

مقدمه مولف

به قول زنده یاد قیصر امین پور عزیز:

«ما در عصر احتمال به سر می‌بریم

در عصر شک و شاید

در عصر پیش‌بینی وضع هوا

از هر طرف که باد بیاید ...

در عصر قاطعیت تردید

عصر جدید

عصری که هیچ اصلی

جز اصل احتمال، یقینی نیست»

ردپای ریاضیات در بسیاری از علوم طبیعی، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و علوم اجتماعی به صورت واضح و عمیق قابل مشاهده است و نشانگر ضرورت این علم است.

بنابراین شما دانش‌آموزان فهیم و اندیشمند رشته انسانی باید این اصل را بپذیرید که یکی از ابزارهای اساسی علوم انسانی به‌خصوص در سطح کلان علمی، جایی که باید به آن برسید تا به جایگاهی مطلوب دست یابید، آشنایی و تسلط به دانش ریاضی و آمار است. در واقع آمار، مجموعه‌ای از مفاهیم و روش‌هاست که در هر زمینه پژوهشی، برای گردآوری اطلاعات مربوط به آن و انجام نتیجه‌گیری، در شرایطی که حتمی نیست و امکان تغییر وجود دارد به کار می‌رود. علاوه بر این روش‌هایی وجود دارد که امکان اتخاذ تصمیمات معقول در مواجهه با عدم قطعیت را فراهم می‌کند.

به عنوان مثال در بسیاری از تحقیقات علمی و پژوهشی یا در تحلیل‌های ورزشی و همچنین طراحی آزمایش‌ها و در اقتصاد برای تحلیل روند بازار و بورس و پیش‌بینی آن و دیگر رشته‌ها در زمینه علوم انسانی جداول کاربردی آماری به وضوح مورد استفاده قرار می‌گیرد و بر صحت و اعتبار روند کار می‌افزاید.

من نیز بسیار خرسندم که گاهی هرچند کوچک در جهت آشنایی با کاربرد آمار و احتمال برای شما عزیزان در رشته انسانی بردارم. کتاب حاضر به عنوان منبعی از سؤالات امتحان نهایی با نگاهی ریزبینانه بر کتاب درسی در اختیار شما عزیزان قرار گرفته است که پیشنهاد می‌شود که بعد از تسلط کامل بر مباحث کتاب درسی و درس‌نامه‌های این کتاب به سراغ سؤالات رفته و آمادگی خود را با حل نمونه سؤالات بیشتر و بیشتر کنید.

در پایان از تمامی عزیزانی که بنده را در تألیف این کتاب یاری کردند، مخصوصاً آقای مهندس احمد علی‌نژاد که در تمام مراحل تألیف این کتاب بنده را یاری کردند و تمام عزیزانی که نام برخی از این بزرگواران را در شناسنامه کتاب می‌توانید مشاهده کنید کمال تشکر را دارم.

همیشه سبز باشید.

فرشاد پورالیاس

فهرست مطالب

درسنامه
+ پاسخ

سؤال

فصل اول: معادله درجه دوم

- ۳۶ ۵ درس اول: معادله و مسائل توصیفی
- ۳۸ ۷ درس دوم - قسمت اول: حل معادله درجه دوم به روش ریشه گیری و تجزیه و مربع کامل
- ۴۱ ۸ درس دوم - قسمت دوم: حل معادله درجه دوم به روش کلی و کاربردهای آن
- ۴۶ ۱۰ درس سوم: معادله های شامل عبارت های گویا

فصل دوم: تابع

- ۵۰ ۱۲ درس اول: مفهوم تابع
- ۵۴ ۱۵ درس دوم: ضابطه جبری تابع
- ۵۷ ۱۷ درس سوم: نمودار تابع خطی
- ۶۲ ۱۹ درس چهارم: نمودار تابع درجه ۲

فصل سوم: کاربردهای آماری

- ۶۹ ۲۲ درس اول: گردآوری داده ها
- ۷۲ ۲۴ درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
- ۷۴ ۲۷ درس سوم: معیارهای پراکندگی

فصل چهارم: نمایش داده ها

- ۷۸ ۳۰ درس اول: نمودارهای یک متغیره
- ۸۱ ۳۳ درس دوم: نمودارهای چندمتغیره

ضمیمه: امتحانات شبیه ساز نهایی

- ۹۳ ۸۵ امتحان شماره ۱: نوبت اول (میان سال)
- ۹۴ ۸۶ امتحان شماره ۲: نوبت اول (میان سال)
- ۹۵ ۸۷ امتحان شماره ۳: نوبت دوم (پایان سال)
- ۹۶ ۸۸ امتحان شماره ۴: نوبت دوم (پایان سال)
- ۹۷ ۹۰ امتحان شماره ۵: نوبت دوم (پایان سال)
- ۹۸ ۹۱ امتحان شماره ۶: نوبت دوم (پایان سال)

معادله درجه دوم

فصل ۱

صفحه ۱۸۱ کتاب درسی

معادله و مسائل توصیفی

درس ۱

درس نامه ۱ را در صفحه ۳۶ ببینید.

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

- ۱- اگر $a \times b = 0$ باشد، در این صورت نتیجه می‌گیریم یا
- ۲- هر معادله به صورت را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می‌نامند.
- ۳- تنها جواب معادله درجه اول $ax + b = 0$ به صورت است. $x = \frac{m}{n}$ جواب معادله درجه اول است.
- ۵- به مقداری که به ازای آن یک معادله به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود یا گفته می‌شود.
- ۶- محیط مربعی که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد، برابر است.

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$6x - 2 = 4x + 8 \quad -۸$$

$$5x - 3 = 7 \quad -۷$$

$$3(x + 1) = 2x - 1 \quad -۱۰$$

$$4x - 1 = 11 - 2x \quad -۹$$

$$(x - 3)(x + 1) = x^2 + x + 3 \quad -۱۲$$

$$4(x - 1) + 2 = 2(2 - x) \quad -۱۱$$

$$\frac{1}{2}x + 4 = 7 - \frac{x}{4} \quad -۱۴$$

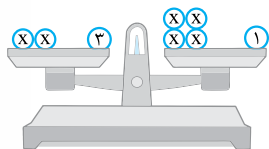
$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{x-1}{x-4} \quad -۱۳$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{2x-1}{6} \quad -۱۶$$

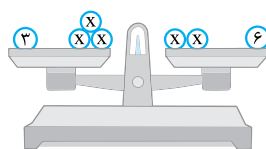
$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 25 \quad -۱۵$$

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{x+2}{4} \quad -۱۷$$

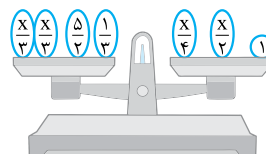
معادله مربوط به هر کدام از ترازوها را نوشته و آن را حل کنید.



-۱۹



-۱۸



-۲۰

۲۱- اگر $x = 4$ ، جواب معادله $\frac{x-1}{3} - a = \frac{1-x}{3} - 3$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

عبارت‌های کلامی را به صورت یک معادله نوشته و پاسخ آن را به دست آورید.

۲۲- دو برابر عددی به علاوه سه مساوی سه برابر آن عدد منهای ۵ است.

۲۳- اگر به چهار برابر عددی ۵ واحد اضافه شود، حاصل از سه برابر آن عدد یک واحد بیشتر می‌شود.

۲۴- مجذور عددی مساوی چهار برابر همان عدد است. -۲۵ حاصل جمع مربع عددی با ۱۱ مساوی ۲۵ است.

۲۶- مجموع چهار عدد طبیعی متوالی برابر ۷۴ است. کوچک‌ترین عدد را مشخص کنید.

۲۷- مجموع سه عدد فرد متوالی برابر ۶۹ است. بزرگ‌ترین عدد را مشخص کنید.

۲۸- مجموع چهار عدد صحیح زوج متوالی برابر ۶۰- است. کوچک‌ترین عدد را مشخص کنید.

۲۹- مجموع سه مضرب متوالی عدد ۳، برابر ۱۰۸ است. عدد وسطی را مشخص کنید.

۳۰- ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی جملگی صد می‌شویم.

۳۱- ما و نصف ما و ثلث ما و نصفه‌ای از ثلث ما، گر تو هم با ما شوی جملگی ۳۷ می‌شویم.

۳۲- محیط مربعی که قطر آن برابر $6\sqrt{2}$ است را به دست آورید.

۳۳- محیط دایره‌ای برابر 20π است. مساحت این دایره را به دست آورید.

۳۴- $\frac{3}{5}$ عددی از $\frac{1}{4}$ عدد دیگر ۱۶ واحد بیشتر است. اگر مجموع دو عدد برابر ۱۴۰ باشد، این دو عدد را مشخص کنید.

۳۵- طول مستطیلی از ۳ برابر عرض آن ۴ واحد کمتر است. اگر محیط مستطیل برابر ۶۴ باشد، در این صورت مساحت مستطیل را به دست آورید.

۳۶- طول ضلع دوم مثلثی از دو برابر ضلع اول یک متر کمتر و ضلع سوم از ثلث ضلع اول $\frac{1}{5}$ متر بیشتر است. اگر محیط این مثلث $\frac{60}{5}$ باشد، در این صورت اضلاع این مثلث را مشخص کنید.

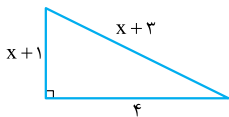
۳۷- تویی از بالای ساختمانی رها می‌شود. این توپ بعد از هر برخورد به زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی‌اش بالا می‌رود. اگر این توپ از لحظه رهاشدن تا سومین برخورد ۶۰ متر جابه‌جا شده باشد، ارتفاع ساختمان را به دست آورید.

۳۸- شخصی تعدادی سکه ۵۰ تومانی و ۱۰۰ تومانی دارد. تعداد سکه‌های ۱۰۰ تومانی او از دو برابر تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی‌اش سه‌تا کمتر است. اگر مجموع پول‌های او ۱۷۰۰ تومان باشد، تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی و ۱۰۰ تومانی این شخص را به دست آورید.

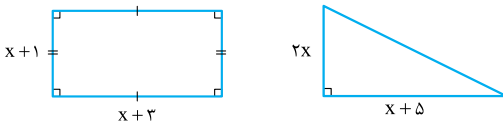
۳۹- نیما از پسرعمویش سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسرعموی نیما چند سال دارد؟

۴۰- در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن‌ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش و ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیرعامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه $\frac{55}{5}$ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

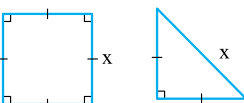
۴۱- مقدار x را با توجه به شکل مقابل به دست آورید.



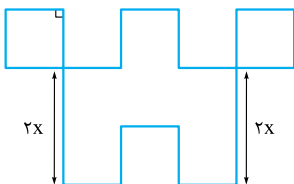
۴۲- اگر مساحت دو شکل مقابل با هم برابر باشند، مقدار x را به دست آورید.



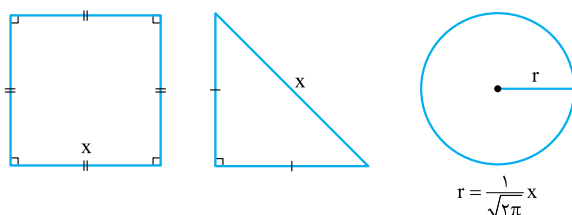
۴۳- اگر مجموع مساحت‌های دو شکل مقابل برابر ۱۲۵ باشد، در این صورت مقدار x را به دست آورید.



۴۴- در شکل مقابل طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.



۴۵- اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

قسمت اول: حل معادله درجه دوم به روش ریشه گیری و تجزیه و مربع کامل

درس ۲

درس نامه ۲ - قسمت اول را در صفحه ۳۸ ببینید.

■ جاهای خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.

- ۴۶- در یک معادله درجه دوم، اگر دو ریشه با هم برابر باشند می گوئیم معادله ریشه دارد.
- ۴۷- اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مقدار $c = 0$ باشد، بهتر است برای حل معادله از روش استفاده کنیم.
- ۴۸- در معادله $(x-1)^2 = k$ ، اگر k برابر باشد، در این صورت معادله ریشه مضاعف دارد.
- ۴۹- $x = -1$ ریشه مضاعف معادله درجه دوم است.
- ۵۰- در معادله $(x-1)^2 = k$ ، اگر k عددی باشد، در این صورت معادله دارای دو ریشه حقیقی است.
- ۵۱- در معادله $(x-1)^2 = k$ ، اگر k عددی باشد، در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد.
- طرف دوم اتحاد های زیر را بنویسید.

$$-52 \quad (2x + y)^2 \quad -53 \quad \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)^2$$

$$-54 \quad (2\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 \quad -55 \quad (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$$

$$-56 \quad (-2a - 3b)(2a - 3b) \quad -57 \quad (a - 2)(a + 3)$$

$$-58 \quad (3x - 1)(3x + 8)$$

■ تجزیه کنید.

$$-59 \quad x^2 + 5x + 6 = \quad -60 \quad x^4 - x^2 - 12 =$$

$$-61 \quad a^5 - 81a = \quad -62 \quad 2x^2 + 8x^2 + 8x =$$

$$-63 \quad (2a + 1)^2 - (a - 2)^2 = \quad -64 \quad 9x^2 - (x + 2)^2 =$$

■ معادله های زیر را به روش ریشه گیری حل کنید.

$$-65 \quad 2x^2 - 50 = 0 \quad -66 \quad (x - 1)^2 = 0$$

$$-67 \quad (x + 2)^2 = 16 \quad -68 \quad (x + 1)^2 + 5 = 0$$

$$-69 \quad x = \frac{25}{x}$$

■ معادله های زیر را به روش تجزیه و ساده کردن عبارت ها، حل کنید.

$$-70 \quad \frac{x^2}{3} = x \quad -71 \quad x(x + 1) + x = 0$$

$$-72 \quad 3x^2 - 12 = 0 \quad -73 \quad x^2 + 10x + 25 = 0$$

$$-74 \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad -75 \quad (x + 1)^2 + 3(x + 1) - 4 = 0$$

$$-76 \quad x^2 - 5x = 0 \quad -77 \quad 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

$$-78 \quad x^3 - 4x^2 = 0 \quad -79 \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$-80 \quad 4x^2 + 4x^2 - 3x = 0 \quad -81 \quad x^4 + x^2 - 6x^2 = 0$$

$$-82 \quad (x - 1)^2 = (x + 1)^2 \quad -83 \quad 4x^2 - (2 - x)^2 = 0$$

$$-84 \quad (2a + 1)^2 - (a - 2)^2 = 0 \quad -85 \quad x^4 - 2x^2 = 0$$

■ معادله های زیر را به کمک مربع کامل کردن حل کنید.

$$-86 \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \quad -87 \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$-88 \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad -89 \quad x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{2}{9}$$

$$2x^2 - 6x - 1 = 0 \quad -91$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \quad -90$$

-93 معادله درجه دوم بنویسید که $x = 3$ و $x = -4$ جوابهای آن باشد.

$$x^2 - 6x = -11 \quad -92$$

-94 معادله درجه دوم بنویسید که $x = -2$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

-95 با توجه به معادله $k - 3 = (x - 1)^2$ به سؤالات پاسخ دهید.

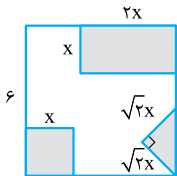
مقادیر k را طوری تعیین کنید که معادله دو ریشه حقیقی داشته باشد.

مقادیر k را طوری تعیین کنید که معادله یک ریشه مضاعف داشته باشد.

مقادیر k را طوری تعیین کنید که معادله دارای ریشه حقیقی نباشد.

-96 از مربعی به ضلع 6 cm سه شکل روبه رو بریده شده است. مساحت باقی مانده 24 cm^2 است. طول ضلع مربع کوچک

بریده شده چقدر است؟



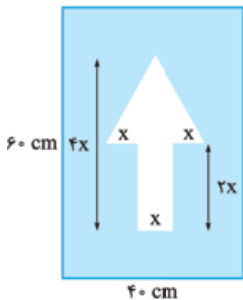
-97 برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برجسبهای آبی و سفید استفاده می شود. هزینه 1 cm^2 برجسب سفید

۳۰ تومان و هزینه 1 cm^2 برجسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینه برجسبهای سفید و آبی ۲۷۰۰۰ تومان شده است.

اندازه x چقدر است؟

اگر در این تابلوی راهنمایی، علاوه بر برجسب سفید و آبی از خطوط برجسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm

آن ۱۰۰ تومان است، هزینه این تابلو ۳۴۸۰۰ تومان می شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟



صفحه ۳۳ تا ۳۴ کتاب درسی

قسمت دوم: حل معادله درجه دوم به روش کلی و کاربردهای آن

درس ۲

درسنامه ۲ - قسمت دوم را در صفحه ۴۱ ببینید.

■ جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید.

-98 مبین معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت است.

-99 اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مقدار Δ مثبت باشد، در این صورت معادله دارای دو ریشه و است.

-۱۰۰ اگر $\Delta = 0$ باشد، در این صورت معادله درجه دوم دارای ریشه است.

-۱۰۱ اگر مقدار Δ برابر باشد، در این صورت معادله درجه دوم دارای ریشه مضاعف است.

-۱۰۲ اگر در معادله درجه دوم مقدار Δ باشد، در این صورت معادله جواب حقیقی ندارد.

-۱۰۳ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ریشهها برابر و حاصل ضرب ریشهها برابر است.

-۱۰۴ معادله درجه دومی که ریشههای آن برابر a و b باشد، به صورت است.

-۱۰۵ معادله درجه دومی که دو ریشه -1 و $+2$ دارد به صورت است.

-۱۰۶ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + b + c = 0$ باشد، ریشههای معادله برابر و است.

-۱۰۷ در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + c = b$ باشد، ریشههای معادله برابر و است.

-۱۰۸ میزانی از تولید که در آن هزینهها با میزان درآمد برابر می شود نام دارد.

-۱۰۹ اگر $C(x)$ هزینه تولید، $P(x)$ سود و $R(x)$ درآمد حاصل از فروش x کالا باشد، رابطه بین آنها برقرار است.

■ معادلههای زیر را با روش کلی «حل معادله درجه دوم» حل کنید.

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \quad -111$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad -110$$

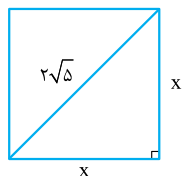
پاسخ سوالات

$$b = 0, a = 0 \quad 1. \quad ax + b = 0 \quad 2.$$

$$x = -\frac{b}{a} \quad 3. \quad nx - m = 0 \quad 4.$$

5. جواب معادله - ریشه معادله

6. $4\sqrt{10}$ ؛ زیرا به کمک رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + x^2 = (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow 2x^2 = 20$$

$$\Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow 4 \times \sqrt{10} = 4\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

$$5x - 3 = 7 \Rightarrow 5x = 7 + 3 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2 \quad 7.$$

8.

$$6x - 2 = 4x + 8 \Rightarrow 6x - 4x = 8 + 2 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2} = 5$$

$$4x - 1 = 11 - 2x \Rightarrow 4x + 2x = 11 + 1 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \quad 9.$$

$$3(x+1) = 2x - 1 \Rightarrow 3x + 3 = 2x - 1 \quad 10.$$

$$\Rightarrow 3x - 2x = -1 - 3 \Rightarrow x = -4$$

$$4(x-1) + 2 = 2(2-x) \Rightarrow 4x - 4 + 2 = 4 - 2x \quad 11.$$

$$\Rightarrow 4x - 2 = 4 - 2x \Rightarrow 4x + 2x = 4 + 2 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$$

$$(x-3)(x+1) = x^2 + x + 3 \quad 12.$$

$$\xrightarrow[\text{جمله مشترک}]{\text{اتحاد}} x^2 - 2x - 3 = x^2 + x + 3 \Rightarrow -2x - 3 = x + 3$$

$$\Rightarrow -2x - x = 3 + 3 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2$$

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{x-1}{x-4} \quad 13.$$

$$\xrightarrow[x \neq 3, x \neq 4]{\text{طرفین وسطین}} (x-2)(x-4) = (x-1)(x-3)$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد جمله مشترک}]{\text{طرفین مشترک}} x^2 - 6x + 8 = x^2 - 4x + 3$$

$$\Rightarrow -6x + 4x = 3 - 8 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

14. طرفین معادله را در 4 (ک م م مخرج ها) ضرب می کنیم:

$$4\left(\frac{1}{2}x + 4 = 7 - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow 2x + 16 = 28 - x$$

$$\Rightarrow 2x + x = 28 - 16 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

15. طرفین معادله را در 12 ضرب می کنیم:

$$12\left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 25\right) \Rightarrow 12x + 6x + 4x + 3x = 300$$

$$\Rightarrow 25x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{25} = 12$$

16. طرفین معادله را در 6 ضرب می کنیم:

$$6\left(\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{2x-1}{6}\right) \Rightarrow 3x - 2(x-1) = 2x - 1$$

$$\Rightarrow 3x - 2x + 2 = 2x - 1 \Rightarrow x + 2 = 2x - 1$$

$$\Rightarrow x - 2x = -1 - 2 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3$$

17. طرفین معادله را در 12 ضرب می کنیم:

$$12\left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{x+2}{4}\right) \Rightarrow 6(x-1) + 4(x+1) = 3(x+2)$$

$$\Rightarrow 6x - 6 + 4x + 4 = 3x + 6 \Rightarrow 10x - 2 = 3x + 6$$

$$\Rightarrow 10x - 3x = 6 + 2 \Rightarrow 7x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{7}$$

$$3x + 3 = 2x + 6 \Rightarrow 3x - 2x = 6 - 3 \Rightarrow x = 3 \quad 18.$$

$$2x + 3 = 4x + 1 \Rightarrow 2x - 4x = 1 - 3 \quad 19.$$

$$\Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

معادله و مسائل توصیفی

فصل اول
درس ۱

صفحه ۱۰ تا ۱۸ کتاب درسی

معادله درجه اول

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند.

معادله درجه اول $ax + b = 0$ فقط یک جواب به صورت $x = -\frac{b}{a}$ دارد.

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

مثال معادله مقابل را حل کنید.

$$5x - 3 = 2x + 6$$

$$5x - 3 = 2x + 6 \Rightarrow 5x - 2x = 6 + 3 \Rightarrow 3x = 9 \quad \text{پاسخ:}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

نکته برای حل معادله هایی که ضرایب متغیرهای آن به صورت کسر هستند، می توانیم کل معادله را در ک.م.م مخرج کسرها ضرب کنیم.

مثال معادله روبه رو را حل کنید.

$$\frac{3x-1}{3} + \frac{x+3}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{12}$$

پاسخ: طرفین معادله را در ک.م.م مخرج کسرها یعنی ۱۲ ضرب می کنیم:

$$12\left(\frac{3x-1}{3} + \frac{x+3}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{12}\right)$$

$$\Rightarrow 4(3x-1) + 6(x+3) = 3x - 1 \Rightarrow 12x - 4 + 6x + 18 = 3x - 1$$

$$\Rightarrow 18x + 14 = 3x - 1 \Rightarrow 18x - 3x = -1 - 14$$

$$\Rightarrow 15x = -15 \Rightarrow x = -1$$

مثال نصف ثلث عددی $\frac{2}{3}$ واحد بیشتر از ربع همان عدد است. آن عدد را مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا عبارت کلامی را به صورت یک معادله ریاضی می نویسیم:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{6}x = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}$$

با ضرب کردن طرفین معادله در ۱۲ داریم:

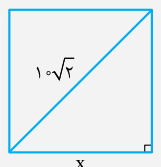
$$12\left(\frac{1}{6}x = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow 2x = 3x + 8$$

$$\Rightarrow 2x - 3x = 8 \Rightarrow -x = 8 \Rightarrow x = -8$$

معادله درجه دوم

هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است، معادله درجه دوم می نامند. در این معادله a ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت است.

مثال محیط مربعی که قطر آن $10\sqrt{2}$ است را به دست آورید.



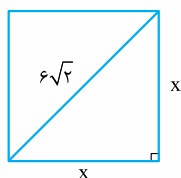
$$x^2 + x^2 = (10\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = \frac{200}{2} = 100$$

$$\Rightarrow x = 10$$

پاسخ این معادله 10 - نیز می تواند باشد ولی چون طول ضلع همواره مقداری مثبت دارد، در نظر گرفته نمی شود.

در نتیجه اندازه ضلع این مربع برابر 10 و محیط آن برابر $4 \times 10 = 40$ است.



۳۲. رابطه فیثاغورس: $x^2 + x^2 = (6\sqrt{2})^2$

$$\Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = \frac{72}{2} = 36$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$$

جواب $x = -6$ قابل قبول نیست. زیرا طول ضلع نمی‌تواند عددی منفی باشد.

در نتیجه محیط مربع برابر $4 \times 6 = 24$ است.

۳۳. $2\pi r = 20\pi \Rightarrow 2r = 20 \Rightarrow r = \frac{20}{2} = 10$

مساحت دایره $= \pi r^2 \stackrel{r=10}{=} \pi(10)^2 = 100\pi$

۳۴. عدد اول را برابر x و عدد دوم را برابر y قرار می‌دهیم:

ضرب طرفین معادله در ۲۰: $\frac{3}{5}x = \frac{1}{4}y + 16 \rightarrow 12x = 5y + 320$

تقسیم طرفین بر ۱۲: $x = \frac{5}{12}y + \frac{320}{12}$

$x + y = 140 \xrightarrow{x = \frac{5}{12}y + \frac{320}{12}} \frac{5}{12}y + \frac{320}{12} + y = 140$

$\Rightarrow \frac{5y + 12y + 320}{12} = 140 \Rightarrow 17y + 320 = 12 \times 140$

$\Rightarrow 17y = 1680 - 320 \Rightarrow 17y = 1360 \Rightarrow y = \frac{1360}{17} = 80 \Rightarrow y = 80$

$x + y = 140 \xrightarrow{y=80} x + 80 = 140 \Rightarrow x = 140 - 80 = 60$

عرض مستطیل:

$3x - 4$ طول مستطیل

محیط مستطیل $= 2(x + 3x - 4) = 2(4x - 4) = 8x - 8$

$8x - 8 = 64 \Rightarrow 8x = 64 + 8 \Rightarrow 8x = 72$

$\Rightarrow x = 9 \Rightarrow$ عرض مستطیل $= 9$ ، طول مستطیل $= 3 \times 9 - 4 = 23$

مساحت مستطیل $= 23 \times 9 = 207$

۳۶. ضلع سوم، $2x - 1$ ؛ ضلع دوم، x ؛ ضلع اول $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}$

$x + 2x - 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 60 \Rightarrow 3x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 60 \Rightarrow 60 \div 5$

$\frac{1}{3}x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = 60 \times \frac{3}{1} = 18$

$\frac{1}{3} \times 18 + \frac{1}{5}$ ؛ ضلع سوم، $2 \times 18 - 1 = 35$ ؛ ضلع دوم، 18 ؛ ضلع اول

$= 6 + \frac{1}{5} = 7 \div 5$



$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 60$

مخرج مشترک $\rightarrow \frac{4x + 2x + x + x}{4} = \frac{1}{4}x = 60$

$\Rightarrow x = \frac{60}{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = 60 \times \frac{4}{1} = 240$ ارتفاع ساختمان

۲۰. $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 1$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{17}{6} = \frac{2}{4}x + 1 \Rightarrow 12(\frac{2}{3}x + \frac{17}{6} = \frac{2}{4}x + 1)$

$\Rightarrow 8x + 34 = 9x + 12 \Rightarrow 8x - 9x = 12 - 34$

$\Rightarrow -x = -22 \Rightarrow x = 22$

۲۱. با قراردادن $x = 4$ در معادله داریم:

$\frac{x-1}{3} - a = \frac{1-x}{3} - 3 \xrightarrow{x=4} \frac{4-1}{3} - a = \frac{1-4}{3} - 3$

$\Rightarrow \frac{3}{3} - a = \frac{-3}{3} - 3 \Rightarrow 1 - a = -1 - 3 \Rightarrow -a = -5 \Rightarrow a = 5$

۲۲. $2x + 3 = 3x - 5 \Rightarrow 2x - 3x = -5 - 3 \Rightarrow -x = -8 \Rightarrow x = 8$

۲۳. $4x + 5 = 3x + 1 \Rightarrow 4x - 3x = 1 - 5 \Rightarrow x = -4$

۲۴. $x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

۲۵. $x^2 + 11 = 25 \Rightarrow x^2 = 25 - 11 \Rightarrow x^2 = 14 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{14} \\ x = -\sqrt{14} \end{cases}$

۲۶. $x + 1$ ؛ عدد دوم، x ؛ عدد اول

$x + 3$ ؛ عدد چهارم، $x + 2$ ؛ عدد سوم

$\Rightarrow x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x + 6 = 74$

$\Rightarrow 4x = 74 - 6 \Rightarrow 4x = 68 \Rightarrow x = 17$

اعداد به ترتیب برابر ۱۷، ۱۸، ۱۹ و ۲۰ هستند که کوچک‌ترین آن‌ها برابر ۱۷ است.

۲۷. $x + 4$ ؛ عدد فرد سوم، $x + 2$ ؛ عدد فرد دوم، x ؛ عدد فرد اول

$\Rightarrow x + x + 2 + x + 4 = 69 \Rightarrow 3x + 6 = 69$

$\Rightarrow 3x = 69 - 6 = 63 \Rightarrow 3x = 63 \Rightarrow x = 21$

اعداد به ترتیب برابر ۲۱، ۲۳ و ۲۵ هستند که بزرگ‌ترین آن‌ها برابر ۲۵ است.

۲۸. $x + 2$ ؛ عدد زوج دوم، x ؛ عدد زوج اول

$x + 6$ ؛ عدد زوج چهارم، $x + 4$ ؛ عدد زوج سوم

$\Rightarrow x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = -60$

$\Rightarrow 4x + 12 = -60 \Rightarrow 4x = -72 \Rightarrow x = -18$

اعداد به ترتیب برابر ۱۸، ۱۶، ۱۴ و ۱۲ هستند که کوچک‌ترین آن‌ها ۱۸ است.

۲۹. $x + 6$ ؛ مضرب سوم عدد ۳، $x + 3$ ؛ مضرب دوم عدد ۳، x ؛ مضرب اول عدد ۳

$\Rightarrow x + x + 3 + x + 6 = 3x + 9 = 108$

$\Rightarrow 3x = 99 \Rightarrow x = 33$

اعداد به ترتیب برابر ۳۳، ۳۶ و ۳۹ و عدد وسطی برابر ۳۶ است.

۳۰. با در نظر گرفتن x برای مقدار «ما» داریم:

$x + x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(\frac{x}{2}) + 1 = 100 \Rightarrow x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$

$\Rightarrow 2x + \frac{3}{4}x + 1 = 100 \Rightarrow \frac{11}{4}x = 99$

$\Rightarrow x = \frac{99}{\frac{11}{4}} = \frac{99}{11} \times \frac{4}{1} = 36 \Rightarrow x = 36$

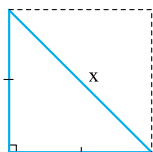
۳۱. با در نظر گرفتن x برای مقدار «ما» داریم:

$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{2}(\frac{x}{3}) + 1 = 37 \Rightarrow x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + 1 = 37$

$\Rightarrow \frac{6x + 3x + 2x + x}{6} + 1 = 37$

$\Rightarrow \frac{12x}{6} + 1 = 37 \Rightarrow 2x + 1 = 37 \Rightarrow 2x = 36 \Rightarrow x = 18$

$$45. \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi} x\right)^2 = \frac{\pi x^2}{2\pi} = \frac{x^2}{2}$$



از طرفی داریم:

مساحت مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به قطر x برابر $\frac{x^2}{4}$ است و به طور واضح مساحت مربع نیز برابر x^2 است.

بنابراین:

$$مساحت دایره + مساحت مثلث + مساحت مربع = 7$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} = 7 \Rightarrow \frac{4x^2 + x^2 + 2x^2}{4} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{7x^2}{4} = 7 \Rightarrow 7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = \frac{28}{7} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

جواب $x = -2$ قابل قبول نیست.

قسمت اول:

حل معادله درجه دوم به روش ریشه گیری و تجزیه و مربع کامل

صفحه ۱۹ تا ۲۷ کتاب درسی

فصل ۱ درس ۲

حل معادله درجه دو

روش ریشه گیری: برای حل معادله های درجه دومی که بتوان آن ها را به صورت $(x-a)^2 = k$ نوشت، می توان با ریشه گیری از طرفین معادله جواب های آن را به دست آورد.

$$(x-1)^2 = 16$$

مثال معادله مقابل را حل کنید.

$$(x-1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x-1=4 \Rightarrow x=5 \\ x-1=-4 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

پاسخ:

نکته معادله درجه دوم به صورت $(x-a)^2 = k$:

الف) دارای دو جواب حقیقی است، هرگاه $k > 0$.

ب) دارای ریشه مضاعف است، هرگاه $k = 0$.

پ) ریشه حقیقی ندارد، هرگاه $k < 0$.

روش تجزیه: برخی از معادله های درجه دوم را می توان به کمک تجزیه (استفاده از اتحادها یا فاکتورگیری) به دو معادله درجه اول تبدیل کرد و سپس با حل آن ها، جواب های معادله درجه دوم را به دست آورد.

مثال معادله های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 5x = 0$$

$$\text{ب) } x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\text{پ) } x^5 - 81x = 0$$

پاسخ: الف)

$$x^2 - 5x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x} x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

ب)

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-3)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$\text{پ) } x^5 - 81x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x} x(x^4 - 81) = 0$$

پ)

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} x(x^2-9)(x^2+9) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} x(x-3)(x+3)(x^2+9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \end{cases}$$

جواب حقیقی ندارد. $x^2 = -9$

x : تعداد سکه های ۵۰ تومانی

۳۸

$2x - 3$: تعداد سکه های ۱۰۰ تومانی

$$50x + 100(2x - 3) = 1700$$

$$\Rightarrow 50x + 200x - 300 = 1700 \Rightarrow 250x = 2000 \Rightarrow x = \frac{2000}{250} = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8: \text{تعداد سکه های } 50 \text{ تومانی} \\ 2 \times 8 - 3 = 13: \text{تعداد سکه های } 100 \text{ تومانی} \end{cases}$$

سن نیما: x , سن پسرعموی نیما: $x - 3$

۳۹

$$x(x-3) = 40 \xrightarrow{\text{حدس و آزمایش}} x = 8$$

سن نیما ۸ و سن پسرعموی او برابر ۵ سال است.

$\frac{3}{4}x$: حقوق مدیر بخش, x : حقوق مهندس, $\frac{1}{2}x$: حقوق فن ورز

۴۰

$$3 \times \frac{3}{4}x + 8x + 12 \times \frac{1}{2}x = 55,500,000$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } \times 4} 9x + 32x + 24x = 222,000,000 \Rightarrow 65x = 222,000,000$$

$$\Rightarrow 37x = 111,000,000 \Rightarrow x = 3,000,000$$

حقوق فن ورز برابر $\frac{1}{4}x$ یعنی ۷۵۰,۰۰۰ است.

۴۱ چون مثلث قائم الزاویه است، پس رابطه فیثاغورس در آن برقرار است. در نتیجه داریم:

$$(x+1)^2 + 4^2 = (x+3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 16 = x^2 + 6x + 9$$

$$\Rightarrow 2x - 6x = 9 - 17 \Rightarrow -4x = -8 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{مساحت مستطیل } (x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3$$

۴۲

$$\text{مساحت مثلث } \frac{1}{2}x(x+5) = x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = x^2 + 5x \Rightarrow 5x - 4x = 3 \Rightarrow x = 3$$

۴۳ توجه مساحت مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با وتر x برابر $\frac{x^2}{4}$ است.

$$\text{مساحت مربع } x^2$$

$$\text{مساحت مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین } \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 + \frac{x^2}{4} = 125 \Rightarrow \frac{5x^2}{4} = 125$$

$$\Rightarrow 5x^2 = 500 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

با توجه به این که x اندازه ضلع مربع است، جواب $x = -10$ قابل قبول نیست.

۴۴ شکل داده شده به ۸ مربع به ضلع x تبدیل می شود که مساحت کل آن برابر است با:

$$S = 8(x^2) = 8x^2$$

محیط این شکل از ۱۸ ضلع به اندازه x و دو ضلع به اندازه $2x$ تشکیل شده است. در نتیجه محیط این شکل برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} 22x: \text{محیط شکل} \\ 8x^2: \text{مساحت شکل} \end{cases}$$

$$8x^2 = 22x \Rightarrow 8x^2 - 22x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } 2x} 2x(4x - 11) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ غیر قابل قبول} \\ 4x - 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{4} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

$$a^5 - 11a \xrightarrow{\text{فکتورگیری از } a} a(a^4 - 11) \quad ۶۱$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} a(a^2 + 9)(a^2 - 9) \xrightarrow{\text{فکتورگیری از } 2x} 2x(x^2 + 4x + 4) \quad ۶۲$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله}} 2x(x+2)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2a+1)-(a-2)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2a+1+(a-2))(2a+1-(a-2)) \quad ۶۳$$

$$= (2a+1-a+2)(2a+1+a-2) = (a+3)(3a-1) \quad ۶۴$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} 9x^2 - (x+2)^2 \xrightarrow{\text{فکتورگیری از } 2x} (3x - (x+2))(3x + (x+2)) \quad ۶۵$$

$$= (3x - x - 2)(3x + x + 2) = (2x - 2)(4x + 2) \quad ۶۶$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad ۶۷$$

$$(x+2)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x+2=4 \Rightarrow x=2 \\ x+2=-4 \Rightarrow x=-6 \end{cases} \quad ۶۸$$

$$(x+1)^2 + 5 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = -5 \quad ۶۹$$

$$\text{معادله جواب حقیقی ندارد.} \quad ۷۰$$

$$x = \frac{25}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 = 25 \Rightarrow x = +5 \text{ یا } -5 \quad ۷۱$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{x^2}{3} = x \xrightarrow{\text{فکتورگیری از } x} x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases} \quad ۷۲$$

$$\xrightarrow{\text{فکتورگیری از } x} x(x+1) + x = 0 \xrightarrow{\text{فکتورگیری از } x} x(x+1+1) = 0 \quad ۷۳$$

$$\Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \quad ۷۴$$

$$3x^2 - 12 = 0 \xrightarrow{\text{فکتورگیری از } 3} 3(x^2 - 4) = 0 \quad ۷۵$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} 3(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \quad ۷۶$$

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله}} (x+5)^2 = 0 \quad ۷۷$$

$$\Rightarrow x+5=0 \Rightarrow x=-5 \text{ مضاعف} \quad ۷۸$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-3)(x+2) = 0 \quad ۷۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \quad ۸۰$$

$$(x+1)^2 + 3(x+1) - 4 = 0 \quad ۸۱$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} ((x+1)+4)((x+1)-1) = 0 \quad ۸۲$$

$$\Rightarrow x(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases} \quad ۸۳$$

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases} \quad ۸۴$$

$$4x^2 - 16x + 15 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (2x-3)(2x-5) = 0 \quad ۸۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x-5=0 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{cases} \quad ۸۶$$

روش مربع کامل: در این روش سعی می‌کنیم با اضافه یا کم کردن مقادیر به طرفین معادله آن را به صورت $(x-a)^2 = k$ درآوریم و بعد از آن به کمک روش ریشه‌گیری جواب‌های معادله را به دست آوریم.

به الگوریتم زیر و مثال حل‌شده برای حل معادله به روش مربع کامل توجه کنید:

مثال $2x^2 - 4x - 6 = 0$

۱ در صورتی که ضریب x^2 برابر ۱ نباشد، کل عبارت را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم کل معادله بر } 2} x^2 - 2x - 3 = 0$$

۲ در صورت وجود، عدد ثابت را به سمت راست می‌بریم:

$$x^2 - 2x = 3 \xrightarrow{\text{مجدور}} x^2 - 2x + 1 = 3 + 1$$

۳ مجذور نصف ضریب x را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم (علامت ضریب x مهم نیست):

$$(x-1)^2 = 4$$

۴ سمت چپ معادله را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای تجزیه می‌کنیم:

$$(x-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

۵ به کمک ریشه‌گیری جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم:

مثال معادله زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x^2 + 6x = -8$$

$$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$$

$$(x+3)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+3=1 \Rightarrow x=-2 \\ x+3=-1 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

پاسخ سوالات

۴۶. مضاعف ۴۷ . فکتورگیری (تجزیه)

۴۸. صفر ۴۹ . $(x+1)^2 = 0$

۵۰. مثبت ۵۱ . منفی

۵۲. $(2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$

۵۳. $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

۵۴. $(2\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 = 20 + 4\sqrt{10} + 2 = 22 + 4\sqrt{10}$

۵۵. $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 - 4 = 1$

۵۶. $(-2a - 3b)(2a - 3b) = -(2a + 3b)(2a - 3b) = -(4a^2 - 9b^2) = 9b^2 - 4a^2$

۵۷. $(a-2)(a+3) = a^2 + a - 6$

۵۸. $(3x-1)(3x+8) = 9x^2 + 21x - 8$

۵۹. $x^2 + 5x + 6 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+2)(x+3)$

۶۰. $x^4 - x^2 - 12 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x^2 - 4)(x^2 + 3)$

$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x+2)(x-2)(x^2+3)$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \quad .88$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = -1 \xrightarrow{((-\frac{5}{2}) \div 2)^2 = \frac{25}{16}} x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -1 + \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{9}{16} \Rightarrow (x - \frac{5}{4})^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{2}{9}$$

$$\xrightarrow{(\frac{2}{3} \div 2)^2 = \frac{1}{9}} x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \Rightarrow (x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (I): x - \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$$

$$\Rightarrow (II): x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-\sqrt{3}+1}{3}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = -x \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 0 \quad .90$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ریشه مضاعف}$$

$$2x^2 - 6x - 1 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \quad .91$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x = \frac{1}{2} \xrightarrow{(-3 \div 2)^2 = \frac{9}{4}} x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{11}+3}{2} \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{11}}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{11}+3}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - 6x = -11 \xrightarrow{(-6 \div 2)^2 = 9} x^2 - 6x + 9 = -11 + 9 \quad .92$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = -2 \Rightarrow (x-3)^2 = -2 \text{ معادله ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$.93 \text{ چون } x = -4 \text{ و } x = 3 \text{ ریشه‌های معادله هستند، پس } (x-3) \text{ و } (x+4) \text{ باید عامل‌های معادله باشند:}$$

$$(x-3)(x+4) = x^2 + x - 12 = 0$$

$$.94 (x+2) \text{ باید عامل درجه دوم معادله باشد، پس: } (x+2)^2 = 0$$

خیر، این معادله می‌تواند در هر عدد ثابت ضرب شود.

$$k-3 > 0 \Rightarrow k > 3 \quad .95 \text{ (الف)}$$

$$k-3 = 0 \Rightarrow k = 3 \quad \text{(ب)}$$

$$k-3 < 0 \Rightarrow k < 3 \quad \text{(پ)}$$

$$.96 \text{ مساحت مربع کوچک رنگی، } 6 \times 6 = 36 \text{ مساحت مربع بزرگ}$$

$$2x \cdot x = 2x^2 \text{ مساحت مستطیل رنگی}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2}x = \frac{1}{2} \cdot 2x^2 = x^2 \text{ مساحت مثلث رنگی}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مساحت‌های قسمت‌های رنگی} = x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$\Rightarrow 36 - 4x^2 = 24 \Rightarrow 36 - 4x^2 = 24$$

$$\Rightarrow 12 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4(3 - x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$x = -\sqrt{3} \text{ غیر قابل قبول است، پس طول ضلع مربع کوچک } \sqrt{3} \text{ است.}$$

$$.78 \text{ فاکتورگیری از } x^2 \rightarrow x^2(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ریشه مضاعف} \\ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$.79 \text{ اتحاد جمله مشترک} \rightarrow (x^2-4)(x^2+1) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-2)(x+2)(x^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ معادله جواب ندارد.} \end{cases}$$

تنها جواب‌های این معادله 2 و -2 است.

$$.80 \text{ فاکتورگیری از } x \rightarrow x(4x^2+4x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2+4x-3 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (2x+3)(2x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x+3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$.81 \text{ فاکتورگیری از } x^2 \rightarrow x^2(x^2+x-6) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} x^2(x+3)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ریشه مضاعف} \\ x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$.82 (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-1+x+1)(x-1-(x+1)) = 0$$

$$\Rightarrow (2x)(-2) = -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$.83 \text{ اتحاد مزدوج} \rightarrow (2x-(2-x))(2x+(2-x)) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-2+x)(2x+2-x) = 0$$

$$\Rightarrow (3x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$.84 (2a+1)^2 - (a-2)^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (2a+1+a-2)(2a+1-(a-2)) = 0$$

$$\Rightarrow (3a-1)(a+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a-1 = 0 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ a+3 = 0 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

$$.85 \text{ فاکتورگیری از } x^2 \rightarrow x^2(x^2-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2-2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$.86 \text{ ریشه مضاعف } x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$.87 \text{ } 3x^2-2x-1=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x^2-\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{(\frac{2}{3} \div 2)^2 = \frac{1}{9}} x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \Rightarrow x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \\ x-\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$