

مقدمه مولف

سلام عزیزان، امیدوارم همیشه شاد و تندرست باشید و ایام به کامتون باشه. خردادماه ۱۴۰۱ مسئولین، زحمت یه مصوبه‌ای را کشیدن که کمی کنکور رو از ریل یکنواخت قدیمی جداش کرد و نقش سوابق تحصیلی رو تو کنکور پررنگ کرد. مصوبه می‌گه که نمره سوابق تحصیلی واسه سنجش و پذیرش تو رشته‌های پرمقاصی دانشگاه‌ها قرار به صورت جدول زیر اجرا بشه:

سال تحصیلی دوازدهم	پایه تحصیلی	میزان تأثیر
۱۴۰۱-۱۴۰۲	فقط دوازدهم	۴۰ درصد قطعی
۱۴۰۲-۱۴۰۳	فقط دوازدهم	۵۰ درصد قطعی
۱۴۰۳-۱۴۰۴	یازدهم و دوازدهم	۶۰ درصد قطعی
۱۴۰۴-۱۴۰۵ و بعد از آن	دهم، یازدهم و دوازدهم	۶۰ درصد قطعی

با این حساب سوابق تحصیلی یا همون نمرات امتحانای نهایی می‌تونه تو نتیجه کنکور مؤثر واقع بشه. یعنی اگه نمره نهایی خوب باشه، نمره کنکور رو بالا می‌بره و اگه بد باشه، نمره کنکور رو پایین میاره.

یه مثالی واستون می‌زنم تا بهتر متوجه موضوع بشید:

فرض کنین ترازتون تو کنکور ۶۵۰۰ باشه و نمره امتحاناتتون تو نهایی خیلی خوب باشه و بعد از تبدیل به تراز، ترازش ۷۵۰۰ بشه. اون وقت تراز امتحاناتون تو کنکور با احتساب ۴۰ درصد قطعی، به صورت زیر محاسبه می‌شه:

$$۶۵۰۰ \times \frac{۶۰}{۱۰۰} + ۷۵۰۰ \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۳۹۰۰ + ۳۰۰۰ = ۶۹۰۰$$

یعنی نمره نهایی تونسته، ۴۰۰ تا ترازتون رو بالا بکشه!

با این اوضاع می‌بایست هر دو جنبه نهایی و کنکور رو تقویت کنین.

هدف ما هم از نگارش این کتاب دقیقاً همینیه که بتونه شما رو به طور عالی واسه نهایی آماده کنه.

ویژگی‌های این کتاب:

- ۱ پوشش کامل سؤالات نهایی داخل و خارج از دی ۹۷ تا الان
- ۲ پوشش کامل مثلاً، تمرینا، کار در کلاس و حتی متن کتاب درسی
- ۳ ارائه یه درس‌نامه توپ و کامل و روان، اما مختصر و مفید
- ۴ پاسخ‌های تشریحی با رویکرد آموزشی
- ۵ ارائه چند دوره امتحان نهایی به همراه پاسخ و بارم‌بندی نمونه نهایی واسه آماده‌سازی بهتر شما
- ۶ ارائه تحلیل آماری از سؤالات نهایی که وزن و سهم هر فصل و هر قسمت رو تو نهایی نشون می‌ده
- ۷ حذف سؤالات تکراری و ادغام سؤالات خیلی مشابه

لازمه تشکر و قدردانی کنم از:

- ۱ آقایان دکتر ابودر نصری و دکتر کمیل نصری
- ۲ تیم خوب تولید خیلی‌سبز که زحمت کتاب رو دوش اون‌ها بود.
- ۳ ویراستاران خوب کتاب خانم‌ها نرجس تیمناک و مریم بیوک‌زاده
- ۴ سرکار خانم لولوا مرادی که مسئولیت هماهنگی کتاب را بر عهده داشتند.

با احترام

ابوالقاسم شعبانی

فهرست مطالب

فصل اول: تابع

درسنامه
پاسخ

سؤال

- درس ۱- قسمت اول: توابع چند جمله‌ای ۵
- درس ۱- قسمت دوم: توابع صعودی و توابع نزولی ۶
- درس ۲- قسمت اول: ترکیب توابع ۷
- درس ۲- قسمت دوم: تبدیل نمودار توابع ۸
- درس ۳: تابع وارون ۱۰

فصل دوم: مثلثات

- درس ۱: تناوب و تنازانت ۱۲
- درس ۲- قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان ۱۴
- درس ۲- قسمت دوم: معادلات مثلثاتی ۱۵

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

- درس ۱- قسمت اول: بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x-a$ و حد توابع کسری ۱۶
- درس ۱- قسمت دوم: حد نامتناهی ۱۷
- درس ۲: حد در بی‌نهایت ۱۹

فصل چهارم: مشتق

- درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق ۲۲
- درس ۲- قسمت اول: مشتق پذیری و پیوستگی ۲۴
- درس ۲- قسمت دوم: قواعد مشتق گیری ۲۵
- درس ۳: آهنگ تغییرات ۲۸

فصل پنجم: کاربرد مشتق

- درس ۱- قسمت اول: یکنوایی توابع و نقاط بحرانی ۳۰
- درس ۱- قسمت دوم: اکسترم‌های تابع ۳۱
- درس ۲: بهینه‌سازی ۳۲

فصل ششم: هندسه

- درس ۱- قسمت اول: تفکر تجسمی ۳۴
- درس ۱- قسمت دوم: بیضی ۳۶
- درس ۲: دایره ۳۷

فصل هفتم: احتمال

- درس ۱: قانون احتمال کل ۳۹

ضمیمه: امتحانات نهایی

- امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰ ۱۱۹
- امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۰ ۱۲۰
- امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱ ۱۲۱
- امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۱ ۱۲۳



درس ۲

قسمت دوم: تبدیل نمودار توابع

صفحات ۱۵ تا ۲۳ کتاب درسی

درس نامه ۲ - قسمت دوم را در صفحه ۴۹ ببینید.

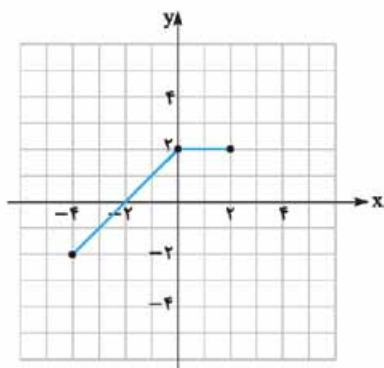
■ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

- ۶۴- دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.
(دی ۹۹ و شهریور ۹۹)
- ۶۵- دامنه تابع با ضابطه $y = -kf(\frac{x}{p})$ همان دامنه تابع $y = -kf(x)$ می‌باشد.
(خرداد ۹۹ خارج)
- ۶۶- برد تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.
(دی ۹۸)
- ۶۷- برد تابع $y = f(kx)$ با برد تابع $y = f(x)$ برابر است.
(خرداد ۹۸ خارج)
- ۶۸- نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ همان نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ است.
(دی ۹۸ خارج)
- ۶۹- اگر $f(x) = x^3$ و $g(x) = (x-3)^3$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست به دست آورد.
(دی ۹۸ خارج)
- ۷۰- نقطه $A|_{-3}^3$ در تابع $y = f(x)$ متناظر با نقطه $A'|_{-3}^9$ در تابع $y = f(\frac{1}{3}x)$ است.
(دی ۹۹ خارج)
- ۷۱- اگر $k > 1$ ، آن‌گاه نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.
(متن کتاب درسی)
- ۷۲- اگر $0 < k < 1$ ، آن‌گاه نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید.
(متن کتاب درسی)
- ۷۳- اگر برد تابع f بازه $[-3, 1]$ باشد، برد تابع $y = -2f(3x-1) + 3$ برابر $[1, 9]$ است.
■ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
- ۷۴- اگر دامنه $f(x)$ برابر $[1, 4]$ باشد، آن‌گاه دامنه $2f(\frac{1}{p}x)$ برابر است با
(خرداد ۹۸ خارج)
- ۷۵- اگر دامنه تابع $f(x) = x + 3$ بازه $[-2, 0]$ باشد، آن‌گاه دامنه تابع $y = f(2x)$ برابر بازه است.
(شهریور ۱۴۰۰ خارج)
- ۷۶- اگر برد تابع f برابر $[-1, 4]$ باشد، آن‌گاه برد تابع $y = 2f(x)$ برابر با است.
(خرداد ۹۹ خارج)
- ۷۷- برد تابع $y = -\sqrt{-x}$ برابر با می‌باشد.
(شهریور ۹۸ خارج)
- ۷۸- برد تابع $f(3x)$ و تابع $f(\frac{1}{3}x)$ با یکدیگر است.
(شهریور ۹۸ خارج)
- ۷۹- نقطه نظیر $(4, 0)$ در تابع $f(x)$ ، در تابع $\frac{1}{p}f(2x)$ خواهد بود.
(شهریور ۹۸ خارج)

(دی ۹۹ خارج)

۸۰- برد تابع $f(x) = \sqrt{-x}$ برابر است با

(خرداد ۱۴۰۰)

۸۱- با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.■ شکل مقابل، نمودار تابع $y = f(x)$ است. به کمک آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

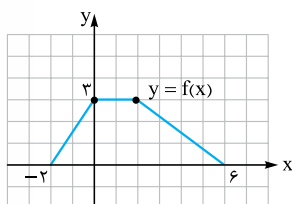
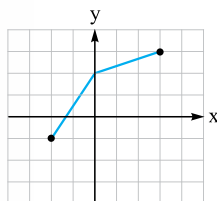
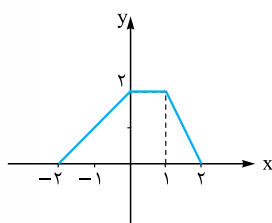
۸۲- $y = \frac{1}{3}f(2x) + 1$

۸۳- $y = -f(-x) - 1$

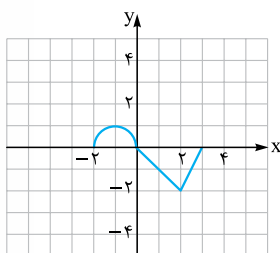
۸۴- $y = 2f(x+1) - 2$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

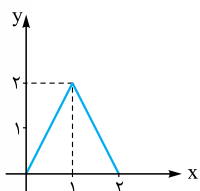
(دی ۹۷)

۸۵- با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = f(\frac{x}{3}) - 2$ را رسم کنید.

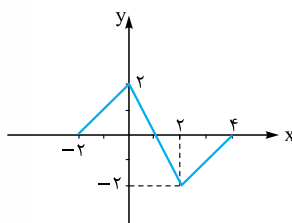
(خرداد ۹۹)

۸۷- نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.۸۶- نمودار تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.دامنه تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را تعیین کنید.۸۸- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو است. با استفاده از آن نمودار $y = -2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.

(شهریور ۹۸ و مشابه دی ۹۷ خارج)



(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۸۹- اگر دامنه تابع f ، $[-4, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = f(\frac{x}{3})$ را به دست آورید.۹۰- شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه و برد تابع $g(x) = -\frac{1}{3}f(3x+1) - 1$ را به دست آورید.

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

■ با استفاده از نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = \sqrt{-x} \quad -91$$

$$y = -\sqrt{x} \quad -92$$

$$y = -\sqrt{-x} \quad -93$$

$$y = \sqrt{x-1} + 1 \quad -94$$

$$y = \sqrt{2-x} \quad -95$$

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

■ با استفاده از نمودار $y = |x+2|$ در بازه $[-4, 1]$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

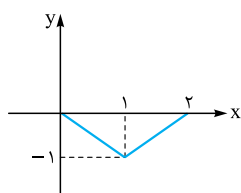
$$y = -\frac{1}{4}|x+2| \quad -96$$

$$y = 2|x+2| - 3 \quad -97$$

(دی ۹۹ خارج و کار در کلاس کتاب درسی)

■ نمودار تابع $g(x) = \frac{-1}{3}|2-x|$ را با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x-2|$ در بازه $[1, 3]$ رسم کنید.■ با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = |f(x)| - 1$ را رسم کنید.

(دی ۱۴۰۰ خارج)



(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

■ با استفاده از نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نمودار $y = |\sqrt{x+1} - 1|$ را رسم کنید.■ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار $y = -2\cos 2x$ را رسم کنید.■ به کمک نمودار $y = \sin x$ ، نمودار توابع زیر را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

$$y = 2\sin(-\frac{1}{4}x) \quad -102$$

$$y = -\sin(2x) + 1 \quad -103$$

(شهریور ۱۴۰۰ خارج)

■ با استفاده از نمودار $f(x) = \cos x$ نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}\cos(-\frac{1}{4}x)$ را رسم کنید.■ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

(شهریور ۱۴۰۰)

■ نمودار تابع $y = -x^2 + 2x$ را ابتدا یک واحد به سمت راست و سپس دو واحد به پایین منتقل کرده و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. ضابطه تابع را در هر مرحله بنویسید.

(مشابه شهریور ۱۴۰۰)

صفحه ۲۹ تا ۳۴ کتاب درسی

تابع وارون

درس ۳

درس‌نامه ۳ را در صفحه ۵۷ ببینید.

■ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(شهریور ۱۴۰۰)

■ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند.

(دی ۱۴۰۰ و خرداد ۹۸)

■ دو تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) \quad -109$$

■ تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2x - 6$ در بازه $(-\infty, -1]$ وارون پذیر است.

$$f^{-1}(25) = 2 \text{ آن‌گاه } f(x) = 3x^2 - 1 \quad -111$$

■ وارون تابع $f(x) = x^2$ ($x \leq 0$)، به صورت $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ است.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(خرداد ۱۴۰۱)

۱۱۳- اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.

(دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۱۴- وارون تابع $g(x) = (x^2 + 1)$ به صورت می‌باشد.

۱۱۵- اگر $f(x) = 7x - 3$ ، آن‌گاه $f^{-1}(-17)$ برابر است.

۱۱۶- اگر $f(x) = 5x - 3$ و $g(x) = x^3 + 1$ ، آن‌گاه حاصل $f^{-1} \circ g^{-1}(9)$ برابر است.

۱۱۷- وارون تابع $f(x) = x^2 + 4$ در بازه $[-\infty, 0]$ به صورت است.

(شهریور ۹۹)

۱۱۸- ضابطه وارون تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ را به دست آورید.

(دی ۹۹، خرداد ۹۸ خارج و دی ۹۷ خارج)

۱۱۹- ضابطه وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1}$ را به دست آورید.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج و مشابه خرداد ۹۹ خارج)

۱۲۰- اگر $f(x) = \sqrt{x + 3}$ باشد، وارون تابع f و دامنه و برد f و f^{-1} را به دست آورید.

(شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۱- تابع $g(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$ در نظر بگیرید.

⊖ ضابطه وارون تابع g را به دست آورید. ⊕ تابع g و وارون آن را در یک صفحه رسم کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۲۲- با محدودکردن دامنه تابع $f(x) = |x - 2|$ ، تابعی وارون‌پذیر بسازید و سپس ضابطه وارون آن را به دست آورید.

۱۲۳- با محدودکردن دامنه تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ ، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورید و دامنه و برد تابع f و ضابطه وارون آن را بنویسید.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج، مشابه دی ۹۹ خارج و خرداد ۹۹ خارج)

(دی ۹۸، مشابه خرداد ۹۹ خارج و مثال کتاب درسی)

۱۲۴- نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

(دی ۹۸ خارج و تمرین کتاب درسی)

۱۲۵- نشان دهید دو تابع $f(x) = -\sqrt{x - 8}$ و $g(x) = 8 + x^2 (x \leq 0)$ وارون یکدیگرند.

(مشابه مثال کتاب درسی)

۱۲۶- اگر $f = \{(1, 5), (2, 4), (3, -1)\}$ باشد، توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(شهریور ۹۸، خرداد ۹۸، دی ۹۷ و تمرین کتاب درسی)

۱۲۷- اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ را به دست آورید.

(دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۸- اگر $f(x) = \frac{1}{5}x - 3$ و $g(x) = \sqrt{x + 17}$ باشد، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(3)$ را به دست آورید.

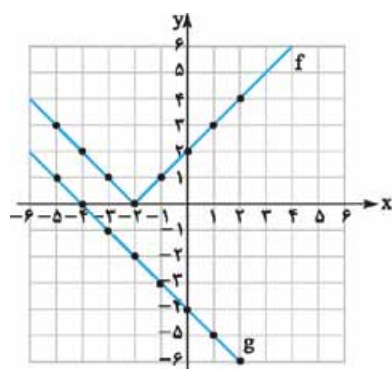
(دی ۱۴۰۰)

۱۲۹- با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

(۱) $(g \circ f)(-1)$

(۲) $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$

⊖ نمودار تابع $f(x - 2) - 3$ را رسم کنید.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۳۰- اگر $f(x) = \frac{1}{25}x - 4$ و $g(x) = x^3$ ، مقدار $(f \circ g)^{-1}(1)$ را به دست آورید.

قسمت دوم:

تبدیل نمودار توابع

فصل ۱

درس ۲

صفحه ۱۵ تا ۲۳ کتاب درسی

سخن دبیر

تبدیل نمودار که فیلیا اونو با انتقال می‌شناسن، مبحثی که از سال دهم تا حالا پاهاش فاطره داریم. مبحث بسیار جذابی که آگه پوش مسلط بشی فیلیا از نمودارها رو می‌تونی تو سه سوت رسمش کنی. از این مبحث همیشه تو نهایی سؤال اومده.

تبدیل نمودار توابع

تبدیل نمودارها در دو راستا صورت می‌گیرد:

۱ در راستای محور X ها که به صورت چپ و راست انجام می‌شود.

۲ در راستای محور Y ها که به صورت بالا و پایین انجام می‌شود.

نکته در تبدیل نمودار توابع دانستن مطالب زیر ضروری و کارگشا است:

۱ در تبدیلات مربوط به محور Y ها، همه‌چیز و از جمله ترتیب ۴ عمل اصلی، مستقیم عمل می‌کند.

۲ در تبدیلات مربوط به محور X ها، همه‌چیز و حتی ترتیب ۴ عمل اصلی به صورت وارونه عمل می‌کند.

۳ در تبدیلات ترکیبی، اولویت با تبدیلات مربوط به محور X ها است. یعنی ابتدا تبدیلات مربوط به محور X ها را انجام می‌دهیم و سپس تبدیلات مربوط به محور Y ها را.

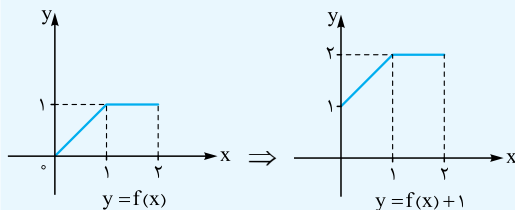
تبدیل نمودار توابع در یک نگاه

فرض کنیم نمودار یا ضابطه تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k > 0$ عدد حقیقی باشد، در این صورت تمام تبدیلات نمودار تابع $y = f(x)$ ، از قوانینی که در ادامه آمده است، تبعیت می‌کنند:

تبدیلات مربوط به محور Y ها

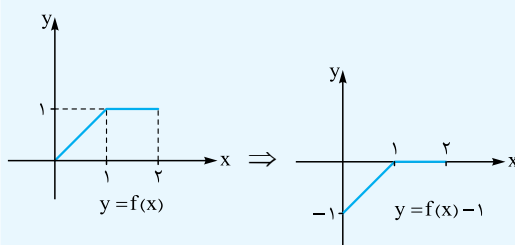
۱ $y = f(x) + k$: نمودار $y = f(x)$ ، k واحد به بالا منتقل می‌شود.

به طور مثال:

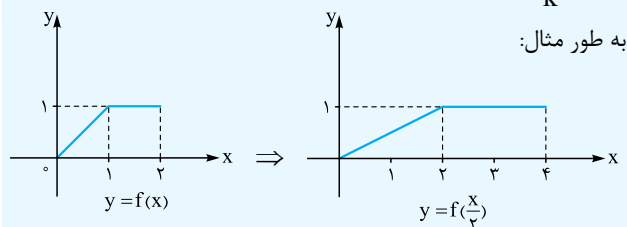


۲ $y = f(x) - k$: نمودار $y = f(x)$ ، k واحد به پایین منتقل می‌شود.

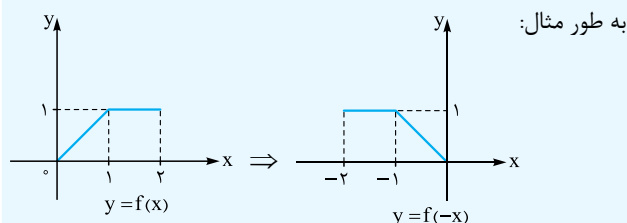
به طور مثال:



۴ $y = f(\frac{1}{k}x)$ در نمودار $y = f(x)$ ، x ها در k ضرب می‌شود.

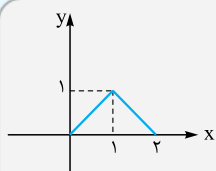


۵ $y = f(-x)$ نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور y ها قرینه می‌شود.



مثال نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت

مقابل است.

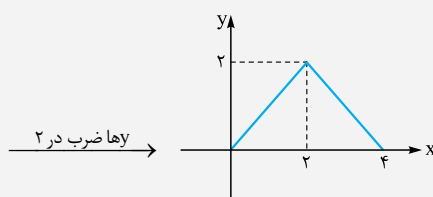
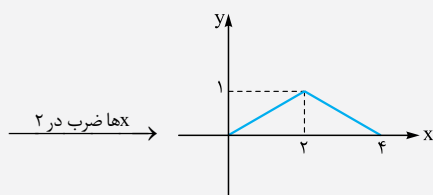
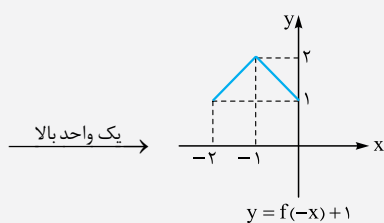
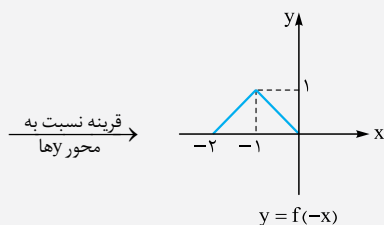


نمودار توابع زیر را رسم کنید.

(ب) $y = 2f(\frac{x}{2})$

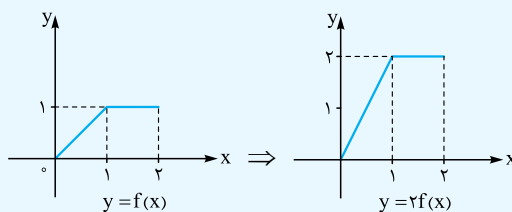
(الف) $y = f(-x) + 1$

پاسخ: الف



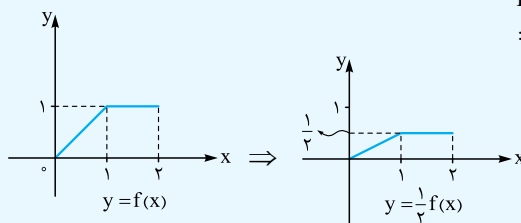
۳ $y = kf(x)$ در نمودار $y = f(x)$ ، y ها k برابر می‌شود.

به طور مثال:



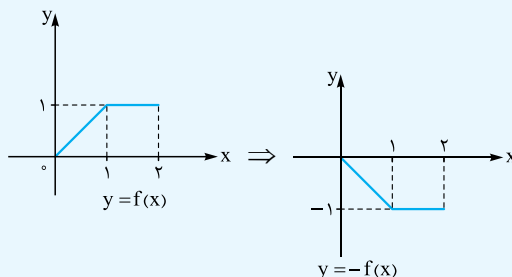
۴ $y = \frac{1}{k}f(x)$ در نمودار $y = f(x)$ ، y ها بر k تقسیم می‌شود.

به طور مثال:



۵ $y = -f(x)$ نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.

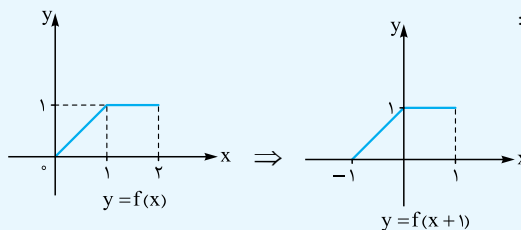
به طور مثال:



تبدیلات مربوط به محور x

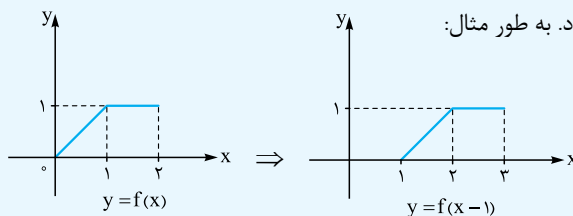
۱ $y = f(x+k)$ نمودار $y = f(x)$ ، k واحد به چپ منتقل می‌شود.

به طور مثال:



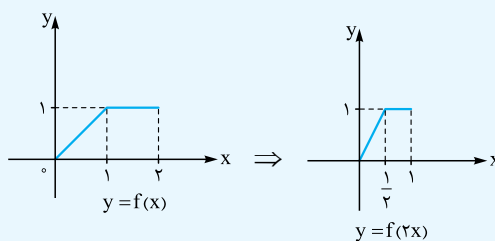
۲ $y = f(x-k)$ نمودار $y = f(x)$ ، k واحد به راست منتقل می‌شود.

به طور مثال:



۳ $y = f(kx)$ در نمودار $y = f(x)$ ، x ها بر k تقسیم می‌شود.

به طور مثال:



چند نکته

۱ با توجه به مطالب گفته شده، می توان گفت:

الف) دامنه توابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ یکی است. همچنین برد $y = kf(x)$ ، k برابر برد $y = f(x)$ است.

ب) برد توابع $y = f(kx)$ و $y = f(x)$ یکسان است. همچنین دامنه $y = f(kx)$ ، $\frac{1}{k}$ برابر دامنه $y = f(x)$ است.

۲ نمودار $y = kf(x)$ ، از انبساط یا انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور y ها به دست می آید. در واقع اگر $k > 1$ ، انبساط عمودی با ضریب k و اگر $0 < k < 1$ ، انقباض عمودی با ضریب k خواهیم داشت و چنانچه $k < 0$ ، در این صورت ابتدا نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه نموده و در این حالت اگر $k < -1$ ، انبساط عمودی با ضریب $|k|$ و اگر $-1 < k < 0$ ، انقباض عمودی با ضریب $|k|$ خواهیم داشت.

۳ نمودار $y = f(kx)$ ، از انبساط یا انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید. در واقع اگر $k > 1$ ، انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ و اگر $0 < k < 1$ ، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ خواهیم داشت و چنانچه $k < 0$ ، در این صورت ابتدا نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه نموده و در این حالت اگر $k < -1$ ، انقباض افقی با ضریب $|\frac{1}{k}|$ و اگر $-1 < k < 0$ ، انبساط افقی با ضریب $|\frac{1}{k}|$ خواهیم داشت.

مثال

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه $y = f(x)$ با دامنه $y = f(2x)$ یکسان است.

ب) برد تابع $y = f(x)$ و برد تابع $y = f(\frac{1}{3}x)$ برابر است.

پ) نمودار $y = 2f(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می آید.

ت) نمودار $y = f(3x)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ به دست می آید.

پاسخ

الف) نادرست. برد این دو تابع یکسان و دامنه آن‌ها متفاوت است.

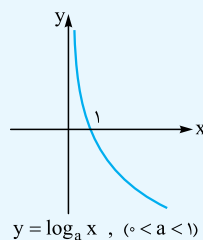
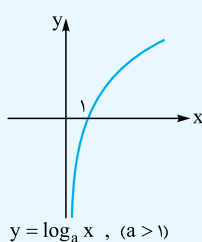
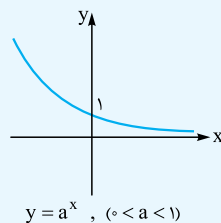
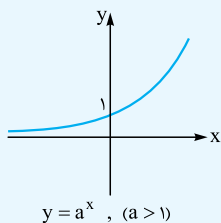
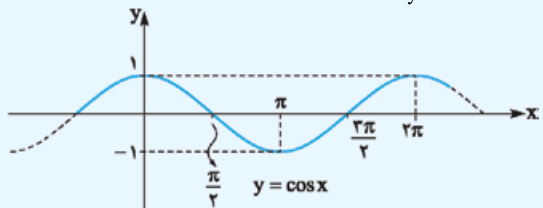
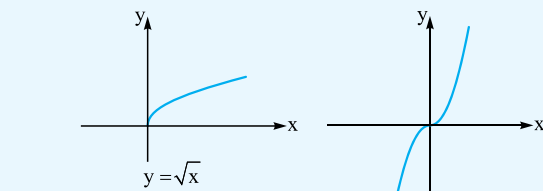
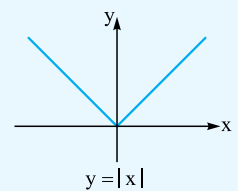
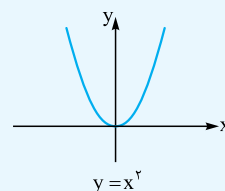
ب) درست

پ) درست

ت) نادرست. از انقباض افقی به دست می آید نه انبساط.

نکته

نمودار توابع مهمی که در تبدیل نمودارها به آن‌ها نیازمندیم به صورت زیر است:



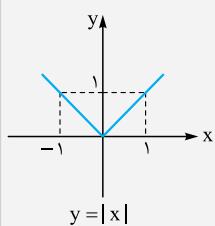
مثال نمودار توابع زیر را با استفاده از نمودارهای نکته قبل رسم کنید.

ب) $y = -\sqrt{-x}$

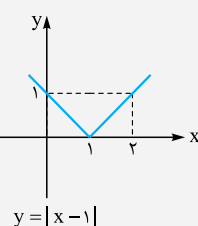
الف) $y = -2|x-1|$

پ) $y = -2\sin(\frac{x}{3})$

پاسخ: الف

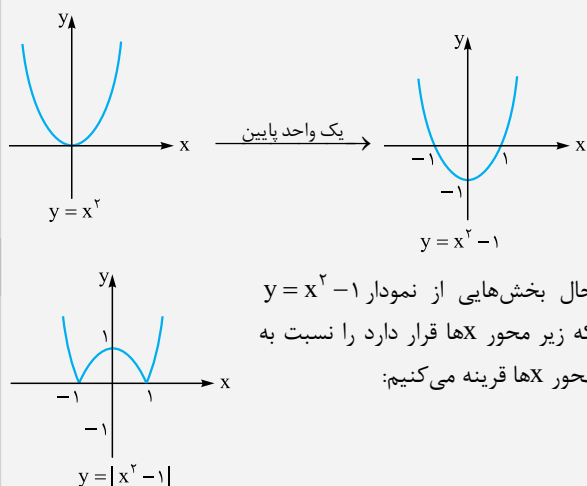


یک واحد راست



مثال نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا نمودار $y = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است نمودار $y = x^2$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم:



پاسخ سوالات

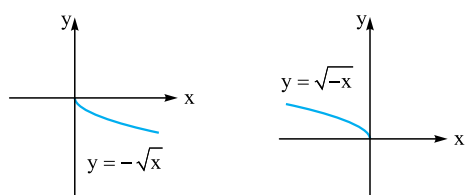
۶۴. درست

۶۵. نادرست

۶۶. نادرست. برد $y = kf(x)$ ، k برابر برد $y = f(x)$ است.

۶۷. درست

۶۸. نادرست. نمودار توابع $y = \sqrt{-x}$ و $y = -\sqrt{x}$ به صورت زیر هستند:



۶۹. درست

۷۰. درست. زیرا همان‌طور که نمودار $y = f(\frac{1}{3}x)$ از سه برابر کردن طول

نقاط نمودار $y = f(x)$ به دست می‌آید، نقطه A' نیز از سه برابر کردن طول نقطه A به دست می‌آید.

۷۱. نادرست

۷۲. درست

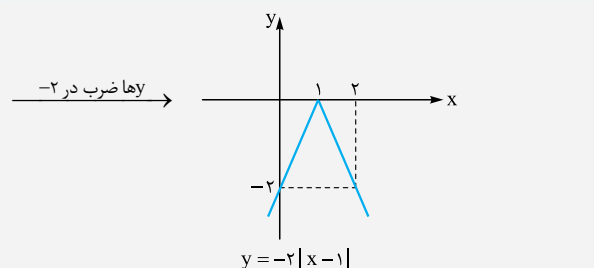
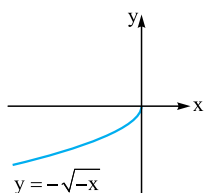
۷۳. درست. زیرا کافی است نقاط بازه $[-3, 1]$ را در -2 ضرب کرده و با 3 جمع کنیم.

۷۴. $[2, 8]$. بازه دو برابر می‌شود.

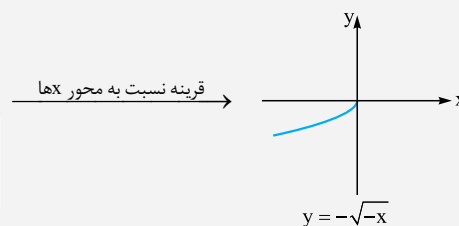
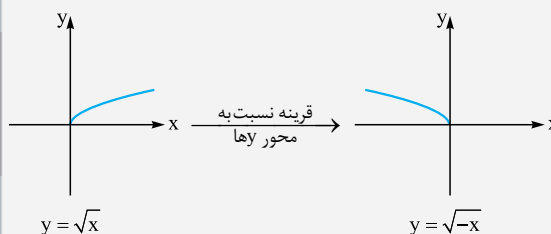
۷۵. $[-1, 0]$

۷۶. $[-2, 8]$

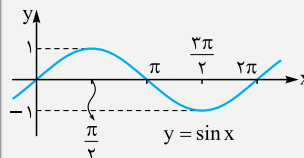
۷۷. $(-\infty, 0]$. زیرا نمودار این تابع به صورت مقابل است:



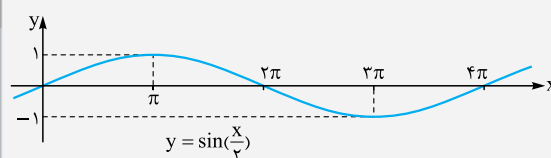
(ب)



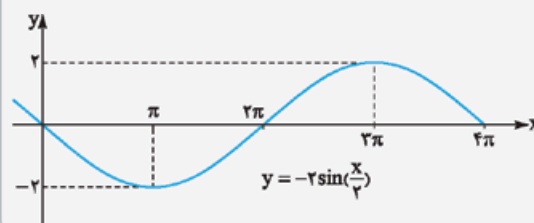
(پ)



$2x$ ضرب در ۲



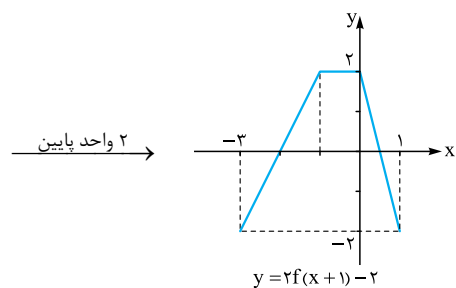
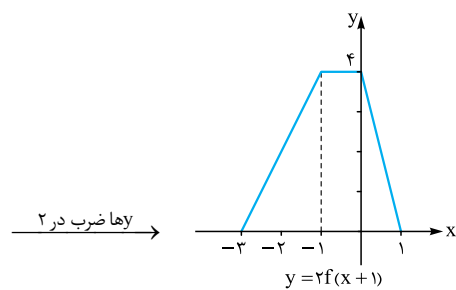
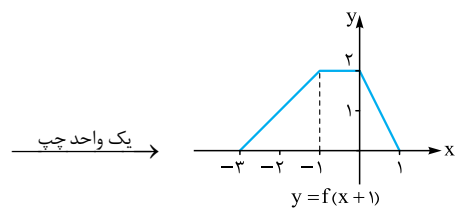
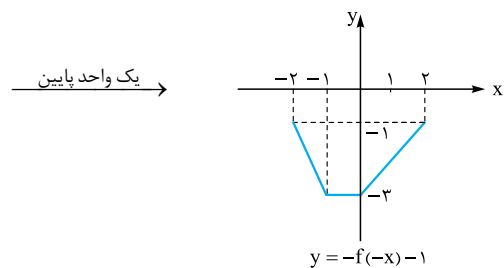
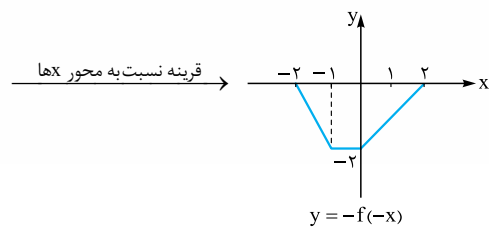
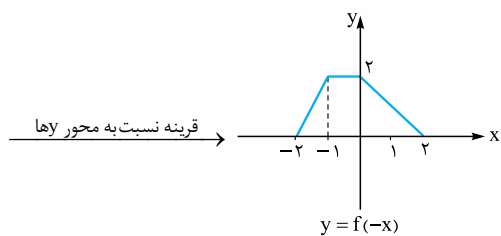
y ضرب در -۲



رسم نمودار $y = |f(x)|$

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس بخش‌هایی از نمودار $y = f(x)$ که زیر محور x قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

۸۳.

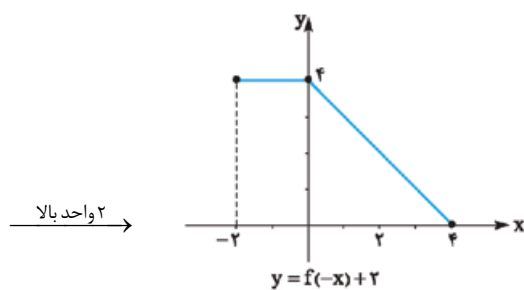
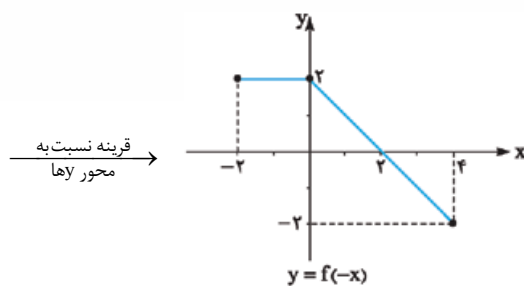


۷۸. برابر

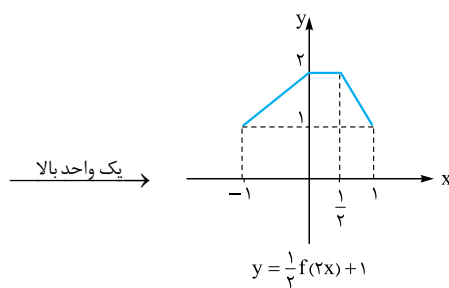
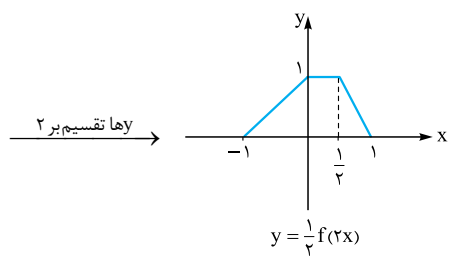
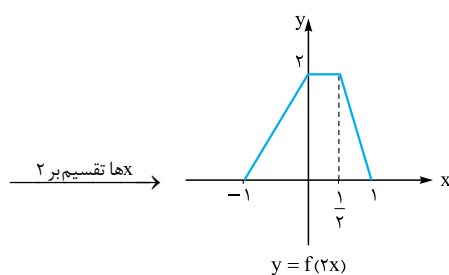
۷۹. $(2, 0)$

۸۰. $[0, +\infty)$

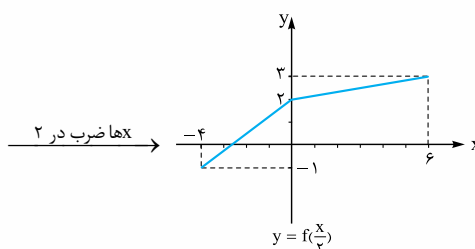
۸۱.



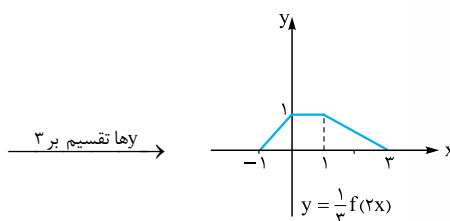
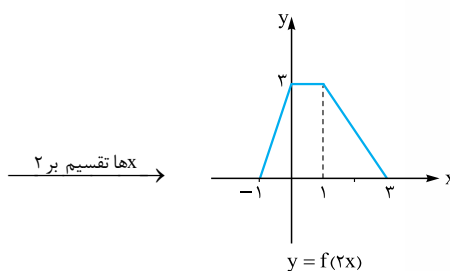
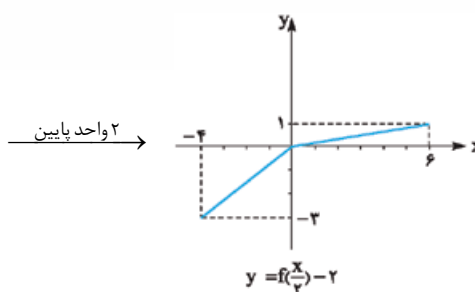
۸۲.



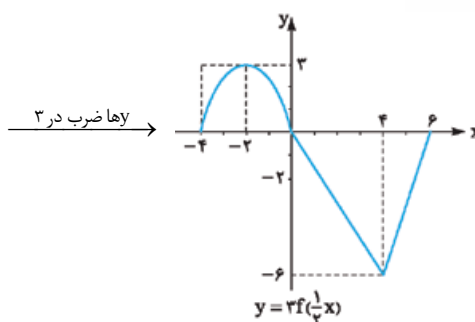
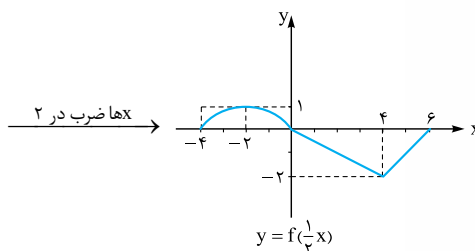
۸۵



۸۶



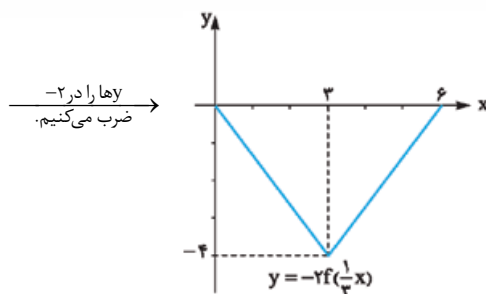
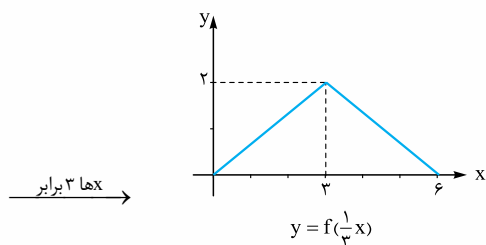
۸۷ (الف)



$$D_y = [-4, 6]$$

(ب) با توجه به نمودار، داریم:

۸۸



$$\frac{x}{3} \in [-4, 4] \Rightarrow -4 \leq \frac{x}{3} \leq 4 \Rightarrow -12 \leq x \leq 12$$

۸۹

بنابراین دامنه $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر $[-12, 12]$ است.۹۰. با توجه به نمودار، داریم $D_f = [-2, 4]$ و $R_f = [-2, 2]$.برای یافتن دامنه تابع g ، می‌توان نوشت:

$$-2 \leq 3x + 1 \leq 4 \xrightarrow{-1} -3 \leq 3x \leq 3$$

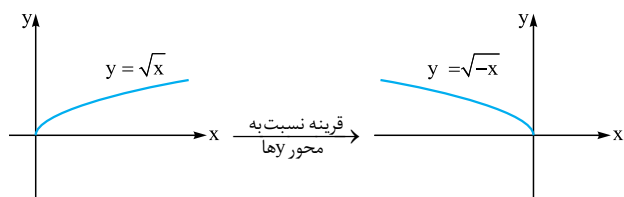
$$\xrightarrow{\div 3} -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

هم‌چنین برای محاسبه برد تابع g ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

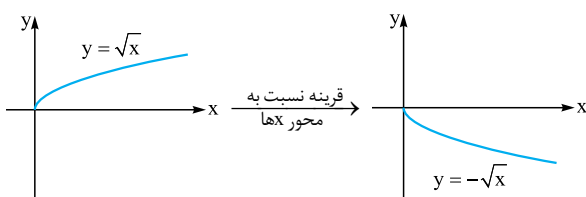
$$-2 \leq f(3x+1) \leq 2 \xrightarrow{\times (-\frac{1}{3})} 1 \geq -\frac{1}{3}f(3x+1) \geq -1$$

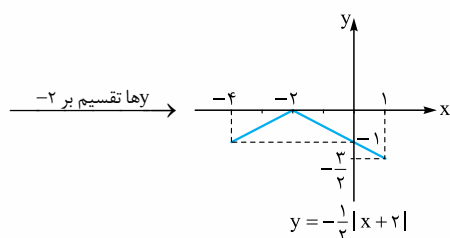
$$\xrightarrow{-1} 0 \geq -\frac{1}{3}f(3x+1) - 1 \geq -2 \Rightarrow R_g = [-2, 0]$$

۹۱



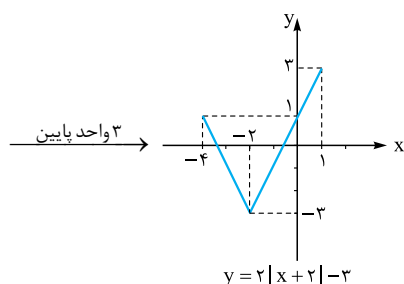
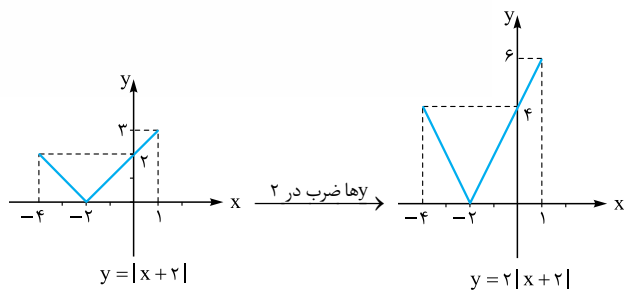
۹۲





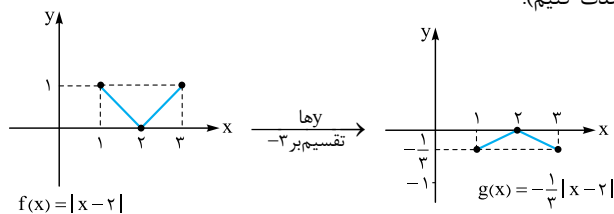
با توجه به شکل، $D_y = [-4, 1]$ و $R_y = [-\frac{2}{3}, 0]$

.۹۷



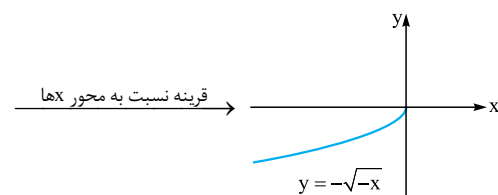
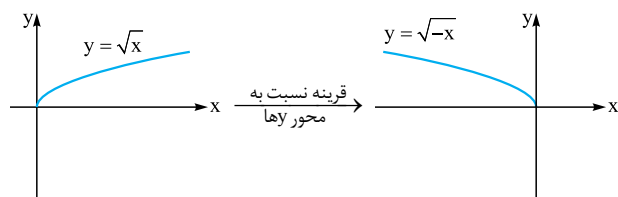
با توجه به شکل، داریم: $D_y = [-4, 1]$ و $R_y = [-3, 3]$

۹۸. می‌دانیم $|u| = |u|$ ، پس $|x-2| = |x-2|$. بنابراین باید به کمک نمودار $f(x) = |x-2|$ ، نمودار $g(x) = -\frac{1}{3}|x-2|$ را رسم کنیم. برای این منظور کافی است نمودار $f(x) = |x-2|$ را در بازه $[1, 3]$ رسم نموده و در نمودار حاصل، y ها را بر ۳ تقسیم کنیم. (توجه کنید که برای رسم $y = |x-2|$ در بازه $[1, 3]$ ، کافی است نمودار $y = |x|$ را دو واحد به راست منتقل کنیم و قسمتی که در بازه $[1, 3]$ قرار می‌گیرد را نگه داشته و بقیه را حذف کنیم):

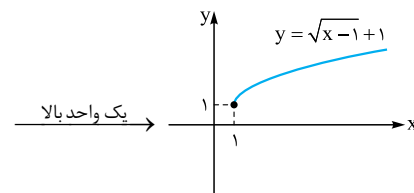
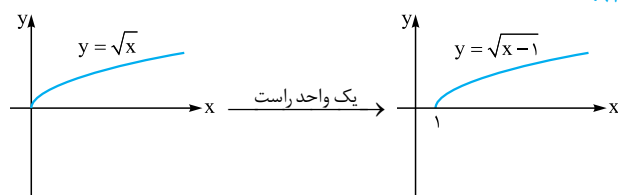


۹۹. برای رسم نمودار $y = |f(x)| - 1$ ، ابتدا بخش‌هایی از نمودار $y = f(x)$ که زیر محور x قرار دارد را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = |f(x)|$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.

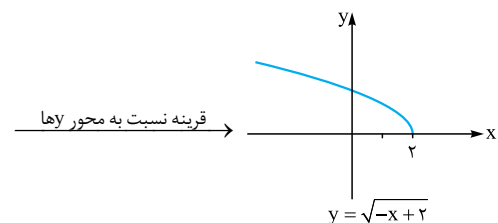
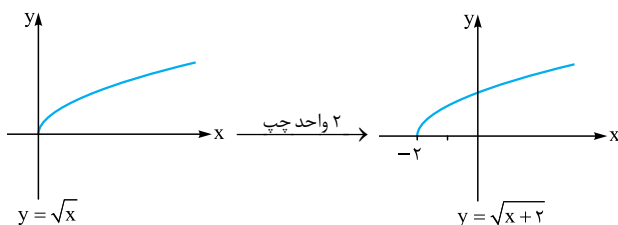
.۹۳



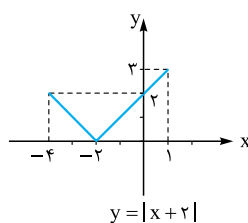
.۹۴

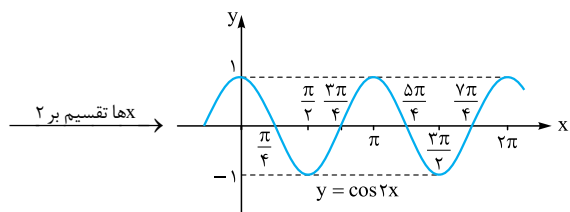
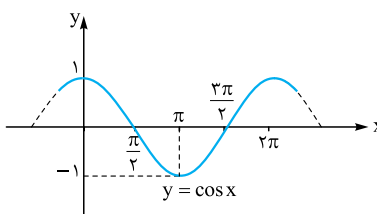
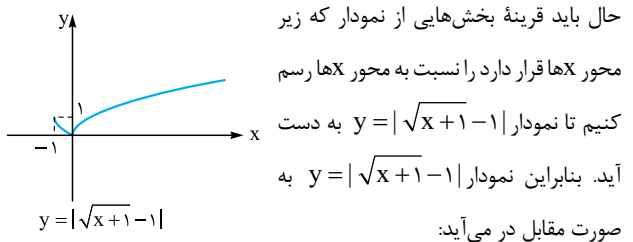
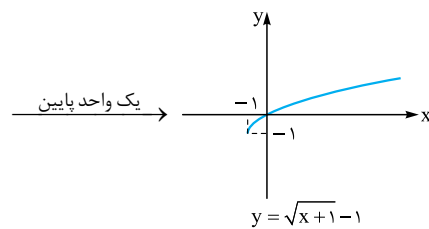
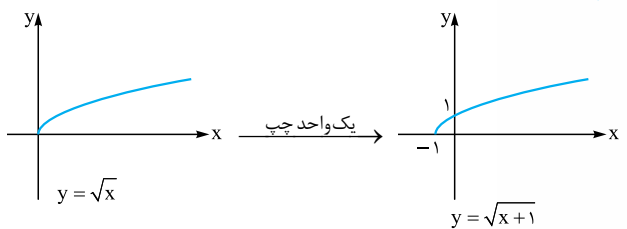
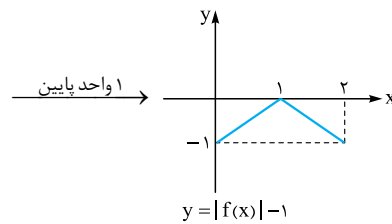
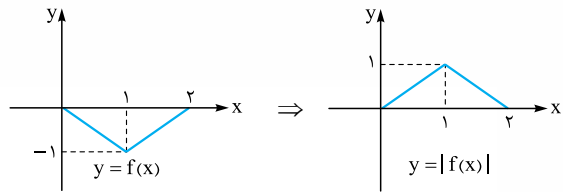
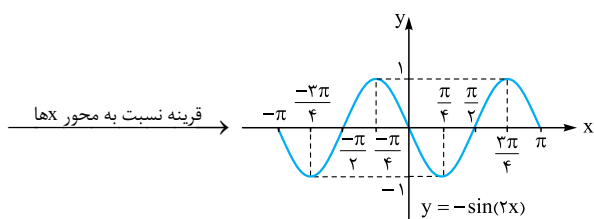
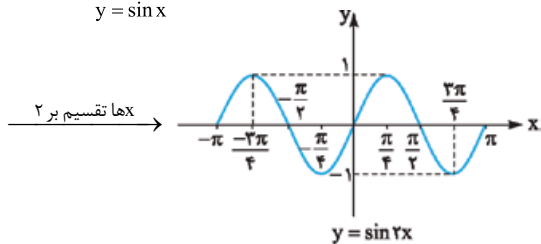
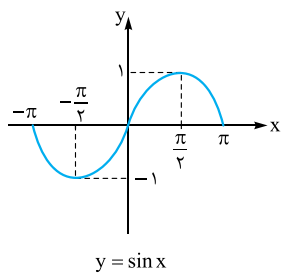
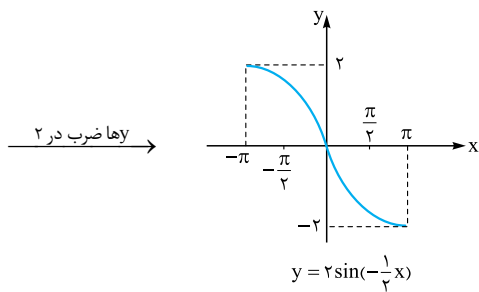
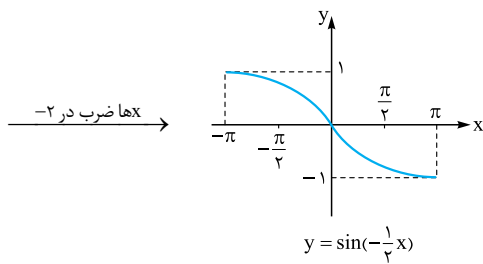
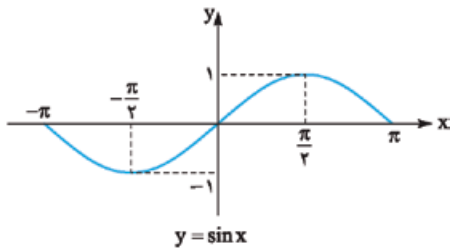
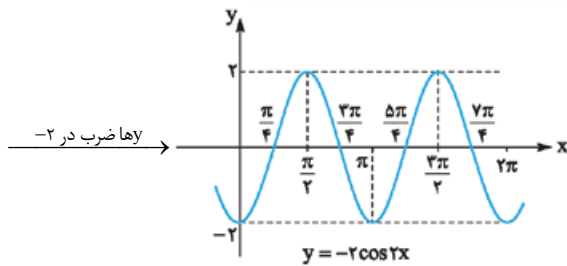


.۹۵



۹۶. نمودار $y = |x+2|$ در بازه $[-4, 1]$ به صورت زیر است:





تابع وارون

فصل ۱
درس ۳

صفحه ۲۴ تا ۲۹ کتاب درسی

سخن‌دبیر

مبحث یک‌به‌یک و وارون رو سال گذشته تو ریاضی ۲ فوندید. مباحث مهمی که تو کتاب ریاضی ۳ مطرح می‌شه، یکی پیدا کردن ضابطه تابع وارون، دومی شرط وارون هم بودن دو تابع، سومی محدود کردن دامنه تابع واسه وارون پذیر بودن و آخری هم یافتن مقدار تابع وارون یا تابع مرکب وارون تو یه نقطه هست. در اغلب موارد تو نهایی از این مبحث سوال طرح می‌شه.

رابطه تابع یک‌به‌یک و وارون پذیری

از سال گذشته به خاطر دارید که هر تابع یک‌به‌یک، وارون پذیر است و بالعکس. وارون تابع f را معمولاً با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم.

روش محاسبه ضابطه تابع وارون

اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، در معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

مثال ضابطه وارون توابع زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = 3 - \sqrt{2x - 7} \quad \text{ب) } g(x) = x^2 - 4x; x \leq 2$$

✓ پاسخ: الف) به جای $f(x)$ ، قرار می‌دهیم y . پس:

$$y = 3 - \sqrt{2x - 7} \Rightarrow \sqrt{2x - 7} = 3 - y$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 2x - 7 = (3 - y)^2 \Rightarrow 2x = (3 - y)^2 + 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}((3 - y)^2 + 7)$$

با تعویض جای x و y داریم:

$$y = \frac{1}{2}(((3 - x)^2 + 7)) \text{ یا } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}((3 - x)^2 + 7)$$

ب) به جای $g(x)$ قرار می‌دهیم y . پس:

$$y = x^2 - 4x \xrightarrow{+4} y + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow y + 4 = (x - 2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y + 4} = |x - 2|$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض: } x \leq 2} \sqrt{y + 4} = -(x - 2) = -x + 2$$

$$\Rightarrow x = 2 - \sqrt{y + 4} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 2 - \sqrt{x + 4}$$

$$\text{با } g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 4}$$

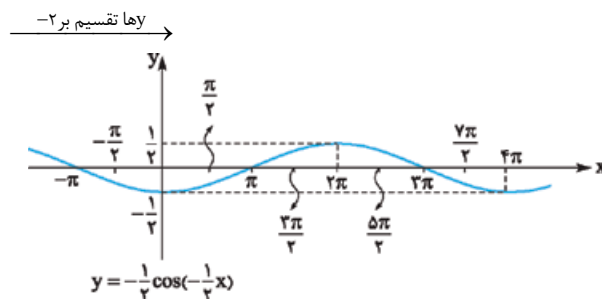
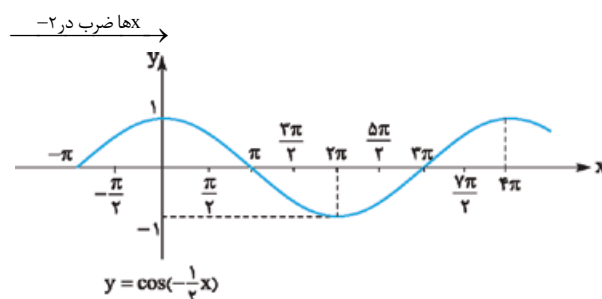
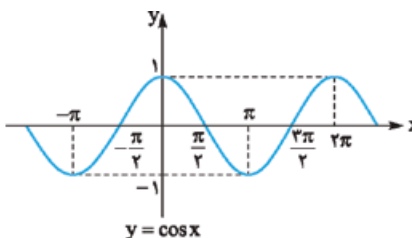
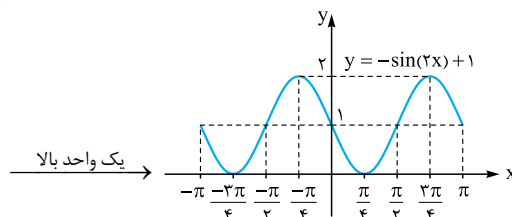
نکته اگر f تابعی یک‌به‌یک و f^{-1} وارون آن باشد، آن‌گاه:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x; x \in D_{f^{-1}}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x; x \in D_f$$

شرط وارون یکدیگر بودن دو تابع

بر اساس نکته قبل، شرط آن که دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، آن است که: $(f \circ g)(x) = x; x \in D_g$ و $(g \circ f)(x) = x; x \in D_f$ یعنی باید ترکیب دو تابع، برابر تابع همانی شود.



توجه کنید که $\cos(-\frac{1}{4}x)$ با $\cos(\frac{1}{4}x)$ برابر است. در واقع کسینوس منفی را می‌خورد.

۱۰۵ ضابطه تابع f را می‌توان به صورت $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ نوشت. حال می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{واحد پایین}} y = (x - 1)^2 - 2$$

$$\xrightarrow{\text{واحد چپ}} y = ((x + 1) - 1)^2 - 2 = x^2 - 2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y = -(x^2 - 2)$$

بنابراین ضابطه نمودار حاصل در نهایت به صورت $y = -x^2 + 2$ درمی‌آید.

$$y = -x^2 + 2x \xrightarrow{\text{یک واحد راست}} y = -(x - 1)^2 + 2(x - 1)$$

$$= -x^2 + 2x - 1 + 2x - 2 \Rightarrow y = -x^2 + 4x - 3$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد پایین}} y = (-x^2 + 4x - 3) - 2$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 4x - 5$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y = -(-x)^2 + 4(-x) - 5$$

$$\Rightarrow y = -x^2 - 4x - 5$$

مثال اگر $f(x) = 3x - 1$ و $g(x) = 2x^2 + 1$ باشد، مطلوب است محاسبه:

الف) $f^{-1}(5)$ ب) $(f^{-1} \circ g^{-1})(17)$

پاسخ: می‌دانیم اگر $f^{-1}(b) = a$ ، آن‌گاه $f(a) = b$. پس:

الف) $f^{-1}(5) = x \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow 3x - 1 = 5 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2$

ب) می‌دانیم $(f^{-1} \circ g^{-1})(17) = f^{-1}(g^{-1}(17))$ ، پس داریم:

$g^{-1}(17) = x \Rightarrow g(x) = 17 \Rightarrow 2x^2 + 1 = 17 \Rightarrow 2x^2 = 16$

$\Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow g^{-1}(17) = 2$

$f^{-1} \circ g^{-1}(17) = f^{-1}(g^{-1}(17)) = f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2$

$\Rightarrow 3x - 1 = 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$

$\Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1}(17) = 1$

پاسخ سوالات

۱۰۷. درست

۱۰۸. نادرست. زیرا:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-\frac{2x+7}{6}) = -\frac{7}{6}(-\frac{2x+7}{6}) - 3 \neq x$

۱۰۹. نادرست. زیرا به طور مثال اگر $f = \{(1, 2)\}$ ، آن‌گاه $f^{-1} = \{(2, 1)\}$

$f \circ f^{-1} = \{(1, 1)\}$ ، $f^{-1} \circ f = \{(2, 2)\}$ و در نتیجه $f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$

۱۱۰. درست

۱۱۱. نادرست. زیرا باید داشته باشیم: $f^{-1}(25) = 2 \Rightarrow f(2) = 25$

اما $f(2) = 23$ است.

۱۱۲. نادرست

$y = x^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y} = |x| \xrightarrow{x \leq 0} \sqrt{y} = -x$

$\Rightarrow x = -\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

۱۱۳. ۲

۱۱۴. $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ زیرا:

$y = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} x = \sqrt[3]{y-1}$

$\Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

۱۱۵. -۲، زیرا:

$f^{-1}(-17) = x \Rightarrow f(x) = -17 \Rightarrow 7x - 3 = -17$

$\Rightarrow 7x = -14 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f^{-1}(-17) = -2$

۱۱۶. ۱، زیرا:

$g^{-1}(9) = x \Rightarrow g(x) = 9 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2$

$f^{-1}(g^{-1}(9)) = f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow 5x - 3 = 2$

$\Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$

۱۱۷. $f(x) = -\sqrt{x-4}$ زیرا:

$y = x^2 + 4 \Rightarrow y - 4 = x^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y-4} = |x|$

مثال نشان دهید دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x+5}{2}}$ وارون یکدیگر هستند.

پاسخ: باید نشان دهیم ترکیب این دو تابع، برابر تابع همانی است:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{\frac{x+5}{2}}) = 2(\sqrt{\frac{x+5}{2}})^2 - 5 = 2(\frac{x+5}{2}) - 5 = x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 5) = \sqrt{\frac{(2x^2 - 5) + 5}{2}} = \sqrt{\frac{2x^2}{2}} = \sqrt{x^2} = x$

پس f و g وارون یکدیگرند.

محدود کردن دامنه تابع

گاهی اوقات یک تابع به دلیل یک‌به‌یک نبودن، وارون‌پذیر نیست. در این گونه توابع می‌توان دامنه تابع را طوری محدود کرد که به یک تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر تبدیل شود. به طور مثال تابع $y = x^2$ یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه تابع را به بازه $[0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از آن‌ها محدود کنیم، یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر خواهد شد.

نکته اگر دامنه تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به یکی از بازه‌های

$[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ یا $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این بازه‌ها محدود

شود، تابع حاصل یک‌به‌یک می‌شود. برای سهولت کافی است دامنه تابع را به بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ محدود کنیم.

مثال دامنه تابع $f(x) = x^2 - 2x + 5$ را به گونه‌ای محدود کنید که تابع حاصل یک‌به‌یک باشد و سپس ضابطه وارون آن را به دست آورید.

پاسخ: طبق نکته قبل، کافی است دامنه تابع را به بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ محدود کنیم تا تابع f در این بازه یک‌به‌یک شود:

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 1} \Rightarrow x = 1$

بنابراین دامنه تابع را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. داریم:

$f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x-1)^2 + 4$

$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 4, x \geq 1$

به جای $f(x)$ ، y قرار داده و ضابطه وارون آن را می‌یابیم:

$y = (x-1)^2 + 4 \Rightarrow (x-1)^2 = y - 4$

$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x-1| = \sqrt{y-4}$

$\xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y-4} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y-4}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-4}$

نکته اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، آن‌گاه:

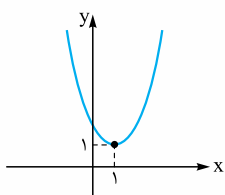
۱ نمودارهای f و f^{-1} نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم ($y = x$) قرینه یکدیگرند.

۲ $R_f = D_{f^{-1}}$ و $D_f = R_{f^{-1}}$

۳ $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$

$$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1 \quad ۱۲۳$$

نمودار تابع h یک سهمی به صورت مقابل است:

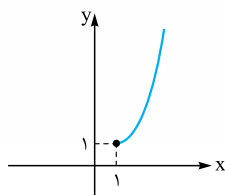


با توجه به نمودار، برای این که تابع h یک‌به‌یک باشد، کافی است دامنهٔ تابع را

به یکی از بازه‌های $[1, +\infty)$ یا $(-\infty, 1]$ یا زیرمجموعه‌ای از آن‌ها محدود کنیم. برای

راحتی کار، دامنه را به بازهٔ $[1, +\infty)$ محدود

می‌کنیم. در این حالت نمودار به صورت مقابل درمی‌آید:



با توجه به نمودار، داریم: $D_h = [1, +\infty)$, $R_h = [1, +\infty)$

ضابطهٔ وارون آن را می‌یابیم: $y = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = y-1$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x-1| = \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 1 \Rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

۱۲۴ می‌دانیم شرط آن که دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، آن است که

$(fog)(x) = x$. بنابراین باید $(fog)(x)$ را تشکیل دهیم و نشان دهیم بعد

از ساده‌شدن به x تبدیل می‌شود:

$$f(x) = 3x - 4 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{x+4}{3}$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+4}{3}\right) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4$$

$$= (x+4) - 4 = x$$

بنابراین توابع f و g وارون یکدیگرند.

۱۲۵ باید نشان دهیم $(fog)(x) = x$.

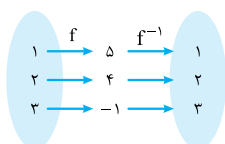
$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\lambda + x^2) = -\sqrt{(\lambda + x^2) - \lambda} = -\sqrt{x^2}$$

$$= -|x| \stackrel{x \leq 0}{=} -(-x) = x$$

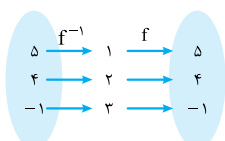
پس f و g وارون یکدیگر هستند.

۱۲۶

$$f = \{(1, 5), (2, 4), (3, -1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(5, 1), (4, 2), (-1, 3)\}$$



$$\Rightarrow f^{-1} \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$



$$\Rightarrow f \circ f^{-1} = \{(5, 5), (4, 4), (-1, -1)\}$$

$$\xrightarrow{x \leq 0} \sqrt{y-4} = -x \Rightarrow x = -\sqrt{y-4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x-4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - 3 \Rightarrow y + 3 = -\frac{1}{4}x$$

۱۱۸

$$\xrightarrow{\times(-\frac{4}{1})} -\frac{1}{4}y - \frac{6}{1} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{6}{1}$$

$$y = -5 - \sqrt{3x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+1} = -5-y$$

۱۱۹

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 3x+1 = (-5-y)^2$$

$$\xrightarrow{(-u)^2 = u^2} 3x+1 = (y+5)^2 \Rightarrow 3x = (y+5)^2 - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}((y+5)^2 - 1) \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3}((x+5)^2 - 1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+3} \Rightarrow x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

۱۲۰

$$\Rightarrow D_f = [-3, +\infty)$$

از طرفی همواره داریم $\sqrt{x+3} \geq 0$ ، پس $f(x) \geq 0$ یعنی $R_f = [0, +\infty)$.

حال وارون تابع f را می‌یابیم:

$$y = \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{توان } 2} y^2 = x+3 \Rightarrow x = y^2 - 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

می‌دانیم $D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$ و $R_{f^{-1}} = D_f = [-3, +\infty)$ و

$$R_{f^{-1}} = D_f = [-3, +\infty)$$

$$y = 1 + \sqrt{x-2} \Rightarrow y-1 = \sqrt{x-2}$$

(الف) ۱۲۱

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} (y-1)^2 = x-2 \Rightarrow x = (y-1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$$

(ب) برای رسم نمودار $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

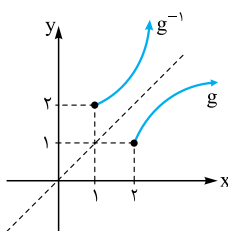
کافی است نمودار $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به

راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم. این

نمودار را رسم کرده و قرینهٔ آن را نسبت

به نیمساز ربع اول و سوم رسم می‌کنیم تا

نمودار وارون آن نیز به دست آید:



۱۲۲ نمودار تابع f به صورت مقابل است:

اگر دامنهٔ تابع را به یکی از بازه‌های $[2, +\infty)$ یا

$(-\infty, 2]$ یا زیرمجموعه‌ای از آن‌ها محدود کنیم،

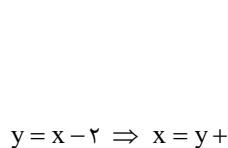
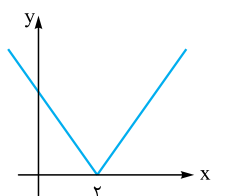
تبدیل به تابع یک‌به‌یک می‌شود. با فرض این که

دامنه را به بازهٔ $[2, +\infty)$ محدود کرده باشیم،

$$f(x) = |x-2| \stackrel{x \geq 2}{=} x-2$$

داریم:

$$y = x-2 \Rightarrow x = y+2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x+2$$



اگرچه هر دو تابع $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ همانی هستند ولی با همدیگر برابر نیستند.
در واقع داریم:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x ; x \in D_f$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x ; x \in D_{f^{-1}}$$

۱۲۷. می‌دانیم $(g^{-1} \circ f^{-1})(\Delta) = g^{-1}(f^{-1}(\Delta))$. بنابراین:

$$f^{-1}(\Delta) = x \Rightarrow f(x) = \Delta \Rightarrow \frac{1}{\Delta}x - 3 = \Delta \Rightarrow \frac{1}{\Delta}x = \Delta + 3$$

$$\Rightarrow x = 64 \Rightarrow f^{-1}(\Delta) = 64 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(\Delta)) = g^{-1}(64)$$

$$g^{-1}(64) = x \Rightarrow g(x) = 64 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow (g^{-1} \circ f^{-1})(\Delta) = 4$$

۱۲۸.

$$f^{-1} \circ g^{-1}(3) = f^{-1}(g^{-1}(3))$$

$$g^{-1}(3) = x \Rightarrow g(x) = 3 \Rightarrow \sqrt{x+17} = 3 \Rightarrow x+17=9$$

$$\Rightarrow x = -8 \Rightarrow g^{-1}(3) = -8$$

حال باید $f^{-1}(g^{-1}(3)) = f^{-1}(-8)$ را بیابیم:

$$f^{-1}(-8) = x \Rightarrow f(x) = -8 \Rightarrow \frac{1}{\Delta}x - 3 = -8 \Rightarrow \frac{1}{\Delta}x = -5$$

$$\Rightarrow x = -25 \Rightarrow f^{-1}(-8) = -25 \Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1}(3) = -25$$

۱۲۹. الف) ۱) با توجه به نمودار، معلوم می‌شود که $f(-1) = 1$ و $g(1) = -5$.

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = -5$$

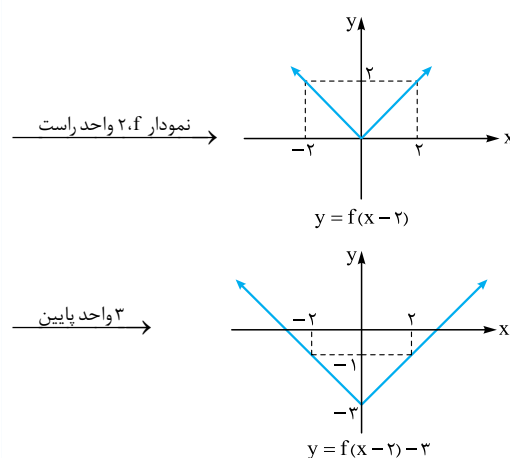
پس:

۲) با توجه به نمودار، $f(0) = 2$ ، پس $f^{-1}(2) = 0$ و همچنین $g(-4) = 0$ ، پس $g^{-1}(0) = -4$.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(0) = -4$$

بنابراین:

ب) برای رسم نمودار تابع $y = f(x-2) - 3$ ، کافی است ابتدا نمودار $y = f(x)$ را دو واحد به راست و سپس ۳ واحد به پایین منتقل کنیم:



۱۳۰.

$$(f \circ g)^{-1}(1) = x \Rightarrow (f \circ g)(x) = 1 \Rightarrow f(g(x)) = 1$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 1 \Rightarrow \frac{1}{25}x^2 - 4 = 1 \Rightarrow \frac{1}{25}x^2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \times 5 \Rightarrow x^2 = 125 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(1) = 5$$