

فهرست مطالب

فصل اول: آمار و احتمال

درسنامه
پاسخ

سوال

- | | | |
|----|----|---|
| ۲۹ | ۵ | درس ۱- قسمت اول: اصل جمع و اصل ضرب |
| ۳۰ | ۶ | درس ۱- قسمت دوم: فاکتوریل و جایگشت |
| ۳۱ | ۷ | درس ۱- قسمت سوم: تبدیل و ترکیب |
| ۳۵ | ۹ | درس ۲- قسمت اول: آزمایش تصادفی - فضای نمونه |
| ۳۶ | ۱۰ | درس ۲- قسمت دوم: پیشامد |
| ۳۸ | ۱۲ | درس ۲- قسمت سوم: احتمال یک پیشامد |
| ۴۳ | ۱۵ | درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل |

فصل دوم: الگوهای خطی

- | | | |
|----|----|---|
| ۴۶ | ۱۷ | درس ۱- قسمت اول: مدل سازی |
| ۴۶ | ۱۷ | درس ۱- قسمت دوم: دنباله |
| ۵۱ | ۲۰ | درس ۲- قسمت اول: دنباله های حسابی |
| ۵۵ | ۲۱ | درس ۲- قسمت دوم: مجموع جملات دنباله حسابی |

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

- | | | |
|----|----|-------------------------------------|
| ۵۷ | ۲۲ | درس ۱- قسمت اول: دنباله هندسی |
| ۶۱ | ۲۴ | درس ۱- قسمت دوم: مجموع دنباله هندسی |
| ۶۳ | ۲۵ | درس ۲: ریشه n ام و توان های گویا |
| ۶۶ | ۲۷ | درس ۳: تابع نمایی |

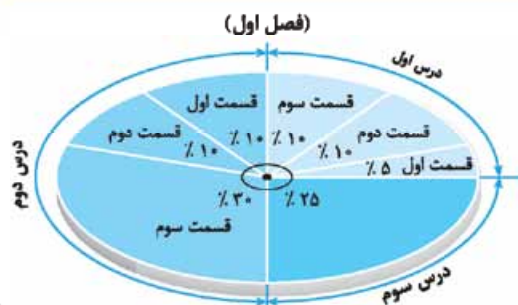
ضمیمه: امتحانات نهایی

- | | | |
|----|----|--------------------------|
| ۷۷ | ۷۰ | امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰ |
| ۷۷ | ۷۱ | امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۰ |
| ۷۸ | ۷۳ | امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱ |
| ۷۹ | ۷۴ | امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۱ |
| ۷۹ | ۷۵ | امتحان نهایی دی ۱۴۰۱ |

فصل ۱

مولکول‌ها آمار و احتمال درستی

مشاوره



فصل اول کتاب ریاضی و آمار (۳) با عنوان آمار و احتمال شامل سه درس است که در امتحانات نوبت اول شامل ۱۵ نمره و در امتحانات نهایی خرداد ۵ نمره و در شهریور و دی ۸ نمره می‌باشد. در این فصل هر کدام از درس‌های ۱ و ۲ را به سه قسمت تقسیم کرده‌ایم تا دسته‌بندی مطالب برای شما راحت‌تر شود اما درس سوم به دلیل این که شامل تعاریف است در یک قسمت ارائه شده است. اهمیت هر قسمت در امتحانات نهایی را در نمودار مقابل می‌بینید.

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

درس ۱: قسمت اول: اصل جمع و اصل ضرب

درس ۱

درس‌نامه ۱ - قسمت اول را در صفحه ۲۹ ببینید.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱- اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به طریق انجام‌پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)

۲- اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام‌پذیر باشند و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به طریق می‌توان عمل A یا عمل B را انجام داد. (مشابه خرداد ۱۳۰۰)

۳- از بین ۴ کتاب فارسی مختلف، ۳ کتاب ریاضی متفاوت و ۵ کتاب فلسفه متفاوت به چند طریق می‌توان یک کتاب انتخاب کرد؟

۴- می‌خواهیم از بین ۶ دانش‌آموز کلاس دهم، ۷ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۵ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

۵- می‌خواهیم از بین ۲ سیب، ۳ کیوی و ۴ نارنگی یک میوه انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این میوه را انتخاب کنیم؟ (دی ۱۴۰۰)

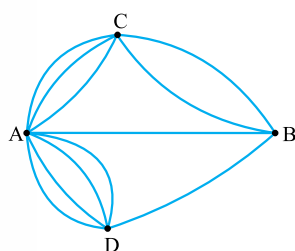
۶- مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز، ۲ کتاب عربی متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز به چند طریق می‌تواند یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟ (دی ۹۹ - شهریور ۱۴۰۰)

۷- می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ (شهریور ۹۹)

۸- یک کارخانه تولید تلفن همراه، گوشی جدید خود را در ۳ سایز متفاوت، ۵ رنگ مختلف و ۳ ظرفیت حافظه مختلف تولید کرده است. خریدار برای خرید یک گوشی جدید از محصولات این کارخانه چند انتخاب دارد؟

۹- بین چهار شهر A ، B ، C و D مطابق شکل مقابل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از

(خرداد ۱۴۰۰)



شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟

۱۰- مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۲ نفر از سهام‌داران را به دو گروه ۵ نفره A و ۷ نفره B دسته‌بندی کرد. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی و اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

ا) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط با یک نفر از این ۱۲ نفر مشورت کند؟

ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر گروه یک نفر را جهت مشورت انتخاب کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

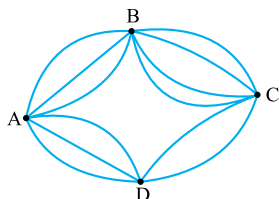
۱۱- در منوی یک رستوران ۴ نوع غذا، ۵ نوع نوشابه و ۳ نوع پیش‌غذا وجود دارد. به چند طریق می‌توان:

۱- یک نوع غذا یا یک نوع نوشابه سفارش داد؟

۲- یک نوع پیش‌غذا و یک نوع نوشابه سفارش داد؟

۱۲- مطابق شکل مقابل چهار شهر A، B، C و D با راه‌های دوطرفه با هم ارتباط دارند. به چند طریق می‌توان:

(کار در کلاس کتاب درسی)



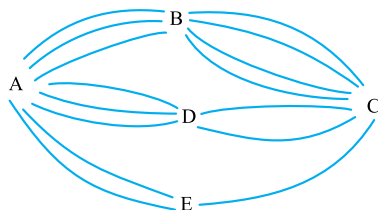
۱- از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟

۲- از شهر B به شهر D سفر کرد؟

۱۳- بین پنج شهر A، B، C، D و E مطابق شکل مقابل راه‌هایی وجود دارد که همه دوطرفه‌اند. به چند طریق

(خرداد ۱۴۰۰ خارج - تمرین کتاب درسی)

می‌توان از شهر D بدون عبور از شهر A به شهر E مسافرت کرد؟

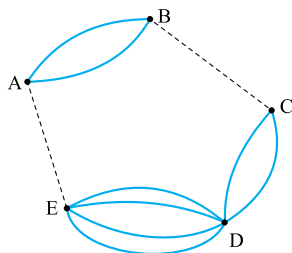


۱۴- مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2^2 + 3^2 + 3 \times 4)$ باشد.

۱۵- تعداد راه‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل مقابل بتوان به

(تمرین کتاب درسی)

۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



صفحه ۷۵ کتاب درسی

قسمت دوم: فاکتوریل و جایگشت

درس ۱

درس‌نامه ۱ - قسمت دوم را در صفحه ۳۰ ببینید.

■ درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

(شهریور ۹۹ و ۱۴۰۰ - خرداد ۱۴۰۰)

۱۶- برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $1! = 1$ و $0! = 1$ تعریف می‌کنیم.

(خرداد ۹۹ خارج - خرداد ۱۴۰۱ - خرداد ۱۴۰۱ خارج - خرداد ۹۹)

۱۷- ساده‌شده عبارت $2! \div 6!$ برابر ۳! است.

(خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۱۸- حاصل عبارت $4! - 7!$ برابر ۳! است.

۱۹- حاصل $4! - 5!$ برابر ۹۶ است.

۲۰- حاصل $\frac{7!}{3!}$ برابر ۱۲۰ است.

(دی ۹۹ خارج)

۲۱- تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر n! است.

۲۲- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «SABZ» برابر ۲۴! است.

■ جاهای خالی را با پاسخ درست کامل کنید.

(خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۲۳- مقدار $0! \times (1! + 4!)$ برابر است.

(خرداد ۱۴۰۱ خارج و ۹۹ - خرداد ۱۴۰۰ - شهریور ۹۸ - دی ۹۹)

۲۴- تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است.

(دی ۹۹ خارج)

۲۵- هر حالت از کنار هم قرارگرفتن n شیء متمایز را یک n تایی از آن شیء می‌نامیم.

(دی ۱۴۰۰)

۲۶- هر حالت از کنار هم قرارگرفتن ۷ شیء متمایز را یک جایگشت از آن ۷ شیء می‌نامیم.

(شهریور ۱۴۰۰ - مشابه دی ۱۴۰۰)

۲۷- هر حالت از کنار هم قرارگرفتن ۵ شیء متمایز را یک از آن ۵ شیء می‌نامیم.

■ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

(خرداد ۱۴۰۰)

۲۸- حاصل $\frac{6!}{3!}$ کدام است؟

۳۵ (۴)

۱۲۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

۲۹- حاصل $\frac{7! \times 0!}{5! \times 2!}$ کدام است؟

- ۲۴ (۱) ۴۲ (۲) ۳۶ (۳) ۲۱ (۴)

۳۰- تعداد جایگشت‌های حروف a, b و c کدام است؟

- ۳ (۱) ۱ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴)

■ حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۳۱- $\frac{8! \times 3!}{4! \times 5! \times 0!}$

۳۲- $(2! + 3!) \times 4!$

۳۳- $\frac{11!}{4! \times 7!}$

۳۴- ثابت کنید تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر n! است.

۳۵- با حروف کلمه «ریاست» و بدون تکرار حروف (بامعنی و یا بی‌معنی)، چند کلمه پنج‌حرفی می‌توان نوشت که با «ر» شروع و به «س» ختم شود؟ (خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۳۶- با حروف کلمه «شارمین» و بدون تکرار حروف چند کلمه شش‌حرفی بامعنی و یا بی‌معنی می‌توان نوشت به طوری که:

۱- هیچ شرطی نداشته باشد.

۲- با حرف «ش» شروع و به حرف «ن» ختم شود.

۳- با حرف نقطه‌دار شروع شود.

۳۷- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۵ رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که:

۱- هیچ شرطی نداشته باشد.

۲- زوج باشد.

۳- مضرب ۵ باشد.

۳۸- پنج نفر به نام‌های A, B, C, D و E به یک همایش جهت سخنرانی دعوت شده‌اند.

۱- چند ترتیب سخنرانی برای آن‌ها وجود دارد؟

۲- به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند به طوری که A نفر آخر باشد؟

۳- به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند به طوری که B نفر اول نباشد؟

۴- به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند به طوری که تعداد نفرات قبل و بعد از D برابر باشند؟

صفحه ۷۱ کتاب درسی

قسمت سوم: تبدیل و ترکیب

درس ۱

درس‌نامه ۱ - قسمت سوم را در صفحه ۳۱ ببینید.

■ جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

۳۹- در انتخاب r شیء از بین n شیء، جابه‌جایی اشیا اهمیت ندارد. (شهریور ۱۴۰۰)

۴۰- تعداد انتخاب r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد را با نماد $P(n, r)$ نشان می‌دهیم و به صورت محاسبه می‌شود.

۴۱- حاصل عبارت $P(8, 3)$ برابر است.

۴۲- حاصل عبارت $\left(\frac{9}{6}\right)$ برابر می‌باشد. (شهریور ۹۸ - دی ۹۹ خارج)

۴۳- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ به تعداد عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت.

۴۴- به طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب و در یک قفسه بچینیم. (خرداد ۹۹ خارج)

۴۵- به طریق می‌توانیم ۳ نفر از بین ۱۰ کارمند یک اداره را برای اعزام به مأموریت انتخاب کنیم.

۴۶- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دارای زیرمجموعه ۳ عضوی است. (خرداد ۹۹ خارج)

■ گزینه درست را انتخاب کنید.

۴۷- حاصل عبارت $P(1, 2)$ کدام است؟

- ۵۵ (۱) ۴۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴)

۴۸- حاصل عبارت $P(2,2)$ کدام است؟

(خرداد ۱۴۰۰)

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۹- با ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می توان تشکیل داد؟

(خرداد ۱۴۰۰)

- ۴۲ (۱) ۱۵ (۲) ۲۰ (۳) ۵۶ (۴)

۵۰- با ۱۰ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند وتر می توان تشکیل داد؟

- ۳۶ (۱) ۱۲۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۲ (۴)

۵۱- حاصل عبارت $\binom{7}{2} + \binom{7}{3}$ کدام است؟

- ۵۶ (۱) ۴۵ (۲) ۳۶ (۳) ۵۲ (۴)

۵۲- تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ کدام است؟

- ۳۶ (۱) ۴۵ (۲) ۵۶ (۳) ۶۰ (۴)

(دی ۱۴۰۰)

۵۳- با حروف کلمه «مهرسان» و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بی معنی):

چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت؟

چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که با «م» شروع شوند؟

(خرداد ۱۴۰۱ خارج - شهریور ۹۹)

۵۴- با حروف کلمه «رهنما» و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بدون معنی):

چند کلمه سه حرفی می توان نوشت؟

چند کلمه چهار حرفی می توان نوشت که با «م» شروع و به «ن» ختم شوند؟

(شهریور ۹۸ و ۱۴۰۰ - خرداد ۹۹ - دی ۹۹)

۵۵- به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهاررقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۵۶- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ با ارقام متمایز می توان ساخت؟

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۵۷- با توجه به ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ و بدون تکرار ارقام به سؤالات زیر پاسخ دهید:

چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟

چند عدد ۳ رقمی فرد می توان نوشت؟

چند عدد ۳ رقمی که رقم یکان آن فقط رقم ۶ باشد می توان نوشت؟

۵۸- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ مفروض است. با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد پنج رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟ (دی ۹۷ خارج)

(دی ۹۷ - خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۵۹- ارقام ۱ تا ۹ مفروض اند: (بدون تکرار ارقام)

چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟

چند عدد ۴ رقمی زوج می توان نوشت؟

۶۰- ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ مفروض اند. با این ارقام:

چند عدد سه رقمی و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

چند عدد سه رقمی فرد و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

چند عدد سه رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۶۱- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۴ رقمی و مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۶۲- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۴ رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می توان نوشت به طوری که مضرب ۵ نباشند؟

(دی ۹۹ خارج)

۶۳- به چند طریق می توان ۳ کتاب را از بین ۱۰ کتاب انتخاب کرده و در یک ردیف از کتابخانه بچینیم؟

۶۴- یک دوره بازی فوتبال، با شرکت ۸ تیم و به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

(خرداد ۹۹ - شهریور ۹۸)

۶۵- به چند طریق می توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد؟

(خرداد ۹۹)

۶۶- به چند طریق می توان ۳ توپ هم رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟

(خرداد ۹۹)

۶۷- به چند طریق می توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟

۶۸- می خواهیم از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۶ دانش آموز انسانی یک تیم ۶ نفره انتخاب کنیم. به چند طریق می توان این تیم را تشکیل داد به طوری که کاپیتان تیم فرد مشخصی از دانش آموزان انسانی باشد؟

۶۹- می‌خواهیم از بین ۵ اقتصاددان و ۶ حقوق‌دان یک گروه ۴ نفره تشکیل دهیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است به طوری که:

الف) تعداد حقوق‌دانان بیشتر باشد.

ب) تعداد حقوق‌دان‌ها و اقتصاددان‌ها برابر باشد.

پ) حداکثر ۲ حقوق‌دان در گروه باشد.

ت) حداقل ۳ حقوق‌دان در گروه باشد.

ث) همگی یک تخصص داشته باشند.

(شهریور ۹۹ - خرداد ۹۸ - دی ۹۸)

۷۰- مجموعهٔ ۸ عضوی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

(خرداد ۱۴۰۰ خارج - دی ۹۷ خارج)

۷۱- مجموعهٔ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی و شامل رقم ۷ دارد؟

۷۲- مجموعهٔ $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ مفروض است.

الف) چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی و فاقد a و b دارد؟

ب) چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی و شامل a و فاقد b دارد؟

پ) چند زیرمجموعهٔ حداقل ۷ عضوی دارد؟

ت) چند زیرمجموعهٔ حداکثر سه‌عضوی دارد؟

یا $A \rightarrow D \rightarrow C$ را انتخاب کرد (تا این‌ها می‌شه اصل جمع) اما مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ به $3 \times 4 = 12$ طریق و مسیر $A \rightarrow D \rightarrow C$ به $3 \times 2 = 6$ طریق امکان‌پذیر است (توهر کلمه از این‌ها اصل ضرب استفاده کردیم)، پس تعداد راه‌های سفر از A به C برابر است با: $3 \times 4 + 3 \times 2 = 18$

پاسخ‌سؤالات

$$1. m \times n$$

$$2. m + n$$

۳. کتاب انتخابی، فارسی یا ریاضی یا فلسفه است (به «یا» توجه کن)، پس طبق اصل جمع داریم: $4 + 3 + 5 = 12$ = تعداد انتخاب‌ها

۴. دانش‌آموز انتخابی کلاس دهم یا کلاس یازدهم یا کلاس دوازدهم است. پس طبق اصل جمع به $6 + 7 + 5 = 18$ طریق می‌توانیم یک دانش‌آموز را انتخاب کنیم.

۵. میوه انتخابی، سیب یا کیوی یا نارنگی است. سیب را به ۲ طریق، کیوی را به ۳ طریق و نارنگی را به ۴ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم. پس این کار به $2 + 3 + 4 = 9$ طریق انجام‌پذیر است.

۶. مهدی کتاب ریاضی را به ۳ طریق و کتاب عربی را به ۲ طریق و کتاب ادبیات را به ۴ طریق می‌تواند انتخاب کند، پس در کل طبق اصل ضرب این کار به $3 \times 2 \times 4 = 24$ طریق انجام‌پذیر است.

۷. خودروی انتخابی سواری یا وانت یا کامیون است، پس طبق اصل جمع تعداد حالتی که می‌توان یک خودرو انتخاب کرد برابر است با: $10 + 12 + 6 = 28$

۸. کارخانه $3 \times 5 \times 3 = 45$ گوشی مختلف تولید می‌کند. بنابراین خریدار برای خرید یک گوشی جدید ۴۵ انتخاب دارد.

۹. باید از مسیر $C \rightarrow A \rightarrow D$ استفاده کنیم. از C به A سه راه و از A به D چهار راه وجود دارد، پس می‌توان به $3 \times 4 = 12$ طریق از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد.

۱۰. الف) مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A یا یک نفر از گروه B را انتخاب کند، پس طبق اصل جمع به $5 + 7 = 12$ طریق می‌تواند با یک نفر مشورت کند.

ب) مدیرعامل می‌تواند به ۵ طریق یک نفر از گروه A انتخاب کند و به ازای هر انتخاب از گروه A، به ۷ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B انتخاب کند. بنابراین طبق اصل ضرب به $5 \times 7 = 35$ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

۱۱. الف) در منو ۴ نوع غذا و ۵ نوع نوشابه وجود دارد، پس طبق اصل جمع به $4 + 5 = 9$ طریق می‌توان یک نوع غذا یا یک نوع نوشابه سفارش داد.

ب) در منو ۳ نوع پیش‌غذا و ۵ نوع نوشابه وجود دارد، پس طبق اصل ضرب به $3 \times 5 = 15$ طریق می‌توان یک نوع پیش‌غذا و یک نوع نوشابه سفارش داد.

۱۲. الف) از شهر A به B، ۳ راه و از شهر B به C، ۴ راه وجود دارد، پس به $3 \times 4 = 12$ طریق می‌توان از A به C از طریق شهر B سفر کرد.

ب) برای سفر از B به D می‌توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow C \rightarrow D$ یا $B \rightarrow A \rightarrow D$ را انتخاب کرد. مسیر $B \rightarrow C \rightarrow D$ به $4 \times 2 = 8$ طریق و مسیر $B \rightarrow A \rightarrow D$ به $3 \times 3 = 9$ طریق امکان‌پذیر است.

پس تعداد راه‌های سفر از B به D برابر است با: $4 \times 2 + 3 \times 3 = 17$

قسمت اول:

اصل جمع و اصل ضرب

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

فصل ۱

درس ۱

اصل جمع

اصل جمع: اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام‌پذیر باشند و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m + n$ طریق می‌توان عمل A یا عمل B را انجام داد.

نکته: اصل جمع معادل «یا» در زبان فارسی است. (هر یا برای انضمام‌دادن هندتاکار، بینشون «یا» میاریم، می‌شه اصل جمع)

نکته: اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.

مثال: مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز، ۲ کتاب عربی متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز، به چند طریق می‌تواند یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

(دی ۹۹ - شهریور ۱۴۰۰ - مشابه فعالیت کتاب درسی)

پاسخ: مهدی باید کتاب ریاضی یا کتاب عربی یا کتاب ادبیات انتخاب کند، پس به $3 + 2 + 4 = 9$ طریق می‌تواند کتاب مورد نظر را انتخاب کند.

مواست هست که اصل جمع رو برای بیش از دو عمل تعمیم داریم.

اصل ضرب

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است.

نکته: اصل ضرب معادل «و» در زبان فارسی است. (وقتی برای انضمام‌دادن هندتاکار، از «و» استفاده کردیم، باید بریم سراغ اصل ضرب)

نکته: اصل ضرب به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.

مثال: سه شهر A، B و C مطابق شکل زیر با راه‌های دوطرفه با هم ارتباط دارند. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

(تمرین کتاب درسی)

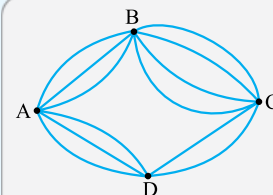
پاسخ: از شهر A به شهر B دو راه و از شهر B به شهر C سه راه وجود دارد، پس به $2 \times 3 = 6$ طریق می‌توان از A به C رفت. حال از هر کدام از ۶ طریق به شهر C برویم، برای برگشت ۶ انتخاب وجود دارد، پس در کل به $6 \times 6 = 36$ طریق می‌توان مسافرت رفت و برگشت انجام داد.

نکته: در بعضی مسائل مجبوریم هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده کنیم.

مثال: مطابق شکل مقابل چهار شهر A، B، C و D با راه‌های دوطرفه با هم ارتباط دارند. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟

(کار در کلاس کتاب درسی - خرداد خارج ۱۴۰۰)

پاسخ: برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$



مثال حاصل $\frac{3! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!}$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

(مثال کتاب درسی)

پاسخ: $\frac{3! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{56}$

جایگشت

جایگشت: هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن شیء می‌نامیم. مثلاً جایگشت‌های سه حرف a, b, c به صورت $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ مقابل است:

نکته تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر است با $n!$. مثلاً همان‌طور که دیدید تعداد جایگشت‌های سه حرف a, b, c برابر $3! = 6$ بود. اثبات: اگر برای هر کدام از اشیا یک مکان در نظر بگیریم، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $n-1$ انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب وجود دارد. بنابر اصل ضرب کل حالت‌ها برابر $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ می‌باشد.

$$\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \dots \times \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{n} = n!$$

اثبات فوق فعالیت کتاب درسیه.

مثال با ارقام $7, 6, 5, 4, 3$ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(فعالیت کتاب درسی)

پاسخ: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5} = 5! = 120$$

توجه کنید که چون ۵ رقم داریم و تعداد اعداد ۵ رقمی را می‌خواهیم می‌توانیم مستقیماً بگوییم $5! = 120$ عدد می‌توان نوشت.

نکته برای به دست آوردن تعداد جایگشت‌ها، اگر یک یا چند مکان خاص داشتیم (مکان خاص اونیه که یه شرطی داره) ابتدا باید تعداد حالات ممکن آن مکان‌ها را تعیین کنیم، سپس سراغ پرکردن بقیه مکان‌ها برویم. (در مواردی که مکان خاص وجود داره هتماً باید از اصل ضرب کمک بگیریم و $n!$ رنگه به کارمون نمیاد.)

مثال با حروف کلمه «مساحت» و بدون تکرار حروف: (تمرین کتاب درسی)

(الف) چند کلمه ۵ حرفی با معنی یا بی‌معنی می‌توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۵ حرفی با معنی یا بی‌معنی می‌توان نوشت که با «م» شروع و به «ح» ختم شوند؟

پاسخ: (الف) به کمک اصل ضرب داریم:

$$\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5} = 5! = 120$$

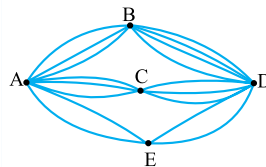
(ب) مکان سمت راست باید با «م» پر شود، پس ۱ حالت و مکان سمت چپ هم باید با «ح» پر شود، پس آن هم ۱ حالت خواهد داشت:

$$\frac{1}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = 6$$

(توجه کن که تو قسمت (الف) مستقیماً می‌تونستی بگی $5! = 120$ اما تو قسمت

(ب) هتماً باید از اصل ضرب ببری.)

۱۳. باید یکی از دو مسیر $D \rightarrow A$ یا $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ را طی کنیم. مسیر $D \rightarrow A$ به ۳ طریق و مسیر $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ به $2 \times 4 \times 3 = 24$ طریق امکان پذیر است. پس تعداد راه‌های سفر از شهر D به A بدون عبور از شهر E برابر است با:



۱۴. پنج شهر A, B, C, D و E مطابق شکل مقابل با راه‌های دوطرفه با هم ارتباط دارند. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟

۱۵. فرض می‌کنیم تعداد راه‌های مورد نیاز از شهر B به C برابر x و از شهر A به E برابر y باشد. برای سفر از شهر A به D باید مسیرهای $A \rightarrow E \rightarrow D$ یا $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ را طی کرد. مسیر $A \rightarrow E \rightarrow D$ به $4 \times y$ و مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ به $2 \times x \times 2$ طریق امکان پذیر است. پس تعداد کل راه‌هایی که می‌توان از A به D سفر کرد برابر $4y + 2 \times x \times 2$ است که باید مساوی 20 باشد، پس:

$$4y + 2 \times x \times 2 = 20 \Rightarrow 4y + 4x = 20 \Rightarrow 4(y + x) = 20$$

$$\Rightarrow y + x = \frac{20}{4} = 5$$

بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

قسمت دوم:

فاکتوریل و جایگشت

صفحه ۵ تا ۷ کتاب درسی

فاکتوریل

نماد فاکتوریل: اگر n یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد، آن‌گاه $n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ (یعنی ضرب n در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از n) را با $n!$ (بنفونین n فاکتوریل) نشان می‌دهیم:

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

مثلاً $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ است.

قرارداد برای اعداد صفر و یک، $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می‌کنیم.

نکته در حالت کلی فاکتوریل روی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم پخش نمی‌شود.

$$\begin{pmatrix} + \\ - \\ \times \\ \div \end{pmatrix} n! \neq m! \begin{pmatrix} + \\ - \\ \times \\ \div \end{pmatrix} n!$$

مثلاً $\frac{8!}{4!}$ برابر $2!$ نیست یا $4! + 3!$ برابر $7!$ نمی‌باشد.

نکته $n!$ را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

$$n! = \overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}^{(n-1)!} = n \times (n-1)!$$

$$n! = n \times (n-1) \times \overbrace{\dots \times 3 \times 2 \times 1}^{(n-2)!} = n \times (n-1) \times (n-2)!$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \overbrace{\dots \times 3 \times 2 \times 1}^{3!} = n \times (n-1) \times \dots \times 3!$$

کاربرد نمایش‌های بالا برای $n!$ در ساده‌کردن عبارات کسری است.

۳۸. الف) جایگشت‌های ۵ تایی از ۵ نفر را می‌خواهیم، پس:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ب) یک مکان خاص داریم:

$$\frac{4}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} = 24 \quad \{A\}$$

نفر اول نفر دوم ...

پ) B نباید در مکان اول باشد، پس:

$$\frac{4}{\downarrow} \times \frac{4}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} = 96 \quad \{A, C, D, E\}$$

ت) واضح است که D باید نفر وسط باشد، پس:

$$\frac{4}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} = 24 \quad \{D\}$$

قسمت سوم:

تبدیل و ترکیب

صفحه ۷ تا کتاب درسی

در این قسمت می‌خواهیم r شیء از n شیء، انتخاب کنیم. اگر بعد از انتخاب r شیء از بین n شیء، جابه‌جایی اشیای انتخاب‌شده اهمیت داشته باشد، تبدیل r شیء از n شیء است و اگر جابه‌جایی اشیای انتخاب‌شده اهمیت نداشته باشد، ترکیب r شیء از n شیء است. (به بار دیگه بفون، فرق تبدیل و ترکیب رو کامل بفهمی)

تبدیل r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد را با نماد $P(n, r)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال با حروف کلمه «شهسواری» چند کلمه ۴ حرفی بامعنی و بی‌معنی

و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

پاسخ: باید ۴ حرف از ۷ حرف کلمه «شهسواری» انتخاب کنیم و چون جابه‌جایی آن‌ها پس از انتخاب کلمه جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد، داریم:

$$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 840$$

نکته تبدیل r شیء از n شیء را می‌توانیم به کمک اصل ضرب هم به دست آوریم. مثلاً برای حل مثال بالا، ۴ مکان در نظر می‌گیریم و داریم:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

مثال با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام

می‌توان ساخت؟

پاسخ: روش اول: باید ۳ رقم از ۶ رقم داده‌شده انتخاب کنیم که چون جابه‌جایی آن‌ها پس از انتخاب عدد جدیدی می‌سازد، پس:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

پاسخ سوالات

۱۶. درست

۱۷. نادرست

۱۸. نادرست

۱۹. درست. $5! - 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 - 24 = 96$

۲۰. نادرست $\frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 840$

۲۱. نادرست. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

۲۲. درست. $\frac{4}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} = 4! = 24$

۲۳. $(4! + 1!) \times 0! = (4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1) \times 1 = 25$

۲۴. $n!$

۲۵. جایگشت

۲۶. ۷ تایی

۲۷. جایگشت ۵ تایی

۲۸. گزینه «۳»

۲۹. گزینه «۴»

۳۰. گزینه «۳»

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

$$\frac{7! \times 0!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5! \times 1}{5! \times 2 \times 1} = 21$$

$$\frac{3}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} = 3! = 6$$

$$\frac{8! \times 3!}{4! \times 5! \times 0!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5! \times 3!}{4 \times 3 \times 2 \times 5! \times 1} = 2 \times 7 \times 6 = 84$$

$$(2! + 3!) \times 4! = (2 \times 1 + 3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = (2 + 6) \times 24 = 8 \times 24 = 192$$

$$\frac{11!}{4! \times 7!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 11 \times 10 \times 3 = 330$$

۳۴. اثبات در متن درس آمده است.

۳۵. دو مکان خاص وجود دارد، به کمک اصل ضرب داریم:

$$\frac{1}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} = 6$$

۳۶. الف) کلمه «شارمین» شش حرف دارد و چون کلمه شش حرفی می‌خواهیم تعداد آن‌ها (هرف تعداد جایگشت‌های ۶ تایی از ۶ حرف می‌شه) برابر است با:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

ب) دو مکان خاص داریم، پس:

$$\frac{1}{\downarrow} \times \frac{4}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} = 24$$

پ) یک مکان خاص داریم:

$$\frac{1}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{4}{\downarrow} \times \frac{5}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} = 360 \quad \{ش, ی, ن\}$$

۳۷. الف) ۵ رقم داریم و تعداد اعداد سه‌رقمی را می‌خواهیم، پس تعداد آن‌ها برابر است با:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ب) یک مکان خاص داریم، چون اعداد زوج را می‌خواهیم باید رقم یکان ۲ یا ۴ باشد، پس:

$$\frac{1}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{4}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} = 48 \quad \{2, 4\}$$

پ) یک مکان خاص داریم، چون اعداد مضرب ۵ را می‌خواهیم و رقم یکان باید

۵ باشد. پس:

$$\frac{1}{\downarrow} \times \frac{2}{\downarrow} \times \frac{3}{\downarrow} \times \frac{4}{\downarrow} \times \frac{1}{\downarrow} = 24 \quad \{5\}$$

را با نماد $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

از تعریف‌ها به صورت یاقالی یا درست و نادرست سؤال می‌آید. با دقت بفون.

نکته C_r^n یا $\binom{n}{r}$ همان $P(n, r)$ است که تقسیم بر $r!$ شده است.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!}$$

مثال به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

پاسخ: در ساختن تیم با جابه‌جایی افراد انتخاب‌شده تیم جدیدی تولید نمی‌شود. بنابراین از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$= \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

نکته تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{r}$ است. (می‌دانیم در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت ندارد، پس هر ۲ عضوی که از یک مجموعه n عضوی انتخاب کنیم یک زیرمجموعه r عضوی می‌سازد.)

مثال مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مفروض است.

(الف) چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد؟

(ب) چند زیرمجموعه چهارعضوی دارد که شامل عضو ۵ باشند؟

پاسخ: (الف) کافی است ۳ عضو از ۸ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 56$$

(ب) عضو ۵ باید در زیرمجموعه باشد {۵, _ , _}، بنابراین باید ۳ عضو از ۷ عضو باقی‌مانده انتخاب کنیم.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

پاسخ‌سؤالات

۲۹. ترکیب

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۴۰.

$$P(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336 \quad \text{۴۱. زیرا:}$$

۴۲. زیرا: ۸۴

با توجه به فرمول ترکیب که به صورت $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$ است، داریم:

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times (9-6)!} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

۴۳. زیرا: روش اول: کافی است ۳ رقم از ۵ رقم داده‌شده انتخاب کنیم و چون جابه‌جایی ارقام، عدد جدید می‌سازد به کمک تبدیل داریم:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

روش دوم: می‌توانیم از اصل ضرب استفاده کنیم: $5 \times 4 \times 3 = 60$

نکته اگر در جایگشت r شیء از n شیء، مکان یا مکان‌های خاص داشتیم، حتماً باید از اصل ضرب استفاده کنیم. (به مثال زیر توجه کن، همه حالت‌ها رو بررسی کردیم.)

مثال ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ مفروض‌اند. با این ارقام:

(الف) چند عدد چهاررقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(ب) چند عدد چهاررقمی فرد و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(پ) چند عدد چهاررقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ: (الف) می‌دانیم رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند صفر باشد، پس مکان سمت چپ مکان خاص است و سراغ اصل ضرب می‌رویم:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 720$$

یکی مصرف شد ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ اما صفر برگشت.

(ب) دو مکان خاص داریم، یکی مکان سمت چپ که نباید صفر در آن قرار بگیرد و دیگری سمت راست که باید ارقام فرد یعنی ۱ یا ۳ یا ۵ در آن قرار بگیرند، پس:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

چون امکانات مکان سمت راست (یکان) کم‌تر است، ابتدا باید تعداد حالات آن را معلوم کنیم:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

از بین ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ از امکانات این مکان یکی کم می‌شود، چون در مکان سمت راست مصرف شده

(پ) دو مکان خاص داریم یکی مکان سمت چپ که نباید صفر در آن قرار گیرد و دیگری مکان سمت راست که باید ارقام ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ در آن باشد، پس:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

چون امکانات مکان سمت راست (یکان) کم‌تر است، ابتدا باید تعداد حالات آن را معلوم کنیم:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

اما نمی‌توانیم تعداد حالات مکان سمت چپ را معلوم کنیم، چون نمی‌دانیم در مکان یکان صفر مصرف‌شده یا ارقام غیر صفر، چون اگر صفر مصرف شود، از تمام ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ می‌توانیم در مکان سمت چپ استفاده کنیم، پس مجبوریم صفر را جدا کنیم:

(۱) یکان صفر باشد:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

(۲) یکان صفر نباشد:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

حال طبق اصل جمع داریم:

$$360 + 120 = 480$$

توجه کن که ۷۲۰ عدد چهاررقمی داشتیم که ۳۰۰ تا از آن‌ها فرد و ۴۲۰ تا از آن‌ها زوج است.

ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی اشیای انتخاب‌شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد

$$\frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} = 6.$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

(ب) دو مکان خاص داریم، پس ابتدا وضعیت آن‌ها را معلوم می‌کنیم و سپس

$$\frac{1}{\{1\}} \times \frac{2}{\{2\}} \times \frac{3}{\{3\}} \times \frac{4}{\{4\}} = 6$$

سراغ بقیه مکان‌ها می‌رویم:

روش اول: باید ۴ رقم از ۷ رقم داده‌شده انتخاب کنیم و چون می‌خواهیم

عدد بسازیم، جابه‌جایی آن‌ها مهم است:

$$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 840.$$

$$\frac{7}{7} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} = 840.$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

روش اول: یک مکان خاص داریم. مکان سمت چپ فقط می‌تواند ۸ و ۹ باشد، پس:

$$\frac{2}{\{8, 9\}} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{2} = 240.$$

روش اول: سه رقم از ۶ رقم انتخاب می‌کنیم و چون می‌خواهیم عدد

بسازیم جابه‌جایی آن‌ها مهم است:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120.$$

$$\frac{6}{6} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} = 120.$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

(ب) یک مکان خاص داریم، مکان سمت راست باید فرد باشد، پس:

$$\frac{4}{\{1, 3, 5, 7\}} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} = 80.$$

(ب) یک مکان خاص داریم، آن هم مکان سمت راست که مربوط به یکان عدد

$$\frac{4}{\{6\}} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{1} = 20.$$

است می‌باشد:

روش اول: یک مکان خاص داریم، رقم یکان باید زوج باشد، پس:

$$\frac{2}{\{2, 4, 6, 8\}} \times \frac{3}{3} \times \frac{4}{4} \times \frac{5}{5} = 480.$$

روش اول: ۵ رقم از ۹ رقم داده‌شده انتخاب می‌کنیم و چون جابه‌جایی

آن‌ها مهم است، پس:

$$P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 15120.$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\frac{9}{9} \times \frac{8}{8} \times \frac{7}{7} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{5} = 15120.$$

(ب) یک مکان خاص داریم؛ رقم یکان باید زوج باشد، پس:

$$\frac{6}{\{2, 4, 6, 8\}} \times \frac{7}{7} \times \frac{8}{8} \times \frac{4}{4} = 1344.$$

روش اول: یک مکان خاص داریم، رقم سمت چپ نباید صفر باشد، پس:

$$\frac{5}{\{1, 2, 3, 4, 5\}} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} = 100.$$

(ب) دو مکان خاص داریم، از آن مکانی که امکاناتش کم‌تر است شروع می‌کنیم:

$$\frac{4}{\{1, 2, 3, 4, 5\}} \times \frac{4}{\text{صفر برگشت}} \times \frac{3}{\{1, 3, 5\}} = 48$$

(ب) دو مکان خاص داریم اما امکانات در مکان طوری است که باید مسئله را در

دو حالت بررسی کنیم:

$$\frac{5}{\{1, 2, 3, 4, 5\}} \times \frac{4}{\{2, 3, 4\}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{1}{\{1\}} = 20 \\ \frac{4}{4} \times \frac{4}{4} \times \frac{2}{\{2, 4\}} = 32 \end{cases} \Rightarrow 20 + 32 = 52$$

۴۴. زیرا: چون بعد از انتخاب ۳ کتاب، جابه‌جایی آن‌ها در قفسه مهم

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60.$$

است، پس:

۴۵. زیرا: چون بعد از انتخاب ۳ نفر، جایگشت‌های آن‌ها مهم نیست،

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120.$$

پس:

۴۶. زیرا: می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه ۶ عضوی برابر

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20.$$

است، پس:

۴۷. گزینه «۴»، می‌دانیم $P(n, r)$ برابر $\frac{n!}{(n-r)!}$ می‌باشد، پس:

$$P(10, 2) = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90.$$

$$P(2, 2) = \frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2!}{0!} = \frac{2 \times 1}{1} = 2$$

گزینه «۳»

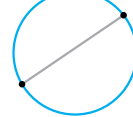
۴۹. گزینه «۴»، باید ۳ نقطه از ۸ نقطه را انتخاب کنید،



زیرا هر مثلث سه رأس دارد:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 56$$

۵۰. گزینه «۳»، باید ۲ نقطه از ۱۰ نقطه را انتخاب کرد،



زیرا وتر پاره‌خطی است که دو سر آن روی دایره است:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 1 \times 8!} = 45$$

۵۱. گزینه «۱»، می‌دانیم $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ است، پس:

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{2} = \frac{7!}{3!(7-3)!} + \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{3!4!} + \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} + \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 1 \times 5!} = 35 + 21 = 56$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} + \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 1 \times 5!} = 35 + 21 = 56$$

۵۲. گزینه «۳»، می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی یک مجموعه ۸ عضوی

برابر $\binom{8}{5}$ است، پس:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 56$$

۵۳. روش اول: باید ۳ حرف از ۶ حرف کلمه «مهرسان» را انتخاب کنیم،

واضح است که جابه‌جایی حروف مهم است؛ پس:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120.$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\frac{6}{6} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} = 120.$$

(ب) یک مکان خاص داریم، پس سراغ اصل ضرب می‌رویم. ابتدا هم باید وضعیت

$$\frac{4}{4} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{\{1\}} = 20.$$

مکان خاص را معلوم کنیم:

۵۴. روش اول: باید ۳ حرف از ۵ حرف کلمه «رهنما» انتخاب کنیم و چون

جابه‌جایی آن‌ها مهم است داریم:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60.$$

پ) باید ۲ حقوق‌دان و ۲ اقتصاددان یا ۱ حقوق‌دان و ۳ اقتصاددان یا ۴ اقتصاددان در گروه باشند، پس:

$$\begin{aligned} & \binom{6}{2} \times \binom{5}{2} + \binom{6}{1} \times \binom{5}{3} + \binom{6}{0} \times \binom{5}{4} \\ &= \frac{6!}{2! \times (6-2)!} \times \frac{5!}{2! \times (5-2)!} + \frac{6!}{1! \times (6-1)!} \times \frac{5!}{3! \times (5-3)!} \\ &+ \frac{6!}{0! \times (6-0)!} \times \frac{5!}{4! \times (5-4)!} = \frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!} \times \frac{5!}{4! \times 1!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 4!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} + \frac{6 \times 5!}{1 \times 5!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} + \frac{6 \times 5!}{0! \times 6!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{4! \times 1!} \\ &= 15 \times 10 + 6 \times 10 + 5 = 150 + 60 + 5 = 215 \end{aligned}$$

ت) باید ۳ حقوق‌دان و ۱ اقتصاددان یا ۴ حقوق‌دان در گروه باشند:

$$\begin{aligned} & \binom{6}{3} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{4} \times \binom{5}{0} = \frac{6!}{3! \times (6-3)!} \times \frac{5!}{1! \times (5-1)!} + \frac{6!}{4! \times (6-4)!} \times \frac{5!}{0! \times (5-0)!} \\ &= \frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{5!}{1! \times 4!} + \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{5!}{0! \times 5!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{1 \times 4!} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4! \times 2 \times 1} \times \frac{5!}{0! \times 5!} \\ &= 20 \times 5 + 15 = 100 + 15 = 115 \end{aligned}$$

ث) باید ۴ حقوق‌دان یا ۴ اقتصاددان در گروه باشند:

$$\begin{aligned} & \binom{6}{4} \times \binom{5}{0} = \frac{6!}{4! \times (6-4)!} \times \frac{5!}{0! \times (5-0)!} = \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{5!}{0! \times 5!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4! \times 2 \times 1} \times \frac{5!}{0! \times 5!} = 15 + 5 = 20 \end{aligned}$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 56 \quad .70$$

۷۱. رقم ۷ که باید باشد، پس دو رقم دیگر را باید از بین ارقام ۳، ۹، ۵ و ۱۰ انتخاب کنیم.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times (4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} = 6$$

۷۲. الف) باید ۴ عضو از c, d, e, f, g, h انتخاب کنیم. پس:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times (6-4)!} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 15$$

ب) باید ۳ عضو انتخاب کنیم اما a انتخاب شده است، پس فقط ۲ عضو دیگر از c, d, e, f, g, h می‌خواهیم. دقت کنید b نباید در زیرمجموعه باشد:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times (6-2)!} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 15$$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی یا ۸ عضوی را می‌خواهیم. پس:

$$\begin{aligned} & \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = \frac{8!}{7! \times (8-7)!} + \frac{8!}{8! \times (8-8)!} = \frac{8!}{7! \times 1!} + \frac{8!}{0! \times 8!} \\ &= \frac{8 \times 7!}{7! \times 1} + \frac{8!}{8! \times 1} = 8 + 1 = 9 \end{aligned}$$

ت) تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یا ۲ عضوی یا ۱ عضوی یا صفر عضوی را می‌خواهیم:

$$\begin{aligned} & \binom{8}{3} + \binom{8}{2} + \binom{8}{1} + \binom{8}{0} \\ &= \frac{8!}{3! \times (8-3)!} + \frac{8!}{2! \times (8-2)!} + \frac{8!}{1! \times (8-1)!} + \frac{8!}{0! \times (8-0)!} \\ &= \frac{8!}{3! \times 5!} + \frac{8!}{2! \times 6!} + \frac{8!}{1! \times 7!} + \frac{8!}{0! \times 8!} \end{aligned}$$

۶۱. رقم یکان عدد مضرب ۵ می‌تواند صفر یا ۵ باشد، پس:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{5!} \times \frac{4!}{4! \times 3! \times 2! \times 1!} \times \frac{3!}{3! \times 2! \times 1!} \times \frac{2!}{2! \times 1!} \times \frac{1!}{1!} = 60 \\ & \Rightarrow 60 + 48 = 108 \end{aligned}$$

۶۲. رقم یکان عدد زوج باید صفر یا ۲ یا ۴ باشد. از آنجایی که اگر رقم یکان

صفر باشد، عدد، مضرب ۵ هم می‌شود، پس فقط در رقم یکان ۲ یا ۴ قرار

می‌گیرد، بنابراین داریم:

$$\frac{4}{4!} \times \frac{4!}{4! \times 3! \times 2! \times 1!} \times \frac{3!}{3! \times 2! \times 1!} \times \frac{2!}{2! \times 1!} = 96$$

۶۳. بعد از انتخاب ۳ کتاب جابه‌جایی آن‌ها مهم است، پس:

$$P(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$$

۶۴. چون بازی‌ها به طور رفت و برگشت برگزار می‌شود، پس بعد از انتخاب ۲

تیم جابه‌جایی آن‌ها مهم است. مثلاً ab یعنی تیم a میزبان است و ba یعنی

تیم b میزبان می‌باشد، پس:

$$P(8, 2) = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$$

۶۵. باید ۴ کتاب از ۹ کتاب انتخاب کنیم:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times (9-4)!} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 126$$

۶۶. باید ۳ توپ قرمز یا ۳ توپ آبی انتخاب کنیم:

$$\begin{aligned} & \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} + \frac{4!}{3! \times (4-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} + \frac{4!}{3! \times 1!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} + \frac{4 \times 3!}{3! \times 1} = 10 + 4 = 14 \end{aligned}$$

۶۷. در هدیه‌دادن سه کتاب، جابه‌جایی مهم نیست، پس:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times (7-3)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

۶۸. کاپیتان تیم، فرد مشخصی از دانش‌آموزان انسانی است. پس او انتخاب شده

است. می‌ماند ۵ نفر دیگر که باید از بین ۱۰ دانش‌آموز باقی‌مانده انتخاب کنیم:

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \times (10-5)!} = \frac{10!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 252$$

۶۹. الف) باید ۳ حقوق‌دان و ۱ اقتصاددان یا ۴ حقوق‌دان در گروه باشند:

$$\begin{aligned} & \binom{6}{3} \times \binom{5}{1} + \binom{6}{4} \times \binom{5}{0} = \frac{6!}{3! \times (6-3)!} \times \frac{5!}{1! \times (5-1)!} + \frac{6!}{4! \times (6-4)!} \times \frac{5!}{0! \times (5-0)!} \\ &= \frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{5!}{1! \times 4!} + \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{5!}{0! \times 5!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3!}{1 \times 4!} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4! \times 2 \times 1} \times \frac{5!}{0! \times 5!} \\ &= 20 \times 5 + 15 = 115 \end{aligned}$$

ب) باید ۲ حقوق‌دان و ۲ اقتصاددان در گروه باشند:

$$\begin{aligned} & \binom{5}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} \times \frac{6!}{2! \times (6-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 10 \times 15 = 150 \end{aligned}$$