

مقدمه مؤلفان

در ابتدا و قبل از هر کلام، از خداوند مهربان سپاس‌گزاریم که ما را یاری کرد تا از علم اندک خود بهره بگیریم و توانمان را در جهت خدمت به دانش‌آموزان دوست‌داشتنی و پرتلاش سرزمین عزیزمان صرف کنیم. نتیجه این تلاش، کتاب حاضر است. کتاب «بانک نهایی ریاضی ۱» که با رویکرد جدید نسبت به امتحانات نهایی و ارزش‌یابی مفهومی و سنجش قدرت تحلیل و استنباط دانش‌آموزان، تألیف شده است. امیدواریم، پس از مطالعه درس‌نامه و حل سؤالات متنوع این کتاب، لذت‌بردن شما از درس ریاضی چندین برابر شود و در نتیجه آن با اعتماد به نفس واقعی، فقط به نمره بیست فکر کنید!

بعضی از ویژگی‌های این کتاب عبارت‌اند از:

- ۱ پوشش کامل فعالیت‌ها، مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی
 - ۲ درس‌نامه مختصر اما بسیار مفید، کامل و قابل درک همراه با مثال
 - ۳ پاسخ‌های کاملاً تشریحی و مطابق با راه حل‌های کتاب درسی
 - ۴ طراحی سؤالات به سبک نهایی و کمی سطح بالاتر برای آمادگی بیشتر شما
 - ۵ چیدمان سؤالات به ترتیب از ساده به دشوار برای تسلط بیشتر
 - ۶ ارائه چند دوره امتحان شبیه‌ساز نهایی به همراه پاسخ کامل و توضیحات لازم
 - ۷ ارائه بارم‌بندی برای هر فصل و ریزبارم در پاسخ‌نامه امتحانات
- این ویژگی‌های خوب و منحصر به فرد نتیجه کار با یک تیم توانمند است.

بنابراین تشکر و قدردانی می‌کنم از:

- جناب آقای کمیل نصری، مدیر محترم مجموعه خیلی‌سبز
- جناب آقای احمد علی‌نژاد، مدیر تألیف پرتوان و مستعد انتشارات

فهرست مطالب

درسنامه پاسخ	سوال	مجموعه، الگو و دنباله	فصل اول:
۴۷	۵	درس ۱ - قسمت اول: مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها	
۴۹	۶	درس ۱ - قسمت دوم: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی	
۵۰	۶	درس ۲: متمم یک مجموعه	
۵۳	۸	درس ۳: الگو و دنباله	
۵۵	۹	درس ۴ - قسمت اول: دنباله حسابی	
۵۸	۹	درس ۴ - قسمت دوم: دنباله هندسی	
		مثلثات	فصل دوم:
۶۰	۱۱	درس ۱: نسبت‌های مثلثاتی	
۶۴	۱۲	درس ۲ - قسمت اول: دایره مثلثاتی	
۶۷	۱۴	درس ۲ - قسمت دوم: رابطه شیب خط با تانژانت زاویه	
۶۸	۱۴	درس ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	
		توان‌های گویا و عبارت‌های جبری	فصل سوم:
۷۱	۱۶	درس ۱: ریشه و توان	
۷۵	۱۸	درس ۲: ریشه n ام	
۷۸	۱۹	درس ۳: توان‌های گویا	
۸۱	۲۱	درس ۴: عبارت‌های جبری	
		معادله‌ها و نامعادله‌ها	فصل چهارم:
۸۵	۲۳	درس ۱: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن	
۸۹	۲۴	درس ۲: سهمی	
۹۲	۲۵	درس ۳ - قسمت اول: تعیین علامت و حل نامعادله	
۹۸	۲۶	درس ۳ - قسمت دوم: شرط همواره مثبت یا منفی بودن عبارت درجه دوم - نامعادلات قدرمطلق	
		تابع	فصل پنجم:
۱۰۱	۲۸	درس ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن	
۱۰۴	۳۰	درس ۲: دامنه و برد تابع	
۱۰۹	۳۲	درس ۳ - قسمت اول: انواع تابع	
۱۱۳	۳۴	درس ۳ - قسمت دوم: رسم برخی توابع به کمک انتقال	
		شمارش، بدون شمردن	فصل ششم:
۱۱۶	۳۵	درس ۱: شمارش	
۱۱۹	۳۷	درس ۲: جایگشت	
۱۲۳	۳۹	درس ۳: ترکیب	
		آمار و احتمال	فصل هفتم:
۱۲۹	۴۲	درس ۱: احتمال یا اندازه‌گیری شانس	
۱۳۵	۴۵	درس ۲ و ۳: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه - متغیر و انواع آن	
		امتحانات شبیه‌ساز نهایی	ضمیمه:
۱۴۸	۱۳۹	امتحان شماره ۱: نوبت اول (میان سال)	
۱۴۹	۱۴۰	امتحان شماره ۲: نوبت اول (میان سال)	
۱۵۱	۱۴۱	امتحان شماره ۳: نوبت دوم (پایان سال)	
۱۵۳	۱۴۳	امتحان شماره ۴: نوبت دوم (پایان سال)	
۱۵۴	۱۴۴	امتحان شماره ۵: نوبت دوم (پایان سال)	
۱۵۶	۱۴۶	امتحان شماره ۶: نوبت دوم (پایان سال)	

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

فصل ۳

درس ۱

ریشه و توان

صفحه ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی

درس‌نامه ۱ را در صفحه ۷۱ ببینید.

- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.
- ۲۳۹- هر عدد مثبت دارای دو ریشه زوج است که قرینه یکدیگرند. ۲۴۰- چون $\sqrt{16} = \pm 4$ ، پس ± 4 ریشه‌های دوم ۱۶ هستند.
- ۲۴۱- اگر $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a}$ باشد، آن‌گاه لزوماً $0 < a < 1$. ۲۴۲- اگر $0 < a < 1$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a}$.
- ۲۴۳- اگر a عددی منفی و $\sqrt{a} > a$ باشد، آن‌گاه $-1 < a < 0$. ۲۴۴- ریشه n ام عدد صفر برابر صفر است.
- ۲۴۵- ریشه چهارم عدد ۱ برابر ۱ است. ۲۴۶- اعداد منفی ریشه زوج ندارند.
- جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- ۲۴۷- هر عدد مثبت دارای ریشه ششم است که یکدیگرند.
- ۲۴۸- هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد ریشه پنجم آن و اگر عدد منفی باشد، ریشه پنجم آن است.
- ۲۴۹- اگر $a > 1$ ، آن‌گاه با بزرگ شدن فرجه، عدد حاصل می‌شود.
- ۲۵۰- اگر a عددی مثبت و $\sqrt[5]{a} > a$ باشد، آن‌گاه
- ۲۵۱- اگر a عددی منفی و $\sqrt[5]{a} > a$ باشد، آن‌گاه
- ۲۵۲- اعداد ۲ و ریشه‌های ششم عدد می‌باشند.
- ۲۵۳- اگر $a = \sqrt[3]{64}$ ، در این صورت حاصل $a^2 + \sqrt{a}$ برابر است با
- ۲۵۴- حاصل $\sqrt[4]{0.0016}$ برابر است با
- نظیر هر تساوی توانی، یک تساوی رادیکالی و نظیر هر تساوی رادیکالی، یک تساوی توانی بنویسید.

$$(-5)^3 = -125 \quad 255 \quad 256 \quad (0.6)^2 = 0.36$$

$$3^6 = 729 \quad 257 \quad 258 \quad \sqrt{169} = 13$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad 259 \quad 260 \quad \sqrt[3]{-72} = -2\sqrt[3]{9}$$

(مشابه تمرین و کار در کلاس کتاب درسی)

■ در هر مورد، مشخص کنید هر ریشه، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

$$\sqrt{13} \quad 261 \quad 262 \quad \sqrt{57}$$

$$-\sqrt{30} \quad 263 \quad 264 \quad \sqrt[3]{-19}$$

$$\sqrt[3]{100} \quad 265 \quad 266 \quad \sqrt[4]{145}$$

$$\sqrt[5]{201} \quad 267 \quad 268 \quad \sqrt[5]{-500}$$

■ در هر مورد مقادیر خواسته‌شده را در صورت وجود به دست آورید.

$$269 \quad \text{ریشه‌های دوم } 16 \quad 270 \quad \text{ریشه‌های چهارم } 625$$

$$271 \quad \text{ریشه سوم } 125 \quad 272 \quad \text{ریشه سوم } 64$$

$$273 \quad \text{ریشه‌های ششم } 0.000001 \quad 274 \quad \text{ریشه‌های دوم } -36$$

۲۷۵- ریشه‌های چهارم 7^0

۲۷۶- ریشه سوم 5^0

۲۷۷- ریشه پنجم $0/00032$

۲۷۸- ریشه هفتم $1/128$

■ در هر مورد، حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

۲۷۹- $\sqrt{3/61}$

۲۸۰- $\sqrt[3]{343}$

۲۸۱- $\sqrt[4]{0/0016}$

۲۸۲- $\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}}$

۲۸۳- $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$

۲۸۴- $\sqrt[5]{-128}$

۲۸۵- $\sqrt[5]{-1}$

۲۸۶- $\sqrt[5]{0}$

■ در هر مورد، حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست آورید.

۲۸۷- $\sqrt[3]{16} = a \Rightarrow a^3 + 1 = ?$

۲۸۸- $\sqrt[3]{7} = a \Rightarrow a^3 + 3 = ?$

۲۸۹- $\sqrt[5]{4} = a \Rightarrow a^{10} - 5 = ?$

۲۹۰- $\sqrt[5]{a} = 2 \Rightarrow \sqrt[5]{-a} = ?$

۲۹۱- سه مکعب تودرتو را در نظر بگیرید به طوری که حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۲۱۶ و حجم مکعب داخلی (کوچک) برابر ۱۲۵ است. طول ضلع مکعب میانی را به صورت یک بازه نمایش دهید.

■ در هر مورد تعیین کنید به جای x کدام اعداد طبیعی را می‌توان قرار داد.

۲۹۲- $6 < \sqrt{x} < 7$

۲۹۳- $4 \leq \sqrt[3]{x} < 5$

۲۹۴- $2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۹۵- اگر $0 < a < 1$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

۲۹۶- $a^4 \square a^5$

۲۹۷- $\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$

۲۹۶- اگر $a > 1$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

۲۹۷- $a^3 \square a^4$

۲۹۸- $\sqrt[4]{a} \square \sqrt[5]{a}$

۲۹۷- اگر $-1 < a < 0$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

۲۹۸- $a^5 \square a^7$

۲۹۹- $a^4 \square a^6$

۳۰۰- $\sqrt[5]{a} \square \sqrt[6]{a}$

۲۹۸- اگر $a < -1$ باشد، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

۳۰۱- $a^3 \square a^5$

۳۰۲- $a^2 \square a^4$

۳۰۳- $a^7 \square a^4$

■ در هر مورد، یکی از علامت‌های «>»، «<» یا «=» را در جای خالی قرار دهید.

۲۹۹- $11^5 \square 11^8$

۳۰۰- $(0/2)^4 \square (0/2)^7$

۳۰۱- $(-0/1)^9 \square (-0/1)^7$

۳۰۲- $(-3)^5 \square (-3)^3$

۳۰۳- $(-12)^6 \square (-12)^4$

۳۰۴- $0/1 \square \sqrt[5]{0/00001}$

۳۰۵- $\sqrt[5]{7} \square \sqrt[6]{7}$

۳۰۶- $\sqrt[4]{\frac{2}{3}} \square \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$

۳۰۷- $\sqrt[4]{-0/3} \square \sqrt[5]{-0/3}$

۳۰۸- $\sqrt[5]{-9} \square \sqrt[4]{-9}$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

■ در هر مورد مشخص کنید a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۳۰۹- $\sqrt[3]{a} > a$ عددی مثبت است و

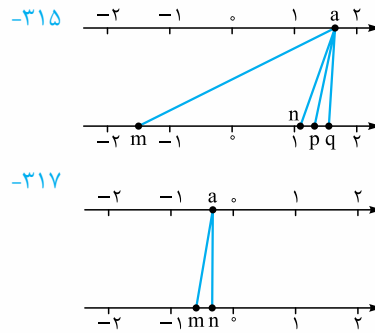
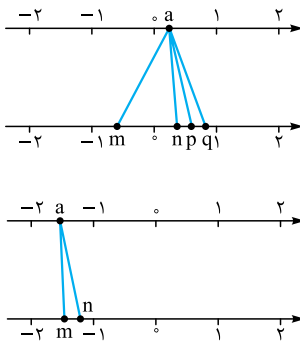
۳۱۰- $\sqrt[5]{a} < a$ عددی حقیقی است و

۳۱۱- $\sqrt[4]{a} > a$ عددی منفی است و

۳۱۲- $\sqrt[3]{a} = a$ عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی

۳۱۳- $a > \sqrt{a}$ عددی مثبت است که

■ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید نقاط m ، n ، p و q مربوط به کدام ریشه است؟



۳۱۸- ریشه پنجم عددی از ریشه سوم عدد -64 ، 6 واحد بزرگ‌تر است. آن عدد را به دست آورید.

صفحه ۵۴ تا ۵۸ کتاب درسی

ریشه‌ن‌ام

درس ۲

درس‌نامه ۲ را در صفحه ۷۵ ببینید.

■ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۳۱۹- به ازای هر عدد حقیقی a و b رابطه $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ برقرار است.

۳۲۰- رابطه $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ به ازای هر عدد طبیعی فرد n ($n > 2$) برقرار است.

۳۲۱- همواره داریم $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$.

۳۲۲- اگر رادیکال‌ها با معنی باشد، آن‌گاه $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

۳۲۳- می‌توان نوشت: $\sqrt{(\sin(\frac{\pi}{4}) - 3)^2} = \sin(\frac{\pi}{4}) - 3$.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۳۲۴- حاصل $\sqrt{18} \times \sqrt{2}$ برابر است.

۳۲۵- رابطه $(\sqrt[n]{a^n}) = (\sqrt[n]{a})^n$ وقتی برقرار نیست که

۳۲۶- اگر a عددی منفی و n عددی زوج باشد، حاصل $\sqrt[n]{a^n}$ برابر است با

۳۲۷- حاصل $\sqrt[6]{(64)^{-2}}$ برابر است با

■ در هر مورد به جای a و b و عدد طبیعی n ، عددهایی قرار دهید که احکام داده‌شده برقرار باشد.

$$\sqrt[n]{ab} \neq \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad ۳۲۹-$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad ۳۲۸-$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ۳۳۱-$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ۳۳۰-$$

■ در هر مورد حاصل عبارت داده‌شده را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (همه رادیکال‌ها با معنی‌اند.)

$$\sqrt[5]{256} \times \sqrt[5]{4} \quad ۳۳۳-$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{27} \quad ۳۳۲-$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{24}} \times \sqrt[3]{81} \quad ۳۳۵-$$

$$\frac{\sqrt[4]{512}}{\sqrt[4]{162}} \quad ۳۳۴-$$

$$\sqrt[5]{\frac{b^2}{rac}} \times \sqrt[5]{11a^6b} \times \sqrt[5]{9b^2c} \quad ۳۳۷-$$

$$\sqrt[2]{\frac{5}{16}} \div \sqrt[2]{\frac{4}{25}} \quad ۳۳۶-$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16a^2b^4}} \times \sqrt[3]{54a^5b} \quad ۳۳۹-$$

$$2\sqrt[4]{375} \times 5\sqrt[4]{135} \quad ۳۳۸-$$

(تمرین کتاب درسی)

■ در هر مورد عبارت داده‌شده را ساده کنید. (همهٔ رادیکال‌ها بامعنی‌اند).

$$\sqrt[3]{16a^4b^5c^6} - 341 \quad \sqrt{242} - 340$$

$$\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{192} - 343 \quad \sqrt{72} - 3\sqrt{18} + 2\sqrt{8} - 342$$

■ ۳۴۴- با فرض $a \in \mathbb{R}$ و $m \in \mathbb{Z}$ ، $k \geq 2$ ، $k \in \mathbb{N}$ ، بررسی کنید رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ در چه صورت برقرار است. (تمرین کتاب درسی)

■ در هر مورد حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{(128)^{-3}} - 346 \quad \sqrt[3]{(64)^2} - 345$$

$$\sqrt[3]{(-625)^2} - 348 \quad \sqrt[6]{(729)^5} - 347$$

■ ۳۴۹- تساوی $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ به ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟ (کار در کلاس کتاب درسی)

■ در هر مورد حاصل عبارت داده‌شده را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{(-7)^3} - 351 \quad \sqrt{(-3)^2} - 350$$

$$\sqrt[4]{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^4} - 353 \quad \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - 352$$

$$\sqrt[5]{(1 - \sqrt{2})^{10}} - \sqrt[5]{(\sqrt{2} - 6)^5} - 355 \quad \sqrt[6]{(x^2 + 1)^6} - 354$$

■ ۳۵۶- عددهای زیر را محاسبه کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

$$\sqrt[6]{\frac{5^{-6}}{3^{-12}}} \quad \sqrt[4]{5^{-4}} \quad \sqrt[5]{3^{-5}} \quad \sqrt[2]{7^{-3}}$$

■ ۳۵۷- اگر $x < 0$ باشد، حاصل $A = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ را به دست آورید.

■ ۳۵۸- اگر $0 < x < 1$ باشد، حاصل $A = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ را به دست آورید.

■ ۳۵۹- مشخص کنید رابطهٔ $\sqrt[4]{(x-1)^4} = (\sqrt[4]{1-x})^4$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است.

■ ۳۶۰- تعیین کنید، تحت چه شرایطی رابطهٔ $\sqrt{a^3b} = -a\sqrt{ab}$ برقرار است.

■ ۳۶۱- حدود x را طوری بیابید که رابطهٔ $\sqrt[n]{(2x-1)^n} = (\sqrt[n]{2x-1})^n$ به ازای هر عدد طبیعی n ($n \geq 2$) برقرار باشد.

■ ۳۶۲- اگر $0 < a < b$ باشد، عبارت $A = \sqrt{a^2 + b^2} + 2\sqrt{a^2b^2}$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

■ ۳۶۳- با استفاده از تعریف ریشه، به شرط بامعنی‌بودن رادیکال، ثابت کنید $(\sqrt[n]{a})^n = a$. (تمرین کتاب درسی)

صفحه ۵۹ کتاب درسی

توان‌های گویا

درس ۳

درس‌نامه ۳ را در صفحه ۷۸ ببینید.

■ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$\sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[n]{a^m}^{\frac{1}{n}} - 364 \quad (-1)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-1} - 365$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{10} - 367 \quad \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5} - 366$$

$$\sqrt{3} = \sqrt[4]{9} = \sqrt[2]{\sqrt{27}} - 368$$

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

$$-369 \quad \text{حاصل } 81^{\frac{3}{4}} \text{ برابر است با } \dots\dots\dots$$

$$-370 \quad \text{اگر حاصل } 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \text{ برابر } a\sqrt[4]{2} \text{ باشد، } a \text{ برابر است با } \dots\dots\dots$$

$$-371 \quad \text{اگر } m \text{ و } n \text{ دو عدد طبیعی و } a > 0 \text{، آن‌گاه } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \dots\dots\dots$$

ریشه و توان

صفحه ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی

ریشه

(۱) **ریشه‌های دوم:** فرض کنیم b یک عدد حقیقی مثبت باشد، چون $(\pm\sqrt{b})^2 = b$ ، به اعداد $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ ریشه‌های دوم عدد b می‌گوییم. به طور مثال ریشه‌های دوم عدد ۲۵، عبارت‌اند از $\pm\sqrt{25} = \pm 5$ و ریشه‌های دوم عدد ۶۰ عبارت‌اند از $\pm\sqrt{60}$.

نکته ۱ هر عدد مثبت دو ریشه دوم دارد که قرینه یکدیگرند.

۲ اعداد منفی ریشه دوم ندارند. مثلاً عدد ۱۶- ریشه دوم ندارد.

۳ ریشه‌های دوم عدد ۱ برابر ± 1 و ریشه دوم صفر برابر صفر است.

(۲) **ریشه سوم:** فرض کنیم b یک عدد حقیقی باشد، چون $(\sqrt[3]{b})^3 = b$ ، به عدد $\sqrt[3]{b}$ ریشه سوم عدد b می‌گوییم. به طور مثال؛ ریشه سوم عدد ۸ برابر $\sqrt[3]{8} = 2$ و ریشه سوم عدد ۲۷ برابر $\sqrt[3]{27} = 3$ و ریشه سوم عدد ۵۷ برابر $\sqrt[3]{57}$ است.

نکته هر عدد حقیقی چه مثبت، چه منفی و چه صفر، دقیقاً یک ریشه سوم هم‌علامت با خود عدد دارد.

تذکره اگر عدد $a > 0$ مربع کامل و عدد b نیز مکعب کامل نباشند، آن‌گاه $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{b}$ ، اعداد حقیقی گنگ هستند که هیچ‌گاه مقدار دقیق آن‌ها به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به طور مثال $\sqrt[3]{15}$ که برای نمایش ریشه سوم عدد ۱۵ به کار می‌رود را نمی‌توان به طور دقیق با ارقام اعشاری نمایش داد و لذا از تقریبات آن در دنیای واقع استفاده می‌شود.

مثال مشخص کنید اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح واقع هستند.

(الف) $\sqrt{57}$ (ب) $\sqrt[3]{-23}$

پاسخ: (الف) داریم $49 < 57 < 64$ ، در نتیجه با جذرگیری از طرفین این نامعادله خواهیم داشت:
پس عدد $\sqrt{57}$ بین دو عدد صحیح ۷ و ۸ قرار دارد.

(ب) می‌دانیم $-8 < -23 < -27$ ، اگر از طرفین این نامعادله، ریشه سوم بگیریم، داریم:

$$\sqrt[3]{-27} < \sqrt[3]{-23} < \sqrt[3]{-8} \Rightarrow -3 < \sqrt[3]{-23} < -2$$

یعنی عدد $\sqrt[3]{-23}$ بین دو عدد صحیح ۳- و ۲- واقع است.

(۳) **ریشه‌های چهارم:** فرض کنیم b عدد حقیقی مثبت باشد، چون $(\pm\sqrt[4]{b})^4 = b$ ، به اعداد $\sqrt[4]{b}$ و $-\sqrt[4]{b}$ ، ریشه‌های چهارم عدد b می‌گوییم. به طور مثال، ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ برابر $\pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$ و ریشه‌های چهارم عدد ۲۷ برابر $\pm\sqrt[4]{27}$ هستند.

نکته ۱ هر عدد مثبت دارای دو ریشه چهارم است که قرینه یکدیگرند.

۲ اعداد منفی، ریشه چهارم ندارند.

۳ ریشه چهارم صفر برابر صفر است.

$$\cos \alpha = \pm \frac{\lambda}{10} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{\lambda}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{6}{10}}{-\frac{\lambda}{10}} = \frac{6}{\lambda} = \frac{3}{4} \\ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tan \alpha} + \cot^2 \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{16}{9} = \frac{9\sqrt{3} + 32}{18}$$

۲۳۷. در ناحیه دوم مثلثاتی، سینوس زوایا مثبت و کسینوس و تانژانت و کتانژانت منفی است؛ پس:

$$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{4}{3} + \frac{1}{\frac{4}{5}} = -\frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{-1}{12}$$

$$\cot^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 23 \quad \text{۲۳۸}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cot^2 \alpha + \tan^2 \alpha + 2 \cot \alpha \tan \alpha}_{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} - 2 \cot \alpha \tan \alpha = 23$$

$$\Rightarrow (\cot \alpha + \tan \alpha)^2 - 2 = 23 \Rightarrow (\cot \alpha + \tan \alpha)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \cot \alpha + \tan \alpha = \pm 5$$

در ناحیه سوم مثلثاتی $\cot \alpha$ و $\tan \alpha$ هر دو مثبت هستند؛ پس:

$$\cot \alpha + \tan \alpha = 5$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 5 \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 5$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{5} \quad (*)$$

اگر مقدار خواسته شده $\sin \alpha + \cos \alpha$ را برابر A قرار دهیم:

$$A = \sin \alpha + \cos \alpha \Rightarrow A^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$$

$$= \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{1} + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow A^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{(*)} A^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{7}{5}} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{7}{5}}$$

چون در ربع سوم، $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هر دو منفی هستند، پس حاصل جمع به‌دست‌آمده نیز باید منفی باشد؛ بنابراین

$$\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{\frac{7}{5}}$$

(۲) $0 < a < 1$: در این حالت هر چه توان بزرگ‌تر باشد، عدد کوچک‌تر می‌شود و هر چه فرجه بزرگ‌تر شود، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر:

$$0 < a < 1 \Rightarrow \dots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots$$

(۳) $-1 < a < 0$: توان‌های فرد و فرجه‌های فرد این حالت، مانند حالت $a > 1$ ،

عمل می‌کند. در این حالت a ریشه زوج ندارد و داریم:

$$-1 < a < 0 \Rightarrow \dots > a^5 > a^3 > a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a} > \dots$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow a^2 > a^4 > a^6 > \dots$$

(۴) $a < -1$: توان‌های فرد و فرجه‌های فرد این حالت، مانند حالت $0 < a < 1$ ،

عمل می‌کند. در این حالت a ریشه زوج ندارد و داریم:

$$a < -1 \Rightarrow \dots < a^5 < a^3 < a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a} < \dots$$

$$a < -1 \Rightarrow a^2 < a^4 < a^6 < \dots$$

تذکره اگر $a = 0$ یا $a = 1$ ، آن‌گاه:

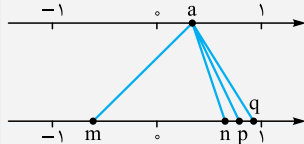
$$\dots = a^3 = a^2 = a = \sqrt{a} = \sqrt[3]{a} = \dots$$

هم‌چنین اگر $a = -1$ ، آن‌گاه:

$$\dots = a^5 = a^3 = a = \sqrt[3]{a} = \sqrt[5]{a} = \dots = -1$$

$$\text{و } a^2 = a^4 = a^6 = \dots = 1$$

مثال در شکل زیر، عدد a روی محور بالا به ریشه‌های پنجم، ششم و هفتم خود در محور پایین رسم شده است. تعیین کنید اعداد m ، n ، p و q مربوط به کدام یک از این ریشه‌ها هستند.



پاسخ: با توجه به شکل، معلوم می‌شود که $0 < a < 1$ است؛ پس بنابر مطالب گفته‌شده با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود. یعنی رابطه ریشه‌های پنجم، ششم و هفتم عبارت‌اند از:

$$\sqrt[5]{a} < \sqrt[6]{a} < \sqrt[7]{a}$$

پس می‌توان نوشت:

$$n = \sqrt[5]{a}, p = \sqrt[6]{a}, q = \sqrt[7]{a}$$

اما چون عدد a دارای دو ریشه ششم قرینه است، پس $m = -\sqrt[6]{a}$.

پاسخ‌سؤالات

۲۳۹. درست

۲۴۰. نادرست؛ زیرا همواره داریم $\sqrt[3]{16} = 4$ و حاصل $\sqrt[3]{16}$ هرگز برابر ۴ نیست.

در واقع باید گفته می‌شد، چون $16 = (\pm 4)^2$ ، پس ریشه‌های دوم ۱۶ برابر ± 4 است.

۲۴۱. نادرست؛ علاوه بر این که $0 < a < 1$ می‌تواند باشد، اگر $a < -1$ باشد، باز

هم $\sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$ خواهد بود.

(۴) **ریشه پنجم:** فرض کنیم b یک عدد حقیقی دلخواه باشد، چون $b = (\sqrt[5]{b})^5$ ، به عدد $\sqrt[5]{b}$ ریشه پنجم b می‌گوییم. به طور مثال ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر $\sqrt[5]{32} = 2$ و ریشه پنجم عدد -70 برابر $\sqrt[5]{-70}$ است.

نکته هر عدد حقیقی (چه مثبت، چه منفی و چه صفر) دقیقاً یک ریشه پنجم دارد که هم علامت با خود عدد است.

(۵) **ریشه n ام:** اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می‌گوییم هرگاه $b^n = a$.

تذکره اگر n زوج باشد، ریشه‌های n ام یک عدد مانند ریشه‌های دوم و چهارم و چنان‌چه n فرد باشد، ریشه n ام یک عدد مانند ریشه سوم و پنجم تعریف می‌شود. به طور مثال ریشه‌های هشتم عدد ۲۵۶ برابر $\pm \sqrt[8]{256} = \pm 2$ و ریشه هفتم عدد ۷۳ برابر $\sqrt[7]{73}$ است.

پیش‌در وجود و تعداد ریشه‌های یک عدد

$a > 0$ — زوج n — a دارای دو ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.

— فرد n — a دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ است.

$a > 0$ — زوج n — a ریشه n ام ندارد.

— فرد n — a دارای یک ریشه n ام $\sqrt[n]{a}$ است.

تذکره ریشه n ام عدد صفر، صفر است.

مثال مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید.

الف) ریشه‌های ششم عدد ۷۲۹ (ب) ریشه هفتم عدد $-\frac{1}{128}$
پ) ریشه‌های هشتم عدد -64

پاسخ:

الف) عدد ۷۲۹ مثبت است، پس دو ریشه ششم دارد که قرینه یکدیگرند و عبارت‌اند از:

$$\pm \sqrt[6]{729} = \pm \sqrt[6]{3^6} = \pm 3$$

ب) می‌دانیم هر عدد حقیقی فقط یک ریشه هفتم دارد؛ پس عدد $-\frac{1}{128}$ نیز یک ریشه هفتم دارد که عبارت است از:

$$\sqrt[7]{-\frac{1}{128}} = \sqrt[7]{-\frac{1}{2^7}} = -\frac{1}{2}$$

پ) می‌دانیم اعداد منفی ریشه زوج ندارند پس عدد -64 دارای ریشه هشتم نیست.

مقایسه توان‌ها و ریشه‌های مختلف یک عدد

مطابق شکل، اعداد ۱، صفر و -1 محور اعداد حقیقی را به ۴ قسمت (بازه) تقسیم می‌کنند که ویژگی‌های هر یک از این ۴ قسمت در زیر آمده است:

$$\frac{a < -1 \quad -1 < a < 0 \quad 0 < a < 1 \quad 1 < a}{-1 \quad 0 \quad 1}$$

(۱) $a > 1$: در این حالت هر چه توان بزرگ‌تر باشد، عدد نیز بزرگ‌تر می‌شود و هر چه فرجه بزرگ‌تر شود، عدد کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر:

$$a > 1 \Rightarrow \dots > a^3 > a^2 > a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \dots$$

$$\pm\sqrt{16} = \pm 4 \quad .269$$

$$\pm\sqrt[3]{625} = \pm 5 \quad .270$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad .271$$

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad .272$$

$$\pm\sqrt[5]{0/000001} = \pm\sqrt[5]{10^{-6}} = \pm 10^{-1} = \pm 0/1 \quad .273$$

$$.274 \quad \text{اعداد منفی ریشه زوج ندارند؛ پس } -36 \text{ ریشه دوم ندارد.}$$

$$\pm\sqrt[3]{9} \quad .275$$

$$\sqrt{-5} \quad .276$$

$$.277$$

$$\sqrt[5]{-0/000032} = \sqrt[5]{-\frac{32}{100000}} = \sqrt[5]{-\frac{2^5}{10^5}} = -0/2 \quad .278$$

$$\sqrt[7]{-\frac{1}{128}} = \sqrt[7]{-\frac{1}{2^7}} = -\frac{1}{2} \quad .279$$

$$\sqrt{3/61} = \sqrt{(1/9)^2} = 1/9 \quad .280$$

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7 \quad .281$$

$$\sqrt[4]{0/0016} = \sqrt[4]{\frac{16}{10000}} = \sqrt[4]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt[4]{(\frac{2}{10})^4} = \frac{2}{10} = 0/2 \quad .282$$

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{4^5}} = \sqrt[5]{(-\frac{1}{4})^5} = -\frac{1}{4} \quad .283$$

$$\sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \sqrt[6]{\frac{2^6}{3^6}} = \sqrt[6]{(\frac{2}{3})^6} = \frac{2}{3} \quad .284$$

$$\sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{-2^7} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2 \quad .285$$

$$\sqrt{-1} = -1 \quad .286$$

$$\sqrt[3]{0} = 0 \quad .287$$

$$\sqrt[3]{16} = a \Rightarrow 2 = a \Rightarrow a^3 + 1 = 2^3 + 1 = 9 \quad .288$$

$$\sqrt[3]{7} = a \xrightarrow{\text{به توان ۳}} 7 = a^3 \Rightarrow a^3 + 3 = 7 + 3 = 10 \quad .289$$

$$\sqrt[5]{4} = a \xrightarrow{\text{به توان ۵}} 4 = a^5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 16 = a^{10} \quad .290$$

$$\Rightarrow a^{10} - 5 = 16 - 5 = 11$$

$$\sqrt[3]{a} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} a = 2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{-a} = \sqrt[3]{-8} \quad .291$$

$$= \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$.291 \quad \text{فرض کنیم طول ضلع مکعب میانی برابر } a \text{ باشد، پس حجم آن برابر } a^3 \text{ خواهد بود. طبق فرض می توان نوشت:}$$

$$125 < a^3 < 216$$

$$5 < a < 6 \Rightarrow a \in (5, 6) \quad \text{از طرفین نامعادله، ریشه سوم می گیریم:}$$

$$6 < \sqrt[3]{x} < 7 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} 36 < x < 49 \quad .292$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x \in \{37, 38, \dots, 48\}$$

$$4 \leq \sqrt[3]{x} < 5 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} 64 \leq x < 125 \quad .293$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x \in \{64, 65, 66, \dots, 124\}$$

$$.242 \quad \text{درست}$$

$$.243 \quad \text{نادرست؛ زیرا با شرایط داده شده، لازم است } a < -1 \text{ باشد.}$$

$$.244 \quad \text{درست}$$

$$.245 \quad \text{نادرست؛ زیرا ریشه های چهارم عدد } 1, \pm 1 \text{ هستند.}$$

$$.246 \quad \text{درست} \quad .247 \quad \text{دو - قرینه}$$

$$.248 \quad \text{یک - مثبت - منفی} \quad .249 \quad \text{کوچک}$$

$$.250 \quad 0 < a < 1 \quad .251 \quad a < -1$$

$$.252 \quad 64, -2$$

$$.253 \quad \text{پس } a = 4 \text{ و در نتیجه } a^2 + \sqrt{a} = 16 + 2 = 18$$

$$.254 \quad \text{زیرا: } \sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{زیرا: } -0/2$$

$$-\sqrt[4]{0/0016} = -\sqrt[4]{\frac{16}{10000}} = -\sqrt[4]{(\frac{2}{10})^4} = -\frac{2}{10} = -0/2 \quad .255$$

$$(-5)^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-125} = -5 \quad .256$$

$$(0/6)^2 = 0/36 \Leftrightarrow \sqrt{0/36} = 0/6 \quad .257$$

$$3^6 = 729 \Leftrightarrow \sqrt[6]{729} = 3 \quad .258$$

$$\sqrt{169} = 13 \Leftrightarrow 13^2 = 169 \quad .259$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow (5\sqrt{2})^2 = 50 \quad .260$$

$$\sqrt[3]{-72} = -2\sqrt[3]{9} \Leftrightarrow (-2\sqrt[3]{9})^3 = -72$$

$$.261 \quad \text{ابتدا دو عدد مربع کامل می یابیم که عدد ۱۳ بین آن دو عدد باشد، سپس}$$

$$\text{از طرفین جذر می گیریم:} \quad 9 < 13 < 16 \xrightarrow{\text{جذر}} 3 < \sqrt{13} < 4$$

$$.262 \quad \text{مانند پاسخ سؤال قبل عمل می کنیم:}$$

$$49 < 57 < 64 \xrightarrow{\text{جذر}} 7 < \sqrt{57} < 8$$

$$.263 \quad \text{ابتدا مشخص می کنیم } \sqrt{30} \text{ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد و سپس}$$

$$\text{طرفین را در یک منفی ضرب می کنیم. در این حالت جهت نامساوی عوض}$$

$$\text{می شود:} \quad 25 < 30 < 36 \xrightarrow{\text{جذر}} 5 < \sqrt{30} < 6$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} -6 < -\sqrt{30} < -5$$

$$.264 \quad \text{باید ببینیم عدد ۱۹ بین کدام دو عدد صحیح و مکعب کامل قرار دارد}$$

$$\text{و سپس از طرفین فرجه ۳ بگیریم:}$$

$$-27 < -19 < -8 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} -3 < \sqrt[3]{-19} < -2$$

$$.265 \quad \text{می دانیم } 4^3 = 64 \text{ و } 5^3 = 125 \text{، پس:}$$

$$64 < 100 < 125 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} 4 < \sqrt[3]{100} < 5$$

$$.266 \quad \text{می دانیم } 3^4 = 81 \text{ و } 4^4 = 256 \text{، پس:}$$

$$3^4 < 145 < 4^4 \xrightarrow{\sqrt[4]{}} 3 < \sqrt[4]{145} < 4$$

$$.267 \quad \text{می دانیم } 2^5 = 32 \text{ و } 3^5 = 243 \text{، پس:}$$

$$2^5 < 201 < 3^5 \xrightarrow{\sqrt[5]{}} 2 < \sqrt[5]{201} < 3$$

$$.268 \quad \text{می دانیم } 3^5 = 243 \text{ و } 4^5 = 1024 \text{، پس:}$$

$$3^5 < 500 < 4^5 \xrightarrow{\times(-1)} -4^5 < -500 < -3^5$$

$$\xrightarrow{\sqrt[5]{}} -4 < \sqrt[5]{-500} < -3$$

۲۹۴

$$۲ \leq \sqrt[4]{x} \leq ۳ \xrightarrow{\text{به توان ۴}} ۱۶ \leq x \leq ۸۱$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x \in \{۱۶, ۱۷, \dots, ۸۱\}$$

۲۹۵. الف) وقتی $۰ < a < ۱$ باشد، با بزرگ‌شدن توان، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس:

$$a^۴ \geq a^۵$$

ب) وقتی $۰ < a < ۱$ باشد، با بزرگ‌شدن فرجه، عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود. پس:

$$\sqrt{a} \leq \sqrt[۳]{a}$$

۲۹۶. الف) وقتی $a > ۱$ باشد، با بزرگ‌ترشدن توان، عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود. پس:

$$a^۳ \leq a^۴$$

ب) وقتی $a > ۱$ باشد، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس:

$$\sqrt[۴]{a} \leq \sqrt[۵]{a}$$

۲۹۷. الف) وقتی $۰ < a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. پس:

$$a^۵ \leq a^۷$$

ب) وقتی $۰ < a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس:

$$a^۴ \geq a^۶$$

پ) وقتی $۰ < a < ۱$ ، پس a عددی منفی است، لذا $a^۲ < a^۳$ و $a^۴ > a^۵$ در نتیجه:

$$a^۳ \leq a^۴$$

ت) وقتی $۰ < a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس:

$$\sqrt[۴]{a} \geq \sqrt[۵]{a}$$

۲۹۸. الف) وقتی $a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. پس:

$$a^۳ \geq a^۵$$

ب) وقتی $a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن فرجه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. پس:

$$\sqrt[۴]{a} \leq \sqrt[۵]{a}$$

پ) وقتی $a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. پس:

$$a^۲ \leq a^۴$$

ت) چون $a < ۱$ ، پس $a^۷ < ۰$ و $a^۴ > ۰$ است و لذا داریم:

$$a^۷ \leq a^۴$$

۲۹۹. می‌دانیم اگر $a > ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن توان، عدد حاصل نیز بزرگ‌تر می‌شود. داریم:

$$۱۱ > ۱ \Rightarrow ۱۱^۵ < ۱۱^۸$$

۳۰۰. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن توان، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$۰ < ۰/۲ < ۱ \Rightarrow (۰/۲)^۴ > (۰/۲)^۷$$

۳۰۱. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. بنابراین داریم:

$$-۱ < -۰/۱ < ۰ \Rightarrow (-۰/۱)^۷ < (-۰/۱)^۹$$

۳۰۲. می‌دانیم اگر $a < ۱$ ، آن‌گاه با بزرگ‌ترشدن توان‌های فرد، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. داریم:

$$-۳ < -۱ \Rightarrow (-۳)^۳ > (-۳)^۵$$

۳۰۳. می‌دانیم اگر $a < ۱$ ، با بزرگ‌ترشدن توان‌های زوج، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. داریم:

$$-۱۲ < -۱ \Rightarrow (-۱۲)^۴ < (-۱۲)^۶$$

۳۰۴. می‌توان نوشت: $\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱} = \sqrt[۵]{(۰/۱)^۵} = ۰/۱$

$$\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱} = ۰/۱$$

۳۰۵. می‌دانیم اگر $a > ۱$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه عدد کوچک‌تر می‌شود.

$$\sqrt[۴]{۷} > \sqrt[۵]{۷}$$

چون $۷ > ۱$ است، پس:

۳۰۶. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ

می‌شود. چون $\frac{۲}{۳} < ۱$ ؛ پس:

$$\sqrt[۴]{\frac{۲}{۳}} < \sqrt[۵]{\frac{۲}{۳}}$$

۳۰۷. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$ ، آن‌گاه فقط با فرجه فرد a تعریف می‌شود و نیز با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک می‌شود. چون $۰ < ۰/۳ < ۱$ ، پس:

$$\sqrt[۴]{۰/۳} > \sqrt[۵]{۰/۳}$$

۳۰۸. می‌دانیم اگر $a < ۱$ باشد، آن‌گاه فقط فرجه‌های فرد a تعریف می‌شود و نیز با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ می‌شود. چون $-۱ < -۹$ ، پس:

$$\sqrt[۵]{-۹} < \sqrt[۴]{-۹}$$

۳۰۹. در دو حالت، عدد a از ریشه‌های بامعنی خود کوچک‌تر است، یکی این که $۰ < a < ۱$ و دیگر این که $a < -۱$.

در این‌جا طبق فرض a عددی مثبت است، پس برای آن که $a < \sqrt[۴]{a}$ باشد، می‌بایست $۰ < a < ۱$.

۳۱۰. اگر $a > ۱$ یا $۰ < a < ۱$ باشد، آن‌گاه عدد a از ریشه‌های بامعنی خود بزرگ‌تر خواهد بود؛ پس برای آن که $\sqrt[۵]{a} < a$ باشد، می‌بایست $a > ۱$ یا این که $۰ < a < ۱$.

۳۱۱. گفتیم اگر $۰ < a < ۱$ یا $a < -۱$ ، آن‌گاه عدد a از تمام ریشه‌های بامعنی خودش کوچک‌تر است. طبق فرض a عددی منفی است. بنابراین برای آن که نامعادله $a < \sqrt[۴]{a}$ برقرار باشد، لازم است $a < -۱$.

۳۱۲. اعدادی که ریشه سوم آن‌ها با خود آن‌ها برابر است، عبارت‌اند از ۱، صفر و -۱.

۳۱۳. بنا بر توضیحات سؤالات قبل، اگر $a > ۱$ باشد آن‌گاه $a > \sqrt{a}$.

۳۱۴. می‌دانیم اگر $a > ۱$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر:

$$a > ۱ \Rightarrow a > \sqrt[۴]{a} > \sqrt[۵]{a}$$

بنابراین در این‌جا که $a > ۱$ روی محور بالا قرار دارد، معلوم می‌شود که $n = \sqrt[۴]{a}$ ، $p = \sqrt[۵]{a}$ و $q = \sqrt[۴]{a}$ و چون هر عدد مثبت دو ریشه زوج و قرینه دارد، پس $m = -\sqrt[۴]{a}$.

۳۱۵. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد نیز بزرگ می‌شود. به عبارت دیگر:

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow a < \sqrt[۴]{a} < \sqrt[۵]{a}$$

بنابراین در این‌جا چون $۰ < a < ۱$ روی محور بالا قرار دارد، داریم:

$$n = \sqrt[۴]{a}، p = \sqrt[۵]{a}، q = \sqrt[۴]{a}، m = -\sqrt[۴]{a}$$

۳۱۶. می‌دانیم اگر $۰ < a < ۱$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد کوچک می‌شود. البته چون a منفی است، فقط فرجه‌های فرد برای a تعریف می‌شود، به عبارت دیگر:

$$-۱ < a < ۰ \Rightarrow a > \sqrt[۴]{a} > \sqrt[۵]{a}$$

بنابراین با توجه به شکل داریم: $n = \sqrt[۴]{a}$ و $m = \sqrt[۵]{a}$

۳۱۷. می‌دانیم اگر $a < -۱$ ، آن‌گاه با بزرگ‌شدن فرجه، عدد بزرگ‌تر می‌شود. البته فقط فرجه‌های فرد برای a تعریف می‌شود. به عبارت دیگر:

$$a < -۱ \Rightarrow a < \sqrt[۴]{a} < \sqrt[۵]{a}$$

بنابراین با توجه به شکل، داریم:

$$m = \sqrt[۴]{a}، n = \sqrt[۵]{a}$$

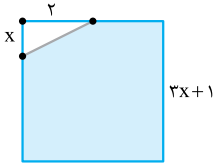
۳۱۸. عدد مطلوب را x می‌گیریم. طبق فرض می‌توان نوشت:

$$\sqrt[۵]{x} = \sqrt[۴]{-۶۴} + ۶ \Rightarrow \sqrt[۵]{x} = -۴ + ۶ \Rightarrow \sqrt[۵]{x} = ۲$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۵}} x = ۲^۵ = ۳۲$$

۰/۷۵	۱۷	نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید. (الف) شدت بارندگی (کم، زیاد، متوسط) (ب) تعداد ماشین‌های یک پارکینگ (پ) نوع آلاینده‌گی هوا
۲۰	جمع نمرات	«موفق باشید»

ردیف	امتحان شماره	پایه دهم دوره دوم متوسطه	رشته: ریاضی و فیزیک - علوم تجربی	تاریخ امتحان: خردادماه
نمره				

۰/۷۵	۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. (الف) اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $A' - B = A' \cap B'$. (ب) اگر n و k دو عدد طبیعی باشند، آن‌گاه $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$. (پ) در پرتاب ۶ سکه، احتمال این‌که همه سکه‌ها مثل هم ظاهر شوند $\frac{1}{3^3}$ است.
۰/۷۵	۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (الف) مجموع طول و عرض پایین‌ترین نقطه سهمی $y = 2x^2 - 8x + 5$ برابر است. (ب) اگر تابع f همانی باشد و $f(f(x)) + f(4) = 3$ ، آن‌گاه مقدار x برابر است. (پ) متغیری که اگر دو مقدار a و b را اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز می‌تواند اختیار کند متغیر است.
۰/۵	۳	گزینه درست را انتخاب کنید. (الف) اگر نقطه $P(x, -2x)$ روی دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\cos \theta$ کدام است؟ (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۳) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ب) حاصل $\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7}\right)$ کدام است؟ (۱) $\left(\frac{11}{7}\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{8}\right)$ (۳) $\left(\frac{11}{6}\right)$ (۴) $\left(\frac{20}{13}\right)$
۱/۷۵	۴	(الف) در یک الگوی خطی جمله سوم و سیزدهم به ترتیب -4 و 16 هستند. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید. (ب) جمله پنجم یک دنباله هندسی برابر 2 است. حاصل ضرب 9 جمله اول این دنباله را به دست آورید.
۱/۷۵	۵	(الف) اگر $A = 3 \sin x - 2$ ، حداقل و حداکثر A را تعیین کنید. (ب) اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ را به دست آورید.
۱/۲۵	۶	کسر $A = \frac{\sqrt{\sqrt{x-1}+1} \times \sqrt[4]{x-2} \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$ را ساده کنید. ($x > 2$)
۱	۷	اگر $a = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$ باشد، حاصل $\left(\frac{3}{a} - 1\right)^2$ را به دست آورید.
۱/۲۵	۸	در مربع شکل مقابل، مساحت قسمت سایه‌زده 15 سانتی‌متر مربع است، مقدار x را به دست آورید. (نوشتن راه‌حل الزامی است). 
۲	۹	حدود m را طوری به دست آورید که نمودار سهمی $y = \frac{1}{4}x^2 + (m-1)x + m-1$ همواره بالای محور x ها باشد.

۱	۱۰	الف) اگر $f = \begin{cases} x^2 + 3x & x \leq 1 \\ 2x + m & x \geq 1 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار m را به دست آورید. ب) مقدار $f(f(-4))$ را به دست آورید.
۱	۱۱	طول مستطیلی از نصف عرض آن ۲ واحد بیشتر است، تابعی بنویسید که قطر مستطیل را برحسب طول آن بیان کند.
۱/۲۵	۱۲	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -2 \leq x < 0 \\ 3 & 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.
۱/۵	۱۳	چند عدد طبیعی سه‌رقمی با ارقام متمایز و بزرگ‌تر از ۴۲۶ می‌توان نوشت؟
۱/۲۵	۱۴	الف) مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ، چند زیرمجموعه ۳ یا ۴ عضوی دارد که شامل عدد ۲ و ۳ باشد ولی شامل عدد ۷ نباشد؟ ب) با اعداد مجموعه A چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟
۱	۱۵	خانواده‌ای سه فرزند دارد. الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید. ب) احتمال این که فرزند دوم فقط یک برادر داشته باشد، را به دست آورید.
۱/۲۵	۱۶	مهرین، سارا و ۵ نفر دیگر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بنشینند. چه‌قدر احتمال دارد که دقیقاً دو نفر بین مهرین و سارا قرار بگیرند؟
۰/۷۵	۱۷	الف) مرحله اول و چهارم علم آمار را به ترتیب نام ببرید. ب) نوع متغیر «مدرک تحصیلی افراد» را مشخص کنید.
۲۰		جمع نمرات «موفق باشید»