظات، علامت شیب نمودار مکان - زمان تغییر کرده است.



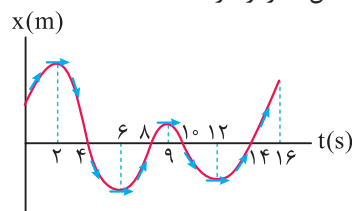
بنابراین در بازه  $t_1$  تا  $t_2$ ، متحرک دو بار تغییر جهت می دهد.

### تذکر

نشان دادن فلش بر روی مماس ها، برای درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.

(شیب مثبت) (شیب منفی) (شیب صفر)

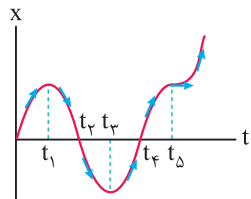
۷۷ تندی متحرک در لحظه های  $t_1 = 2s$ ،  $t_2 = 6s$ ،  $t_3 = 9s$  و  $t_4 = 12s$  صفر شده و علامت سرعت بعد و قبل از این لحظات تغییر می کند، بنابراین متحرک در ۱۶ ثانیه اول حرکت، ۴ بار تغییر جهت می دهد. از طرفی متحرک ۴ بار از مبدأ عبور کرده و بردار مکان حداقل اندازه را دارد.



در بازه های زمانی  $(0 \text{ تا } 2s)$ ،  $(2s \text{ تا } 6s)$  و  $(6s \text{ تا } 9s)$ ، در مجموع به مدت ۹s، شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه علامت سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور X حرکت می کند.

۷۸ همان طور که می دانید، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان،

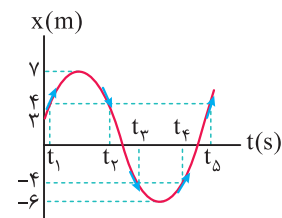
بیانگر سرعت متحرک است و در بازه های زمانی که شیب خط مماس منفی می شود، سرعت در خلاف محور X بوده و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می کند. همان طور که در شکل مقابل می بینید، تنها در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_3$  شیب خط مماس بر نمودار منفی می شود.



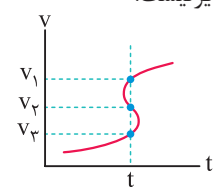
۷۹ به موارد زیر توجه کنید:

هنگامی که متحرک در نقاط  $x = 4m$  یا  $x = -4m$  قرار می گیرد، فاصله متحرک تا مبدأ مکان برابر ۴m می شود.

همان طور که در شکل مقابل می بینید، در لحظات  $t_1$ ،  $t_2$ ،  $t_3$  و  $t_4$  فاصله متحرک تا مبدأ برابر ۴m می شود.

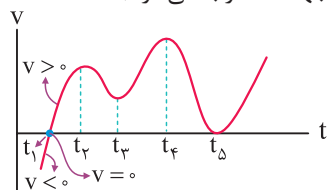


در صورت سؤال لحظاتی مدنظر است که متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می کند، بنابراین باید سرعت متحرک و شیب خط مماس بر نمودار منفی باشد، بنابراین فقط لحظات  $t_2$  و  $t_4$  قابل قبول هستند و گزینه (۱) صحیح می باشد. نمودار رسم شده در گزینه (۴)، نمودار یک تابع  $v$  بر حسب  $t$  نمی تواند باشد. به عبارت دیگر، اگر یک خط موازی محور  $v$  رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می کند. این موضوع نشان دهنده این است که متحرک در یک لحظه، چند سرعت مختلف دارد که این موضوع امکان پذیر نیست.



۸۱ با توجه به نمودار سرعت - زمان داده شده، در لحظه  $t = 6s$  نه سرعت متحرک صفر می شود و نه علامت سرعت عوض می شود، بنابراین متحرک در این لحظه تغییر جهت نمی دهد. درستی سایر گزینه ها را با توجه به مطالب مطرح شده در درسنامه بررسی کنید.

۸۲ با در دست داشتن نمودار سرعت - زمان برای مشخص کردن لحظه تغییر جهت متحرک، کافی است لحظه ای را بیابیم که نمودار محور زمان را قطع کرده و تغییر علامت دهد. بنابراین در شکل زیر، متحرک تنها در لحظه  $t_1$  تغییر جهت می دهد. (در  $t_5$  علامت سرعت عوض نشده و لحظه تغییر جهت محسوب نمی شود).

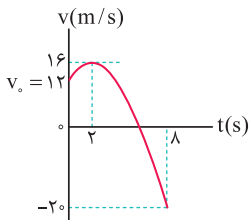


۸۶ با توجه به معادله سرعت - زمان داده شده، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$v = -t^2 + 4t + 12 = -t^2 + 4t - 4 + 4 + 12$$

$$\Rightarrow v = -(t^2 - 4t + 4) + 16 \Rightarrow v = -(t - 2)^2 + 16$$

$$\text{نقاط کمکی: } \begin{cases} t = 0 \Rightarrow v_0 = 12 \frac{m}{s} \\ t = 2s \Rightarrow v = 16 \frac{m}{s} \\ t = 4s \Rightarrow v = -(4)^2 + 4 \times 4 + 12 = -20 \frac{m}{s} \end{cases}$$



همان طور که مشاهده می‌کنیم، اندازه سرعت در لحظه  $t = 4s$  بیشتر از سایر لحظه‌هاست و در نتیجه بیشترین تندی متحرک در ۸ ثانیه اول حرکت، در انتهای حرکت می‌باشد که برابر  $20 \frac{m}{s}$  است.

۸۷ شتاب متوسط با بردار  $\Delta v$  هم جهت است نه بردار  $v$  و گزینه (۴) عبارت نادرستی است. سایر گزینه‌ها، با توجه به درسنامه ابتدای این قسمت، صحیح می‌باشند.

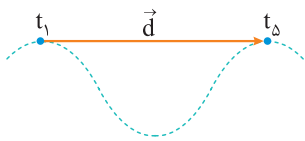
۸۸ برای پاسخ دادن به این سؤال، به نکات زیر توجه کنید:

- ۱ هنگام سقوط آزاد توپ به سمت زمین، به دلیل نیروی جاذبه، سرعت توپ به تدریج افزایش می‌یابد و این افزایش سرعت به معنی شتاب‌دار بودن حرکت است.
- ۲ در حرکت خودرو در یک جاده مارپیچ، جهت حرکت خودرو در طول مسیر تغییر می‌کند و در نتیجه بردار سرعت عوض می‌شود، بنابراین حرکت شتاب‌دار است.
- ۳ هنگامی که خودرو با تندی ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، اندازه و جهت بردار سرعت ثابت است و در نتیجه حرکت شتاب ندارد.
- ۴ در چرخش ماهواره به دور زمین، جهت حرکت ماهواره تغییر می‌کند و این به معنی تغییر بردار سرعت است، بنابراین حرکت شتاب‌دار است.

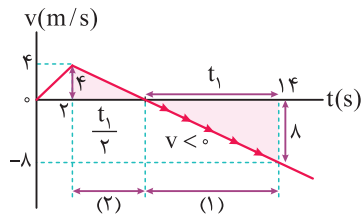
۸۹ در گزینه (۴) اندازه سرعت ثابت بوده و بردار سرعت تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین در این حالت،  $\vec{v}_1 = \vec{v}_4$  بوده و شتاب متوسط از لحظه  $t_1$  تا  $t_4$  برابر صفر است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_1}{\Delta t} \quad \vec{v}_4 = \vec{v}_1 \rightarrow \vec{a}_{av} = 0$$

۹۰ سرعت، یک کمیت برداری است، بنابراین زمانی سرعت‌ها در دو زمان مختلف با هم برابر هستند که هم اندازه و هم جهت سرعت‌ها یکسان باشد. در این سؤال، در لحظات  $t_1$ ،  $t_3$  و  $t_5$  سرعت متحرک یکسان است، بنابراین شتاب متوسط این متحرک در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_3$  و  $t_1$  تا  $t_5$  برابر صفر است ( $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ). از سوی دیگر سرعت متوسط در راستای جابه‌جایی است و تنها در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_5$  جابه‌جایی متحرک، افقی و در نتیجه سرعت متوسط متحرک در جهت محور X است.



۸۳ همان طور که می‌دانیم در نمودار سرعت - زمان، در زمان‌هایی که نمودار زیر محور زمان است، سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. با توجه به تشابه دو مثلث رنگی، اگر طول قسمت (۱) که سرعت در آن منفی است را  $t_1$  در نظر بگیریم، طول قسمت (۲) برابر  $\frac{t_1}{2}$  است و می‌توان نوشت:



$$\Rightarrow t_1 + \frac{t_1}{2} = (14 - 2) = 12 \Rightarrow t_1 = 8s$$

بنابراین متحرک به مدت  $t_1 = 8s$  در خلاف جهت محور X جابه‌جا می‌شود.

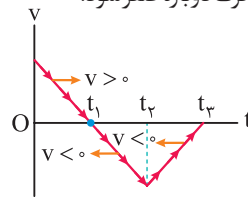
۸۴

تذکره

در نمودار سرعت - زمان، هرگاه نمودار از محور زمان دور شود، تندی متحرک  $|v|$  در حال افزایش است و بالعکس.

ابتدا باید دقت شود که نمودار سرعت - زمان متحرک داده شده است و با توجه به آن می‌توان گفت:

- ۱ از لحظه  $t_1$  تا  $t_3$  نمودار سرعت - زمان زیر محور زمان ( $t$ ) است و در نتیجه سرعت متحرک در این بازه زمانی منفی است و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.
- ۲ از لحظه  $t = 0$  تا  $t = t_1$  سرعت متحرک مثبت و اندازه آن در حال کاهش بوده تا در لحظه  $t_1$  به صفر برسد. سپس از لحظه  $t_1$  تا  $t_4$  سرعت متحرک منفی ولی اندازه آن ( $|v|$ ) در حال افزایش است (نمودار از محور افقی دور می‌شود). از لحظه  $t_4$  تا  $t_3$  نیز سرعت متحرک منفی است ولی اندازه آن ( $|v|$ ) در حال کاهش است (نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود) تا در لحظه  $t_3$  سرعت متحرک دوباره صفر شود.



۸۵ به موارد زیر توجه کنید:

- ۱ همان طور که می‌دانید، اگر متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط آن با یکدیگر برابر می‌شود و در نتیجه اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان خواهد شد.
- ۲ از طرف دیگر می‌دانیم که دو ثانیه دوم، معادل بازه زمانی  $t_1 = 2s$  تا  $t_4 = 4s$  است. بنابراین برای پاسخ دادن به این سؤال، باید نموداری را پیدا کنیم که متحرک در این بازه زمانی تغییر جهت نداده باشد. سرعت متحرک‌های C و D (نمودار گزینه‌های (۳) و (۴) به ترتیب در لحظات  $2/5s$  و  $3s$  صفر شده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین این دو متحرک تغییر جهت می‌دهند. متحرک A نیز در لحظه  $t = 3s$  تغییر جهت می‌دهد، اما متحرک B در بازه زمانی  $t_1 = 2s$  تا  $t_4 = 4s$  تغییر جهت نمی‌دهد، بنابراین گزینه (۲) پاسخ این سؤال است.

۹۱ | در بازه  $t_1$  تا  $t_2$ ، شتاب متوسط برابر است با:

$$\begin{cases} \Delta v = v_2 - v_1 = -2 - 10 = -12 \frac{m}{s} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-12}{4} = -3 \frac{m}{s^2} \\ \Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 1 = 4s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (-3 \frac{m}{s^2}) \vec{i}$$

در بازه  $t_2$  تا  $t_3$  هم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta v = v_3 - v_2 = 4 - (-2) = 6 \frac{m}{s} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6}{2} = +3 \frac{m}{s^2} \\ \Delta t = t_3 - t_2 = 7 - 5 = 2s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{av} = (+3 \frac{m}{s^2}) \vec{i}$$

۹۲ | بررسی موارد

الف) هنگامی که متحرک در مکان‌های منفی قرار دارد، بردار مکان آن در خلاف جهت محور X است و هنگامی که در مکان‌های مثبت قرار دارد، بردار مکان آن در جهت محور X است، بنابراین بردار مکان متحرک ابتدا در خلاف جهت محور X و سپس در جهت محور X می‌باشد و در نتیجه این عبارت نادرست است.

ب) بردار سرعت متحرک در مکان A در جهت مثبت محور X ( $v_A > 0$ ) و بردار سرعت متحرک در مکان C در خلاف جهت محور X است ( $v_C < 0$ )، بنابراین تغییرات سرعت متحرک منفی بوده و در نتیجه بردار شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی، در خلاف جهت محور X است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_C - v_A}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} < 0$$

ج) متحرک در دو مرحله ابتدا ۲۸ متر در جهت مثبت محور X حرکت می‌کند، در ادامه تغییر جهت داده و ۱۲ متر در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، بنابراین مسافت طی شده برابر ۴۰ متر است و تندی متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر است با:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t_{کل}} = \frac{40}{6+4} = 4 \frac{m}{s}$$

د) متحرک در هنگام عبور از مبدأ مکان ( $x=0$ )، در حال حرکت در جهت مثبت محور X است و در نتیجه بردار سرعت آن در جهت مثبت محور X می‌باشد. با توجه به این توضیحات، فقط عبارت «الف» نادرست است.

۹۳ | ابتدا سرعت‌های متحرک که برحسب cm/s داده شده‌اند را برحسب m/s نوشته و با توجه به تعریف شتاب متوسط ( $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ )، داریم:

$$\begin{cases} v_1 = 1 \text{ cm/s} = 0.01 \text{ m/s}, v_2 = -99 \text{ cm/s} = -0.99 \text{ m/s} \\ \Delta t = 0.5s \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{-0.99 - 0.01}{0.5} = \frac{-1}{0.5} = -2 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = 2 \frac{m}{s^2}$$

یادآوری

$$1 \text{ cm/s} = 0.01 \text{ m/s} \quad \text{یا} \quad 1 \text{ m/s} = 100 \text{ cm/s}$$

۹۴ | با توجه به تمرین (۱۸) در درسنامه، گزینه (۲) صحیح است.

۹۵ | گام اول: ابتدا تغییر سرعت در بازه زمانی صفر تا  $t_4$  را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow -2\vec{i} = \frac{\Delta \vec{v}}{10} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_4} = -20\vec{i}$$

گام دوم: سپس تغییر سرعت در بازه زمانی صفر تا  $t_3$  را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{2}{3}\vec{i} = \frac{\Delta \vec{v}}{15} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_3} = 10\vec{i}$$

گام سوم: شتاب متوسط در بازه زمانی  $t_3$  تا  $t_4$  برابر است با:

$$(\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ تا } t_4} = (\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ صفر تا } t_3} + (\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ تا } t_4}$$

$$10\vec{i} = -20\vec{i} + (\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ تا } t_4} \Rightarrow (\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ تا } t_4} = 30\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{(\Delta \vec{v})_{t_3 \text{ تا } t_4}}{\Delta t} = \frac{30\vec{i}}{15-10} = 6\vec{i} \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

۹۶ | با توجه به تمرین (۱۷) در درسنامه، گزینه (۴) صحیح است.

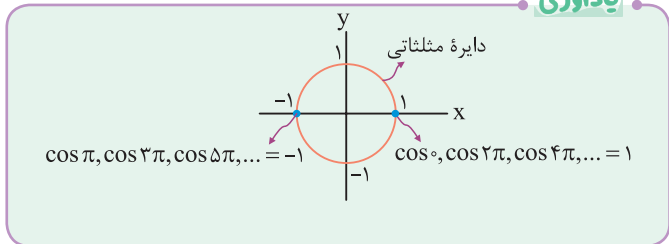
۹۷ | سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای بازه زمانی داده شده را به دست آورده و شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow v_1 = 0.3\pi \cos(10\pi) = 0.3\pi \\ t_2 = 5s \rightarrow v_2 = 0.3\pi \cos(25\pi) = 0.3\pi \cos(\pi) = -0.3\pi \end{cases}$$

$$|a_{av}| = \frac{|v_2 - v_1|}{t_2 - t_1} = \frac{|-0.3\pi - (0.3\pi)|}{5-2}$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = 0.2\pi \text{ m/s}^2$$

یادآوری



۹۸ | در هر یک از بازه‌های زمانی، شتاب متوسط را با استفاده از رابطه  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  به دست می‌آوریم.

بررسی گزینه‌ها

$$۱) \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow a_{av} = \frac{0-4}{1-0} = -4 \frac{m}{s^2} \\ t_2 = 1s \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases}$$

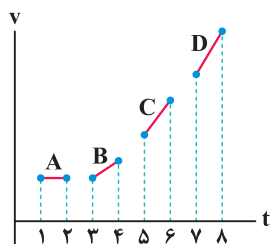
$$۲) \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow a_{av} = \frac{-4-(4)}{2-0} = -4 \frac{m}{s^2} \\ t_2 = 2s \Rightarrow v_2 = -4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow a_{av} = \frac{4-4}{4-0} = 0 \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$۴) \begin{cases} t_1 = 4s \Rightarrow v_1 = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow a_{av} = \frac{-4-(4)}{6-4} = -4 \frac{m}{s^2} \\ t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = -4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

در ۴ ثانیه اول حرکت، شتاب متوسط حرکت برابر صفر است، یعنی در خلاف جهت محور X نیست.

**تمرین** در شکل زیر شتاب متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟

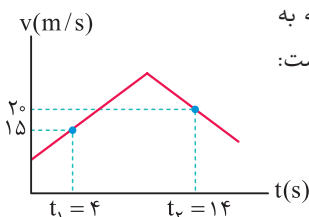


$$a_{avA} = 0 < a_{avB} < a_{avC} < a_{avD}$$

**پاسخ**

**روش اول (نمودارخوانی):** با توجه به

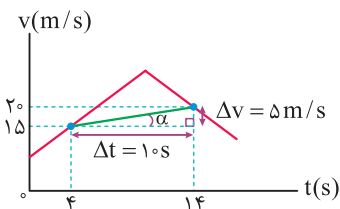
نمودار سرعت - زمان داده شده می توان نوشت:



$$\begin{cases} t_1 = 4s \rightarrow v_1 = 15m/s \\ t_2 = 14s \rightarrow v_2 = 20m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 15}{14 - 4} = \frac{5}{10} = 0.5 m/s^2$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{1}{2} m/s^2 = 0.5 m/s^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = 0.5 \hat{i}$$

**روش دوم (استفاده از شیب نمودار):** شتاب متوسط بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می کند.



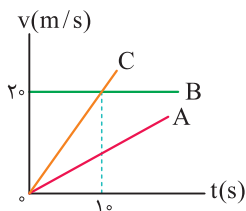
$$|\vec{a}_{av}| = \tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} m/s^2 = 0.5 m/s^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = 0.5 \hat{i}$$

**دقت**

با توجه به شیب پاره خط AB،  $|\vec{a}_{av}|$  در این بازه مقداری مثبت دارد.

برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

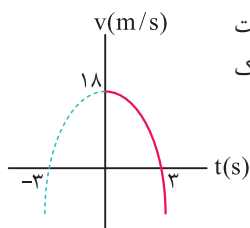


$$C \text{ شیب} > A \text{ شیب} > B \text{ شیب} = 0 \Rightarrow a_C > a_A > a_B$$

با توجه به ثابت بودن شتاب، رابطه فوق در هر بازه زمانی دلخواه نیز در مورد شتاب متوسط سه متحرک برقرار است و در ۱۰ ثانیه اول حرکت داریم:

$$(a_{av})_C > (a_{av})_A > (a_{av})_B = 0$$

ابتدا ریشه های معادله مورد نظر را به دست می آوریم و به دنبال آن نمودار سرعت - زمان را که یک سهمی است رسم می کنیم:



$$v = -2t^2 + 18 \Rightarrow \begin{cases} -2t^2 + 18 = 0 \Rightarrow t = 3s \text{ یا } t = -3 \\ t = 0 \Rightarrow v = 18 m/s \end{cases}$$

همان طور که می بینید، در بازه زمانی  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 3s$ ، سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می کند. اندازه شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر است با:

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{|0 - 18|}{3} = 6 m/s^2$$

بزرگی سرعت در لحظه  $t = 0$  برابر  $\frac{m}{s}$  است، بنابراین می توان نوشت:

$$v = t^2 + bt + c \xrightarrow{t=0} 0 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 0$$

شتاب متوسط متحرک در ثانیه اول حرکت برابر  $\frac{m}{s^2}$  است، بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0: v_1 = 0 + 0 + 4 = 4 \\ t_2 = 1s: v_2 = 1 + b + 4 = 5 + b \end{cases} \Rightarrow \Delta v = 5 + b - 4 = 1 + b$$

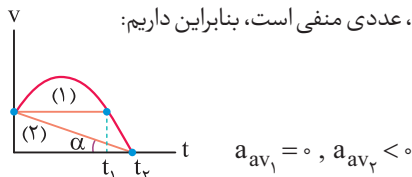
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -3 = \frac{1 + b}{1} \Rightarrow b = -4$$

بنابراین معادله سرعت - زمان متحرک به صورت  $v = t^2 - 4t + 4$  است.

$$v = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2 \geq 0$$

عبارت فوق همواره بزرگ تر یا مساوی صفر است و تغییر علامت نمی دهد، بنابراین متحرک هیچ گاه تغییر جهت نمی دهد.

همان طور که می دانیم، شیب خط رسم شده بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازه می باشد. در شکل زیر، شیب خط (۱) برابر  $a_{av1}$  و شیب خط (۲) برابر  $a_{av2}$  است. خط (۱) افقی است و شیبی برابر صفر دارد، اما شیب خط (۲)، عددی منفی است، بنابراین داریم:



**روش دیگر:** با توجه به شکل زیر، متحرک در لحظه صفر دارای سرعت  $v_1$  و در لحظه  $t_1$  نیز دارای همان سرعت می باشد، بنابراین تغییرات سرعت متحرک در بازه زمانی صفر تا  $t_1$  صفر بوده و در نتیجه شتاب متوسط آن در این بازه نیز صفر است.

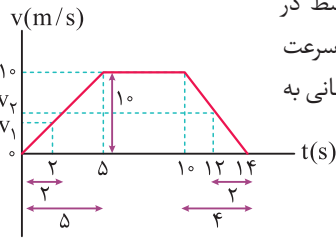
$$a_{av1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v=0} a_{av1} = 0$$

از سوی دیگر سرعت متحرک در لحظه  $t_2$  برابر صفر است. بنابراین شتاب متوسط در بازه صفر تا  $t_2$  برابر است با:

$$a_{av2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_1}{t_2 - 0} < 0$$

همان طور که از روی نمودار مشخص است،  $v_0$  عددی منفی است و می توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 = -6 \text{ m/s} \\ t_2 = 15 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{0 - (-6)}{15 - 0} = 0.4 \text{ m/s}^2$$



برای محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی  $t_1 = 2 \text{ s}$  تا  $t_2 = 12 \text{ s}$ ، ابتدا سرعت متحرک را در ابتدا و انتهای این بازه زمانی به کمک تشابه به دست می آوریم:

$$t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow \frac{10}{v_1} = \frac{2}{4} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s} \quad (\text{تشابه در سمت چپ شکل})$$

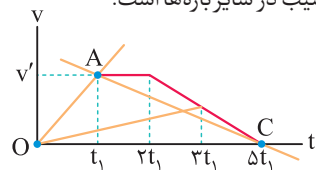
$$t_2 = 12 \text{ s} \Rightarrow \frac{10}{v_2} = \frac{14 - 10}{14 - 12}$$

$$\Rightarrow v_2 = 5 \text{ m/s} \quad (\text{تشابه در سمت راست شکل})$$

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5 - 4}{12 - 2} = \frac{1}{10} \text{ m/s}^2$$

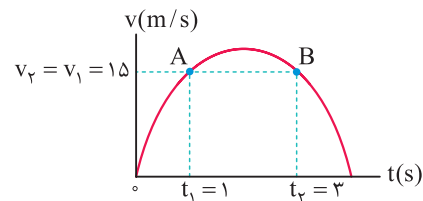
می دانیم که در نمودار سرعت - زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار، شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی را می دهد. بنابراین شتاب متوسط در بازه ای بیشتر است که شیب خط واصل بین نقطه ابتدا و انتهای آن بازه بیشتر باشد.

با توجه به شکل زیر در بازه زمانی صفر تا  $t_1$ ، اندازه شتاب متوسط بزرگتر از سایر بازه ها است، زیرا شیب خط OA بزرگتر از شیب در سایر بازه ها است.



$$\begin{cases} \text{شیب خط OA} = a_{avOA} = \frac{v'}{t_1} \\ \text{شیب خط AC} = a_{avAC} = -\frac{v'}{4t_1} \end{cases} \Rightarrow |a_{avOA}| > |a_{avAC}|$$

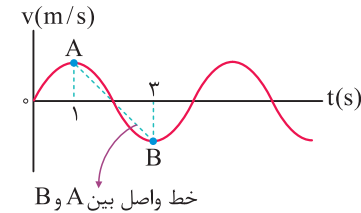
همان طور که می بینید، در بازه زمانی  $2 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$ ، اندازه شتاب متوسط از سایر گزینه ها بزرگتر است. برای محاسبه اندازه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان، از رابطه  $|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$  استفاده می کنیم. به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث ها، سرعت در لحظه  $t = 0$  را به دست آوریم:



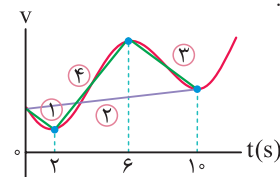
$$|\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{v_2 - v_1 = 15 \text{ m/s}}{t_2 - t_1} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{15 - 15}{3 - 1} = 0$$

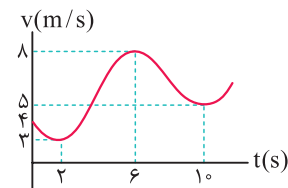
شیب خط واصل بین دو نقطه از منحنی سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک می باشد. بین گزینه های داده شده، تنها در بازه زمانی  $t_1 = 1 \text{ s}$  تا  $t_2 = 3 \text{ s}$  شیب خط واصل بین دو نقطه منفی بوده و شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور x است.



روش اول: شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی است. با توجه به نمودار زیر، اندازه شیب خط (4) بیش تر از سه خط دیگر است، بنابراین اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی  $2 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$  بیش تر از سایر گزینه ها است.



روش دوم: می توانستیم با قرار دادن عدد های مناسب روی نمودار و استفاده از رابطه  $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  هم شتاب متوسط را در بازه های زمانی مختلف مقایسه کنیم.



$$2 \text{ s} \text{ تا } 4 \text{ s}: a_{av} = \frac{3 - 4}{2} = -\frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

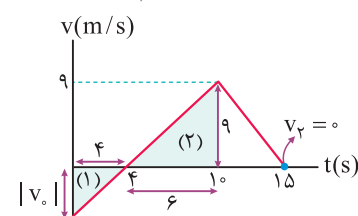
$$10 \text{ s} \text{ تا } 15 \text{ s}: a_{av} = \frac{5 - 4}{10} = \frac{1}{10} \text{ m/s}^2$$

$$10 \text{ s} \text{ تا } 6 \text{ s}: a_{av} = \frac{5 - 8}{4} = -\frac{3}{4} \text{ m/s}^2$$

$$6 \text{ s} \text{ تا } 2 \text{ s}: a_{av} = \frac{8 - 3}{4} = \frac{5}{4} \text{ m/s}^2$$

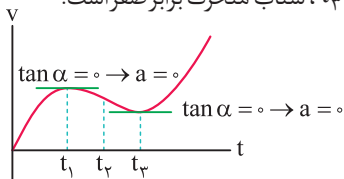
همان طور که می بینید، در بازه زمانی  $2 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$ ، اندازه شتاب متوسط از سایر گزینه ها بزرگتر است.

برای محاسبه اندازه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان، از رابطه  $|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$  استفاده می کنیم. به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث ها، سرعت در لحظه  $t = 0$  را به دست آوریم:



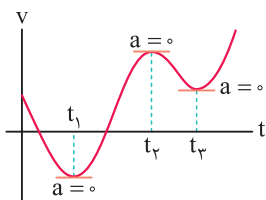
$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{15 - 4}{3 - 1} = \frac{11}{2} \Rightarrow v_0 = 6 \text{ m/s}$$

۱۱۳ در زمان‌هایی که شیب مماس رسم شده بر نمودار سرعت - زمان صفر باشد (از جمله نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار)، شتاب لحظه‌ای متحرک برابر صفر است. بنابراین در لحظات  $t_1$  و  $t_3$ ، شتاب متحرک برابر صفر است.

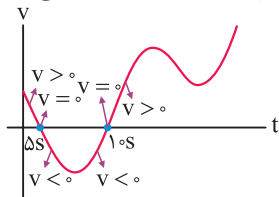


۱۱۴ با توجه به تمرین (۲۰) در درسنامه، گزینه (۴) درست است.

۱۱۵ همان‌طور که می‌دانیم، در نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. با توجه به این موضوع در نمودار داده شده، شتاب متحرک در لحظات  $t_1$ ،  $t_2$  و  $t_3$  تغییر جهت می‌دهد.



در لحظات  $t_1$ ،  $t_2$  و  $t_3$  شتاب متحرک تغییر جهت می‌دهد.

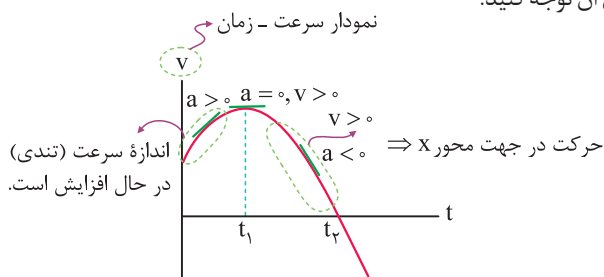


در لحظات  $t = 1\text{ s}$  و  $t = 5\text{ s}$  سرعت متحرک تغییر جهت می‌دهد.

هم‌چنین می‌دانیم در نقاطی که سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (نمودار سرعت - زمان محور زمان را قطع کرده و تغییر علامت می‌دهد) متحرک تغییر جهت می‌دهد. بنابراین متحرک در لحظات  $5\text{ s}$  و  $1\text{ s}$  تغییر جهت داده است.

۱۱۶ با توجه به تمرین (۲۱) در درسنامه، گزینه (۴) صحیح است.

۱۱۷ ابتدا به نمودار سرعت - زمان داده شده و شیب مماس‌های ترسیمی بر روی آن توجه کنید:



با توجه به نمودار، به بررسی موارد مطرح شده می‌پردازیم:

#### بررسی موارد

(الف) نادرست است. در لحظه  $t_1$  جهت شتاب متحرک تغییر می‌کند اما جهت سرعت آن تغییر نمی‌کند و در جهت محور  $x$  است.

(ب) درست است. در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  سرعت مثبت بوده و متحرک در جهت محور  $x$  حرکت می‌کند.

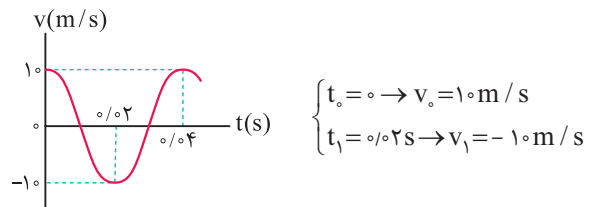
(پ) نادرست است. با توجه به این‌که نمودار از نوع سرعت - زمان است، در بازه زمانی صفر تا  $t_1$ ، تندى متحرک در حال افزایش است، زیرا نمودار از محور افقی دور می‌شود.

#### دقت

می‌دانیم شیب خط  $AB$  نیز برابر شتاب متوسط متحرک از  $t_1$  تا  $t_2$  است، با توجه به صفر بودن شیب این خط،  $|a_{av}|$  در این بازه زمانی صفر است.

۱۱۰ خواسته اول: محاسبه شتاب متوسط:

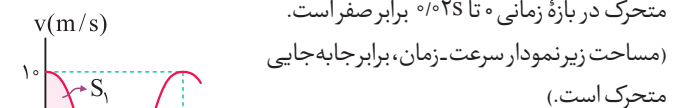
با توجه به نمودار مقابل، شتاب متوسط در بازه  $(0, 0.2\text{ s})$  برابر است با:



$$\Rightarrow a_{av} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{-10 - 10}{0.2 - 0} = -10^2\text{ m/s}^2$$

خواسته دوم: محاسبه سرعت متوسط:

برای محاسبه سرعت متوسط در بازه زمانی داده شده، ابتدا جابه‌جایی متحرک را به کمک مساحت زیر نمودار سرعت - زمان به دست می‌آوریم. در نمودار کسینوسی داده شده، مساحت  $S_1$  با مساحت  $S_2$  با هم برابر است. بنابراین جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی  $0$  تا  $0.2\text{ s}$  برابر صفر است.



$$\Delta x = |S_1| - |S_2| \xrightarrow{|S_1| = |S_2|} \Delta x = 0$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

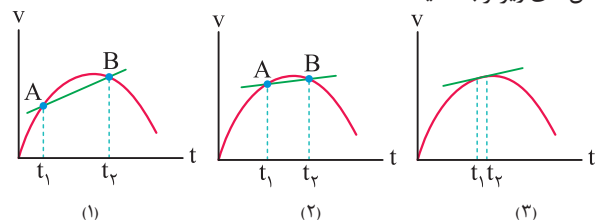
۱۱۱ شیب خط واصل بین صفر تا  $t_1$ ، بیشتر از بازه‌های زمانی دیگر است و این یعنی شتاب متوسط در این بازه زمانی بیشتر است. از سوی دیگر در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$ ، تندى متحرک در تمامی لحظات بیشتر از بازه‌های زمانی دیگر است، بنابراین الزاماً تندى متوسط هم در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  بیشتر از بازه‌های زمانی دیگر است.

#### نکته

تندى متوسط در یک بازه زمانی، همواره عددی بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین تندى لحظه‌ای متحرک در طول آن بازه زمانی است.

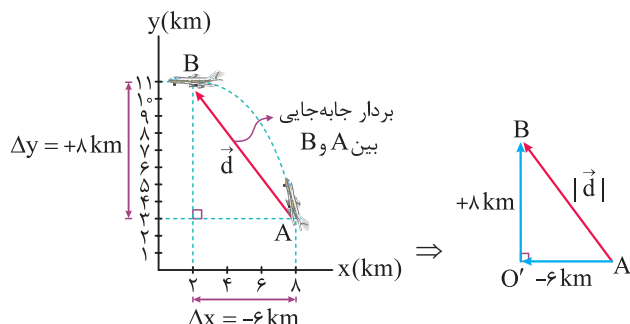
۱۱۲ با توجه به مطالب ذکر شده در درسنامه، شیب خط موردنظر شتاب لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

به شکل‌های زیر توجه کنید:



همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با کوچک‌تر شدن بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$ ، شیب پاره خط  $AB$  به سمت مماس رسم شده بر نمودار سرعت - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب مماس رسم شده بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه، بیانگر شتاب لحظه‌ای در آن لحظه است.

۱۳۲ می‌دانیم که جهت بردار جابه‌جایی، هم‌جهت با برداری است که از نقطه ابتدای حرکت (A) به نقطه انتهای حرکت (B) متصل می‌شود. در این سؤال برای محاسبه اندازه جابه‌جایی با کمک قضیه فیثاغورث داریم:



$$\Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10 \text{ km}$$

۱۳۳ گام اول: برداری که نقطه A را به B وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی است. با استفاده از رابطه فیثاغورث، جابه‌جایی برابر است با:

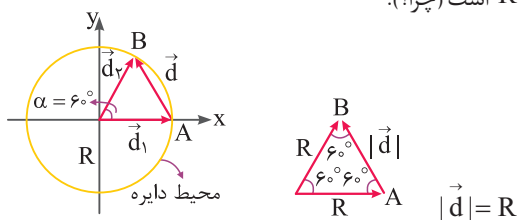
$$d = \sqrt{500^2 + 1200^2} = 1300 \text{ m}$$

۱۳۴ گام دوم: با تقسیم بزرگی جابه‌جایی به زمان، بزرگی سرعت متوسط به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{1300}{3/25} = 400 \text{ m/s}$$

۱۳۴ فرض کنید که متحرک بر روی محیط دایره ۶۰ درجه چرخیده و از A به B منتقل می‌شود. بردار جابه‌جایی متحرک در این حالت برابر تفاضل بردارهای مکان است.

بردار جابه‌جایی برداری است که نقطه ابتدای حرکت را به نقطه انتهای آن وصل می‌کند. مثلث روبه‌رویک مثلث متساوی‌الاضلاع است، بنابراین اندازه جابه‌جایی در این حالت برابر R است (چرا؟).



از سوی دیگر، متحرک ۶۰ درجه بر روی محیط دایره چرخیده و ۱/۶ آن را پیموده است (۶۰ درجه، ۱/۶ برابر ۳۶۰ درجه است). با توجه به این موضوع، مسافت طی شده توسط آن برابر است با:

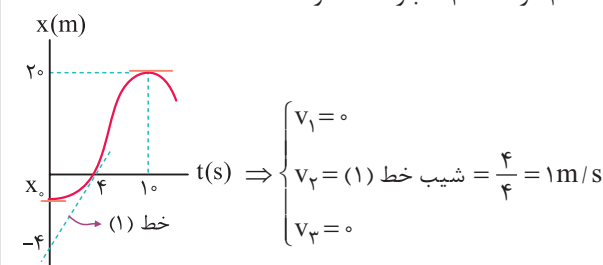
$$\text{مسافت طی شده} = \frac{1}{6} \times 2\pi R = \frac{\pi R}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{اندازه جابه‌جایی}}{\text{مسافت طی شده}} = \frac{R}{\frac{\pi R}{3}} = \frac{3}{\pi}$$

(ت) نادرست است. در بازه زمانی صفر تا  $t_1$ ، شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان مثبت بوده و در نتیجه بردار شتاب متحرک در جهت محور X است و در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$ ، شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان منفی بوده و در نتیجه بردار شتاب متحرک در خلاف جهت محور X است.

۱۱۸ با توجه به تمرین (۲۲) در درسنامه، گزینه (۴) صحیح است.

۱۱۹ با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی بر نمودار، سرعت در لحظات  $t_1 = 0$ ،  $t_2 = 4 \text{ s}$  و  $t_3 = 10 \text{ s}$  عبارت است از:



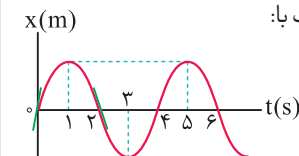
$$\text{شتاب متوسط در چهار ثانیه اول: } a_{av1} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{1 - 0}{4 - 0} = 0.25 \text{ m/s}^2 = 25 \text{ cm/s}^2$$

$$= 0.25 \text{ m/s}^2 = 25 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{شتاب متوسط در ده ثانیه اول: } a_{av2} = \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_1} = \frac{0 - 0}{10 - 0} = 0$$

با توجه به این موضوع، شتاب متوسط در ۴ ثانیه اول حرکت،  $25 \text{ cm/s}^2$  بیشتر از ۱۰ ثانیه اول حرکت است.

۱۲۰ مطابق نمودار مکان - زمان زیر، در لحظه  $t = 0$ ، شیب خط مماس بر نمودار، مثبت و در لحظه  $t = 2 \text{ s}$ ، شیب خط مماس بر نمودار، منفی است، بنابراین سرعت متحرک در لحظه  $t = 0$ ، مثبت و در لحظه  $t = 2 \text{ s}$ ، منفی است، بنابراین شتاب متوسط در ۲ ثانیه اول برابر است با:



$$\text{شتاب متوسط در ۲ ثانیه اول: } a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} < 0$$

بنابراین شتاب متوسط در ۲ ثانیه اول منفی بوده و در نتیجه بردار آن در خلاف جهت محور X است. با روشی مشابه می‌توانید نشان دهید که شتاب متوسط در سایر گزینه‌ها منفی نیست.

۱۲۱ با توجه به مکان و سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظات  $t_1 = 0$  و  $t_2 = 2 \text{ s}$ ، در مورد سرعت متوسط و شتاب متوسط متحرک می‌توان نوشت:

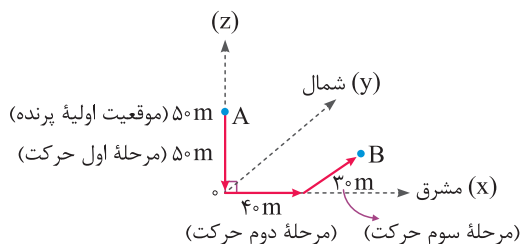
$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 0$$

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} < 0$$

بنابراین در ۲۰ ثانیه اول حرکت، سرعت متوسط برابر صفر و شتاب متوسط منفی (در خلاف جهت محور X) است.

۱۲۸ با توجه به تمرین (۲۴) در درسنامه، گزینه (۱) درست است.

۱۲۹ برای پاسخ به این تست مفهومی، شکل زیر را در نظر بگیرید. با توجه به حرکت‌های اشاره شده برای پرنده در صورت سؤال، موقعیت آن از A به B رسیده است:



A موقعیت اولیه در  $(x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = +50)$

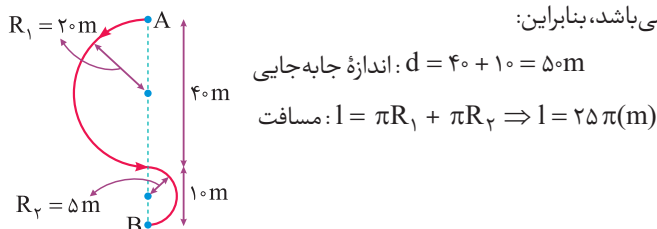
B موقعیت ثانویه در  $(x_2 = +40, y_2 = +30, z_2 = 0)$

بردار جابه‌جایی برابر طول پاره خط AB است و داریم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{40^2 + 30^2 + (-50)^2} = 50\sqrt{2} \text{ m}$$

۱۳۰ طول پاره‌خطی که به صورت مستقیم A را به B وصل می‌کند، برابر با جابه‌جایی دو چرخه سوار است و مجموع طول دو نیم دایره برابر با مسافت طی شده می‌باشد، بنابراین:



اندازه جابه‌جایی:  $d = 40 + 10 = 50 \text{ m}$

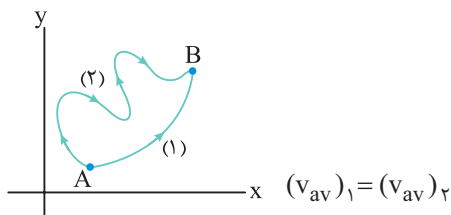
مسافت:  $l = \pi R_1 + \pi R_2 \Rightarrow l = 25\pi \text{ (m)}$

بنابراین نسبت اندازه سرعت متوسط به تندی متوسط برابر است با:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{\frac{d}{\Delta t}}{\frac{l}{\Delta t}} = \frac{d}{l} = \frac{50}{25\pi} = \frac{2}{\pi}$$

۱۳۱ همان طور که می‌دانید، چون زمان هر دو حرکت یکسان است، اندازه

سرعت متوسط به اندازه جابه‌جایی جسم بستگی دارد. چون هر دو مسیر نقطه شروع و پایان یکسانی دارند، اندازه جابه‌جایی و اندازه سرعت متوسط آن‌ها یکسان است.

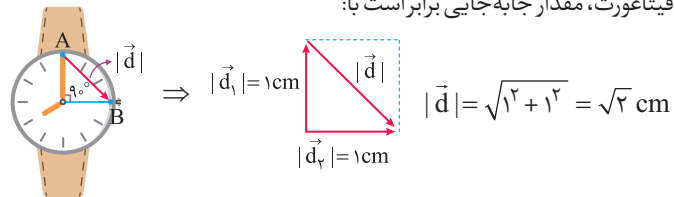


از طرف دیگر در یک بازه زمانی برابر، تندی متوسط به مسافت طی شده بستگی دارد. چون در یک مدت زمان یکسان، مسافت طی شده در مسیر (۲) بیشتر از مسافت طی شده در مسیر (۱) است، پس تندی متوسط در مسیر (۲) بیشتر است.

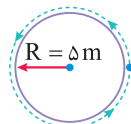
$$(s_{av})_2 > (s_{av})_1$$

۱۳۲ می‌دانیم برای محاسبه اندازه جابه‌جایی، نقطه ابتدای حرکت را به نقطه انتهای حرکت متصل کرده و طول آن پاره خط را اندازه می‌گیریم.

۱۲۵ در مدت سه ساعت از ساعت ۱۲ تا ۳، عقربه دقیقه‌شمار سه دور کامل می‌زند و به سر جای اولیه خود برمی‌گردد، پس جابه‌جایی آن صفر است. عقربه ساعت‌شمار، در هر ۱۲ ساعت یک دور می‌چرخد. بنابراین در طول ۳ ساعت به اندازه  $90^\circ$  (دور  $\frac{1}{4}$ ) چرخیده و از نقطه A به B می‌رود. بنابراین با توجه به رابطه فیثاغورث، مقدار جابه‌جایی برابر است با:



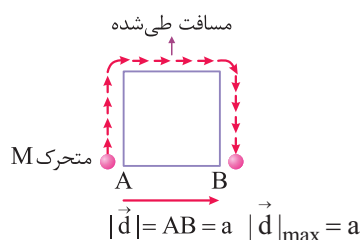
۱۲۶ متحرک پس از ۱۰ دقیقه، ۱۰ بار به طور کامل بر روی دایره چرخیده و مجدداً به نقطه شروع حرکت می‌رسد، بنابراین اندازه جابه‌جایی متحرک در این مدت برابر صفر است. در این حالت مسافت طی شده، ۱۰ برابر محیط دایره است.



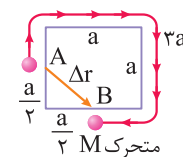
مسافت طی شده:  $l = 10 \times (2\pi R) = 10 \times 2 \times 3.14 \times 5 = 314 \text{ m}$

۱۲۷ متحرک در طول حرکت خود توقف ندارد و در صورتی که مسافت طی شده توسط متحرک ۳a باشد، ثابت می‌شود:

۱ بیشترین جابه‌جایی متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از رأس مربع شروع به حرکت کند و سپس مسافتی برابر ۳a را بپیماید، در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر a است، یعنی برابر طول برداری که مستقیماً نقطه شروع را به نقطه پایان متصل می‌کند.



۲ کمترین جابه‌جایی متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از وسط یکی از اضلاع مربع شروع به حرکت کند. در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$  است.

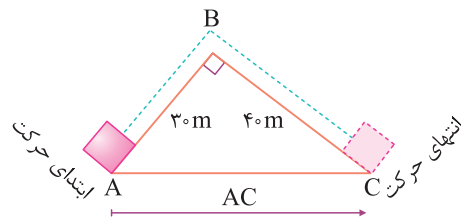


$$\left\{ \begin{aligned} |\vec{d}|_{\min} &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a \\ |\vec{d}|_{\min} &= \frac{a}{2} \text{ (فرضی با ضلع } \frac{a}{2} \text{ قطر مربعی)} \end{aligned} \right.$$

### دقت

در حل این مسئله شما می‌توانید حالات دیگری به غیر از موارد ۱ و ۲ را نیز بررسی کنید، در این مسئله تحلیل جابه‌جایی‌های مختلف متحرک مدنظر طراح بوده است. به سادگی می‌توان نشان داد که در تمام حالت‌ها، جابه‌جایی از a کوچک‌تر (یا مساوی) و از  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$  بزرگ‌تر (یا مساوی) می‌باشد.

با توجه به شکل زیر، اندازه جابه جایی برابر AC بوده و مقدار آن با کمک قضیه فیثاغورث برابر است با:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 30^2 + 40^2$$

$$\xrightarrow{30, 40 \rightarrow 50} AC = 50 \text{ m}$$

اعداد فیثاغورثی هستند.

بنابراین می توان نوشت:

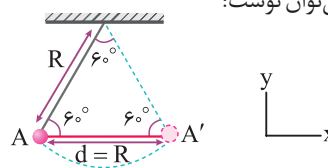
$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه جایی}}{\text{زمان جابه جایی}} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{50}{2} = 25 \text{ m/s}$$

در ادامه برای به دست آوردن تندی متوسط متحرک، باید مسافت طی شده توسط متحرک را به دست آورده و بر زمان حرکت تقسیم کنیم. بدین ترتیب داریم:

$$l = AB + BC = 30 + 40 = 70 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{70}{2} = 35 \text{ m/s}$$

این گلوله وقتی از A تا A' حرکت می کند، مسافتی به اندازه  $\frac{1}{6}$  محیط دایره را طی می کند. از طرفی با توجه به هندسه، طول پاره خط واصل AA' یعنی جابه جایی برابر R است، بنابراین می توان نوشت:

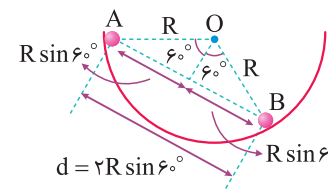


$$|\vec{v}_{av}| = \frac{d}{\Delta t} = \frac{R}{\frac{1}{6} \times 2\pi R} = \frac{3}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{v}_{av}|}{\frac{3}{\pi}} = \frac{3}{\pi} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{1}{2} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

از طرفی باید دقت شود که جابه جایی متحرک در جهت مثبت محور x است، بنابراین  $\vec{v}_{av} = 0.5 \hat{i} (\frac{\text{m}}{\text{s}})$  می باشد.

این گلوله وقتی از نقطه A تا نقطه B حرکت می کند، مسافتی به اندازه  $\frac{1}{3}$  محیط دایره را طی می کند. از طرفی با توجه به شکل زیر، طول پاره خط واصل AB یعنی اندازه جابه جایی برابر  $d = 2R \sin 60^\circ$  است.



$$l = \frac{1}{3} \times 2\pi R = \frac{2}{3} \pi R$$

$$d = 2R \sin 60^\circ = \sqrt{3} R$$

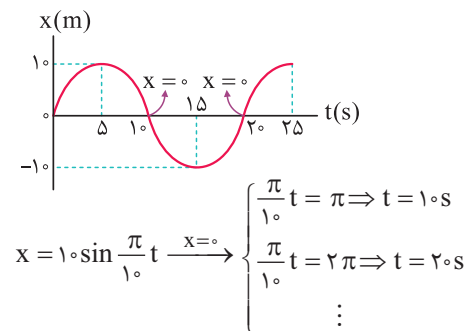
بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{d}{\Delta t}}{\frac{l}{\Delta t}} = \frac{d}{l} = \frac{\sqrt{3} R}{\frac{2}{3} \pi R} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

همان طور که می دانید، اگر متحرکی بر روی یک خط راست، بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازه جابه جایی و مسافت آن یکسان بوده و در نتیجه اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان می شود.

در این سؤال اگر به مسیرهای رسم شده دقت کنید، متوجه می شوید که تنها در نمودار گزینه (۳)، متحرک بر روی یک خط راست حرکت می کند و ممکن است در آن تندی متوسط با سرعت متوسط برابر شود.

معادله مکان داده شده به صورت سینوسی است. برای مشخص کردن جهت بردار مکان در این سؤال، مناسب ترین روش رسم نمودار مکان - زمان است. برای این سؤال، ابتدا محل های برخورد نمودار با محور t را به دست می آوریم:



همان گونه که مشاهده می کنید در بازه زمانی  $10 \text{ s} < t < 20 \text{ s}$  (یعنی ۵ ثانیه سوم و ۵ ثانیه چهارم حرکت)، متحرک در مکان های منفی قرار داشته و بردار مکان جسم در خلاف جهت محور x بوده و گزینه (۳) صحیح است.

برای یافتن لحظاتی که بردار مکان تغییر جهت می دهد، کافی است معادله مکان - زمان مربوط به متحرک را تعیین علامت کنیم:

$$\text{ریشه مضاعف } x = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| t | 0 | 1 | ∞ |
| x | 0 | + | + |

ملاحظه می کنید مکان متحرک در لحظه  $t = 1 \text{ s}$  صفر می شود ولی تغییر علامت نمی دهد و متحرک همواره در سمت مثبت محور x قرار دارد. بنابراین بردار مکان این متحرک در هیچ لحظه ای تغییر جهت نمی دهد.

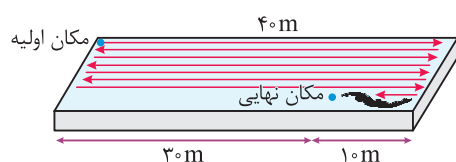
### تذکر

بردار مکان هنگامی تغییر جهت می دهد که متحرک از یک سمت مبدأ مختصات روی محور x، خود را به سمت دیگر آن برساند.

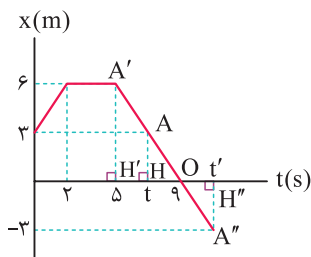
ابتدا عدد  $290$  را به صورت زیر می نویسیم تا مشخص شود شناگر چند بار طول استخر را طی کرده است:

$$290 = 280 + 10 = 7(40) + 10$$

بنابراین شناگر هفت بار طول استخر را طی کرده و  $10 \text{ m}$  دیگر نیز شنا می کند. به شکل زیر دقت کنید:

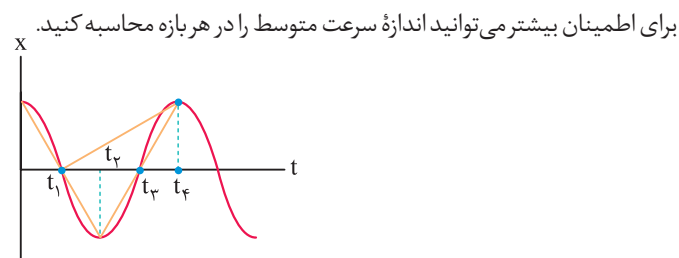


در ادامه با توجه به این که دو مثلث OAH و OA'H' یکسان هستند، مقدار  $t'$  برابر ۱۱s به دست می آید (چرا؟). در پایان می توانیم بگوییم در بازه های زمانی (۰ تا ۲s) و (۷s تا ۱۱s) متحرک در حال دور شدن از مکان اولیه خود می باشد. بنابراین در مجموع متحرک به مدت ۶ ثانیه در حال دور شدن از مکان اولیه اش می باشد.

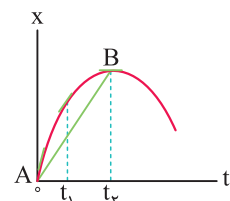


همان طور که می دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، معرف سرعت متوسط در بازه زمانی مورد نظر است. ابتدا مطابق شکل زیر در بازه های زمانی مورد نظر خط واصل را رسم می کنیم.

همان طور که در شکل می بینید، اندازه شیب خط مماس در سه بازه (۰ تا  $t_1$ )، (صفر تا  $t_2$ ) و ( $t_2$  تا  $t_4$ ) یکسان است. اما در بازه ( $t_1$  تا  $t_4$ ) شیب خط مماس و در نتیجه اندازه سرعت متوسط متفاوت است.



مطابق شکل، بین لحظه  $t = 0$  تا لحظه تغییر جهت متحرک (یعنی  $t_2$ )، پاره خطی رسم می کنیم. شیب این پاره خط بیانگر اندازه سرعت متوسط متحرک از لحظه شروع حرکت تا لحظه تغییر جهت است. علاوه بر این در لحظات صفر،  $t_1$  و  $t_2$  نیز مماس هایی بر نمودار رسم می کنیم. شیب این مماس ها معرف تندی متحرک در لحظات مختلف است. همان طور که می بینید، در شروع حرکت شیب خط مماس بیشتر از شیب پاره خط AB است و با گذشت زمان شیب خط مماس برابر شیب خط AB شده و در نزدیکی  $t_2$ ، شیب خط مماس کم تر از شیب خط AB می شود. بنابراین تندی حرکت در ابتدا بیشتر از  $v_{av}$  بوده، سپس برابر  $v_{av}$  شده و در نهایت کم تر از  $v_{av}$  می شود.



به موارد زیر توجه کنید:

طبق رابطه  $s_{av} = \frac{1}{\Delta t}$ ، تندی متوسط به مسافت طی شده توسط متحرک بستگی دارد. در هر بازه زمانی که متحرک توقف کرده باشد، مسافت طی شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت نیز صفر است.

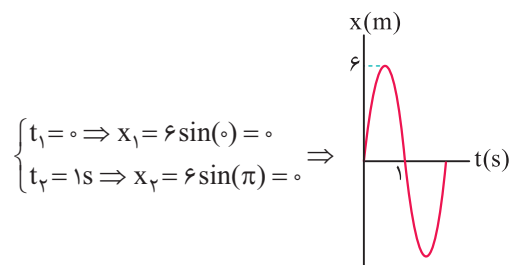
در نمودار رسم شده در دو بازه زمانی  $t_1 = 3s$  تا  $t_2 = 5s$  و  $t_3 = 6s$  تا  $t_4 = 10s$  متحرک ایستاده است.

همان طور که در شکل مشاهده می کنید، در این حالت فاصله مکان نهایی شناگر تا مکان اولیه آن برابر ۳m می شود. بنابراین جابه جایی متحرک برابر  $3m = 0.3km$  بوده و اندازه سرعت متوسط شناگر در مدت زمان ۵ ساعت برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه جایی}}{\text{زمان}} = \frac{0.3km}{5h} = \frac{3}{50} km/h = 0.06 km/h$$

بهترین روش برای حل این گونه مسائل، رسم نمودار مکان - زمان حرکت است:

همان طور که در نمودار رسم شده مشاهده می کنید، در بازه زمانی  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 1s$  اندازه جابه جایی متحرک برابر صفر و اندازه مسافت طی شده توسط آن برابر ۱۲m می باشد (چرا؟)، بنابراین داریم:



$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\Delta d|}{\Delta t} = 0 \text{ و } s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{12}{1} = 12 m/s$$

ابتدا به جدول ارائه شده در صورت سؤال توجه کنید:

| مکان آغازین (m) | مکان پایانی (m) | تندی متوسط ( $\frac{m}{s}$ ) |         |
|-----------------|-----------------|------------------------------|---------|
| $-2\vec{i}$     | $-8\vec{i}$     | ۱/۵                          | متحرک A |
| $-2\vec{i}$     | $+4\vec{i}$     | ۲                            | متحرک B |

با توجه به این جدول داریم:

$$(\vec{v}_{av})_A = \frac{\vec{d}_A}{\Delta t_A} = \frac{-8\vec{i} - (-2\vec{i})}{4} = -1.5\vec{i}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق صورت سؤال}} |(\vec{v}_{av})_A| = (s_{av})_A = 1.5 m/s$$

$$(\vec{v}_{av})_B = \frac{\vec{d}_B}{\Delta t_B} = \frac{+4\vec{i} - (-2\vec{i})}{4} = 1.5\vec{i}$$

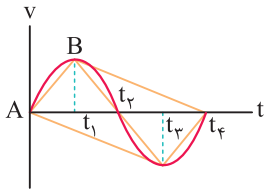
$$\xrightarrow{\text{طبق صورت سؤال}} |(\vec{v}_{av})_B| < (s_{av})_A = 2 m/s$$

از طرفی می دانیم برابر بودن تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط، نشان دهنده آن است که متحرک در طول حرکت، تغییر جهت نمی دهد. این موضوع یعنی متحرک A در طول حرکتش، تغییر جهت نمی دهد و متحرک B در طول حرکتش، تغییر جهت می دهد.

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا باید زمانی را که متحرک برای دومین بار به مکان  $x = 3m$  می رسد، به صورت زیر به دست آوریم:

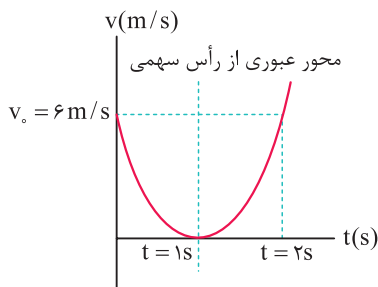
$$\Delta_{OAH} \sim \Delta_{OA'H'} \Rightarrow \frac{AH}{9-t} = \frac{A'H'}{4} \Rightarrow \frac{3}{9-t} = \frac{6}{4} \Rightarrow t = 7s$$

۱۴۸ همان طور که می دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان بیانگر شتاب متوسط در بازه زمانی موردنظر است. ابتدا در هریک از بازه های زمانی موردنظر، خط واصل را رسم می کنیم (همه خطوط را در یک شکل ترسیم کرده ایم).



در صورت سؤال ذکر شده است که در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  شتاب متحرک برابر  $a$  است و ما به دنبال بازه ای می گردیم که شتاب متحرک  $-a$  باشد. بنابراین باید اندازه شیب خط موردنظر برابر اندازه شیب خط  $AB$  ولی با علامت منفی باشد. اگر به نمودار دقت کنید، متوجه می شوید که تنها در بازه  $t_1$  تا  $t_3$  این اتفاق رخ می دهد.

۱۴۹ همان طور که می دانید، سهمی نسبت به محور عبوری از رأس آن، دارای تقارن است. در دو ثانیه اول حرکت که یک بازه متقارن نسبت به محور عبوری از رأس سهمی است، سرعت در ابتدا و انتهای بازه زمانی برابر بوده و در نتیجه شتاب متوسط در این بازه زمانی برابر صفر است.



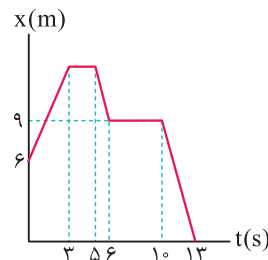
$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 6 \frac{m}{s} \\ t_2 = 2s \rightarrow v_2 = 6 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 0$$

**دقت** در این سؤال، به طور کلی در بازه زمانی  $t_1$  و  $t_2$ ، به شرطی که  $t = 1s$  در وسط آن بازه قرار گیرد ( $\frac{t_1 + t_2}{2} = 1s$ )، شتاب متوسط برابر صفر می شود. به عنوان مثال از  $t_1 = 0.75s$  تا  $t_2 = 1.25s$  نیز شتاب متوسط برابر صفر است.

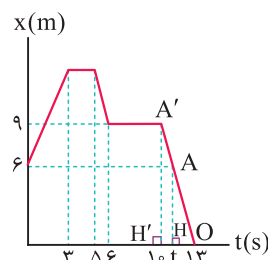
۱۵۰ اگر متحرک از نقطه  $(x_A, y_A, z_A)$  به نقطه  $(x_B, y_B, z_B)$  منتقل

شود، جابه جایی آن برابر  $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$  است. فرض کنید این متحرک از مبدأ  $(0, 0, 0)$  شروع به حرکت کرده است. اگر این متحرک ۱۰ متر از سطح زمین به سمت بالا حرکت کند مؤلفه  $y$  از صفر به ۱۰m تبدیل می شود، در ادامه اگر ۶m به سمت شمال برود، مؤلفه  $z$  از صفر به ۶m - و در نهایت اگر ۸ متر به غرب برود مؤلفه  $x$  از صفر به ۸m - تبدیل می شود، بنابراین مختصات B برابر  $(-8, 10, -6)$  است.

چون در صورت سؤال طول بزرگ ترین بازه زمانی موردنظر است، بنابراین بازه موردنظر  $t_3 = 6s$  تا  $t_4 = 10s$  می باشد که به مدت ۴s متحرک توقف داشته است.



۱۴۵ برای صفر شدن سرعت متوسط، باید جابه جایی متحرک صفر شود. با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، بزرگ ترین بازه زمانی که سرعت متوسط صفر می شود، مربوط به لحظه شروع حرکت تا لحظه ای است که متحرک دوباره به نقطه  $x = 6m$  می رسد. برای به دست آوردن لحظه موردنظر، به صورت زیر عمل می کنیم:

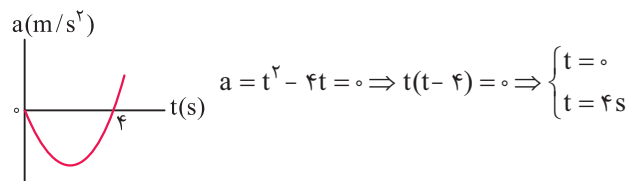


$$\Delta OAH \sim \Delta OA'H' \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{OH}{OH'} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{13 - t}{3} \Rightarrow t = 11s$$

بنابراین بزرگ ترین بازه زمانی که اندازه سرعت متوسط صفر می شود، برابر ۱۱ ثانیه است و با توجه به پاسخ سؤال قبل، بزرگ ترین بازه زمانی که تندی متوسط حرکت صفر می شود برابر ۴ ثانیه است و نسبت آن ها  $\frac{11}{4}$  می شود.

۱۴۶ عبارت (ج) هرگز نمی تواند رخ دهد. طبق رابطه  $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ، اگر سرعت جسمی ثابت باشد، تغییرات آن صفر بوده و شتاب حرکت صفر می شود. از سوی دیگر سایر عبارت های مطرح شده می توانند رخ دهند. برای درک بهتر سعی کنید برای هریک مثالی را پیدا کنید.

۱۴۷ ابتدا ریشه های سهمی موردنظر را به دست می آوریم و سپس نمودار شتاب - زمان را رسم می کنیم:



دقت کنید که سهمی موردنظر از مبدأ شروع می شود و با توجه به این که ضریب  $t^2$  مثبت است، سهمی رو به بالا می باشد. همان طور که در نمودار مشاهده می کنید در لحظه  $t = 4s$ ، اندازه شتاب حرکت صفر شده و علامت شتاب تغییر می کند، بنابراین در این لحظه شتاب تغییر جهت می دهد. از طرفی با توجه به رابطه  $F = ma$ ، می دانیم که نیروی وارد بر متحرک همواره هم جهت با شتاب بوده و در نتیجه نیروی وارد بر متحرک نیز در پایان ثانیه چهارم تغییر جهت می دهد.

## دقت

نحوه به دست آوردن مختصات A:

$$x = -t^2 + 6t \xrightarrow{\text{رأس سهمی}} t_A = -\frac{6}{2 \times (-1)} = 3s$$

(مکانی که متحرک در آن جا می ایستد)  $x_A = -(3)^2 + 6 \times 3 = 9m$ 

۱۵۴ متحرک در لحظه  $t = 2s$  تغییر جهت می دهد و از شروع حرکت تا لحظه  $t = 2s$  مسافت  $6m$  را طی می کند و تندی متوسط آن در این بازه زمانی به صورت زیر به دست می آید:

$$s_{av_1} = \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{6}{2} = 3m/s$$

در ادامه مسیر، متحرک از نقطه  $x = 0$  به  $x = -9m$  می رود و می توانیم بگوییم متحرک در کل حرکت، مسافت  $15m$  را در مدت  $5s$  طی کرده است ( $6 + 9 = 15m$ )، بنابراین تندی متوسط آن در کل زمان حرکتش برابر است با:

$$s_{av_2} = \frac{l_2}{\Delta t_2} = \frac{15}{5} = 3m/s$$



$$\frac{s_{av_1}}{s_{av_2}} = \frac{3}{3} = 1$$

و در نهایت داریم:

۱۵۵ مطابق تعریف شتاب متوسط  $(a_{av} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t})$ ، کافی است سرعت

در ابتدا و انتهای این بازه زمانی را داشته باشیم:

$$v = 0.3 \cos(60\pi t + \frac{\pi}{3})$$

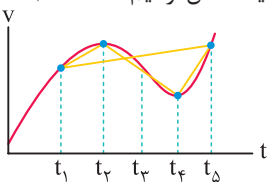
$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0.3 \cos(\frac{\pi}{3}) = 0.15 m/s \\ t_2 = \frac{1}{6} s \rightarrow v_2 = 0.3 \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -0.15 m/s \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0.3 \cos(\frac{\pi}{3}) = 0.15 m/s \\ t_2 = \frac{1}{6} s \rightarrow v_2 = 0.3 \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -0.15 m/s \end{cases}$$

$$|a_{av}| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{|-0.15 - (0.15)|}{\frac{1}{6}} = \frac{0.3}{\frac{1}{6}} = 1.8 m/s^2$$

۱۵۶ همان طور که می دانیم، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار

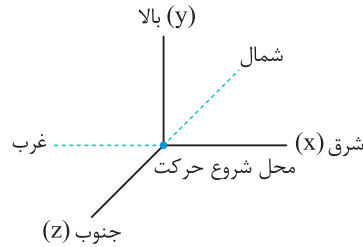
سرعت - زمان، شتاب متوسط در آن بازه زمانی را نشان می دهد. در این سؤال شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان از  $(t_1 \text{ تا } t_2)$ ،  $(t_4 \text{ تا } t_5)$  و  $(t_1 \text{ تا } t_5)$  مثبت بوده و تنها در بازه زمانی  $(t_2 \text{ تا } t_4)$  منفی است. بنابراین در بازه  $(t_1 \text{ تا } t_2)$ ، شتاب متوسط با سایر بازه ها هم جهت نیست (برای راحت تر شدن مقایسه، همه خط های واصل مورد نظر، در یک شکل ترسیم شده است).



۱۵۷ در صورتی که یک حرکت در چند مرحله انجام شود، سرعت متوسط

متحرک در کل مسیر حرکت برابر است با:  $v_{av \text{ کل}} = \frac{\text{جابه جایی کل}}{\text{کل زمان انجام جابه جایی}}$

$$\vec{v}_{av \text{ کل}} = \frac{d}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \vec{i} = \frac{-50}{30 + 20} \vec{i} = -10 \vec{i} \text{ (SI در)}$$

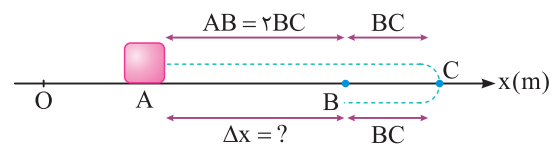


$$AB = \sqrt{(-8)^2 + 10^2 + (-6)^2} = \sqrt{200}$$

$$\Rightarrow AB = 10\sqrt{2} \approx 10 \times 1.414 = 14.14m$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه جایی}}{\text{زمان}} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{14}{10} = 1.4 m/s$$

۱۵۱ باتوجه به شکل، در مقایسه تندی متوسط و سرعت متوسط متحرک داریم:



طول برگشت طول رفت

$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2BC + BC = 3BC \\ \text{جابه جایی متحرک} = AB = 2BC \end{cases}$$

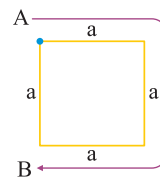
$$\Rightarrow \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{جابه جایی}} = \frac{3BC}{2BC} = 1.5 \Rightarrow \frac{\text{تندی متوسط}}{\text{اندازه سرعت متوسط}} = 1.5$$

## تذکر

جابه جایی برداری است که نقطه شروع (A) را مستقیماً به نقطه پایان (B) متصل کند، در صورتی که برای محاسبه مسافت طی شده باید طول مسیر رفت و برگشت را با یک دیگر جمع کرد.

۱۵۲ همان طور که در پاسخ سؤال (۱۲۷) مشاهده کردید، در این سؤال

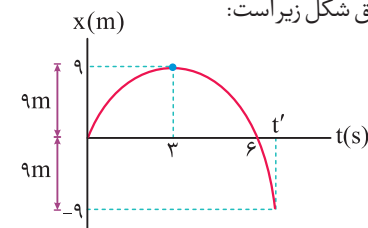
بیشترین جابه جایی زمانی روی می دهد که مطابق شکل زیر، متحرک از نقطه A تا B جابه جا شده باشد. در این حالت داریم:



$$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}} = \frac{|\vec{d}|}{l} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

۱۵۳ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا نمودار  $(x - t)$  را برای حرکت

رسم می کنیم. با توجه به نمودار می توان گفت هنگامی که فاصله متحرک از مبدأ برابر ۹ متر است، متحرک می تواند در ۹ متری سمت چپ ( $x = -9m$ ) یا راست مبدأ ( $x = +9m$ ) باشد. بنابراین قدم مطلق مکان متحرک  $|x|$  برابر ۹ است، نمودار مکان - زمان این متحرک مطابق شکل زیر است:



همان گونه که مشاهده می کنید تنها در دو زمان ۳s و  $t'$  فاصله متحرک از مبدأ برابر ۹ متر می شود (نیازی به محاسبه  $t'$  نمی باشد).