

مقدمه مؤلفان

سلام عزیزان، امیدواریم همیشه شاد و تندرست باشید و ایام به کامتون باشه. خردادماه ۱۴۰۱ مسئولین، زحمت یه مصوبه‌ای را کشیدن که کمی کنکور رو از ریل یکنواخت قدیمی جداش کرد و نقش سوابق تحصیلی رو تو کنکور پررنگ کرد. مصوبه می‌گه که نمره سوابق تحصیلی واسه سنجش و پذیرش تو رشته‌های پرمقاضی دانشگاه‌ها قراره به صورت جدول زیر اجرا بشه:

سال تحصیلی دوازدهم	پایه تحصیلی	میزان تأثیر
۱۴۰۱-۱۴۰۲	فقط دوازدهم	۴۰ درصد قطعی
۱۴۰۲-۱۴۰۳	فقط دوازدهم	۵۰ درصد قطعی
۱۴۰۳-۱۴۰۴	یازدهم و دوازدهم	۶۰ درصد قطعی
۱۴۰۴-۱۴۰۵ و بعد از آن	دهم، یازدهم و دوازدهم	۶۰ درصد قطعی

با این حساب سوابق تحصیلی یا همون نمرات امتحانای نهایی می‌تونه تو نتیجه کنکور مؤثر واقع بشه. یعنی اگه نمره نهایی خوب باشه، نمره کنکور رو بالا می‌بره و اگه بد باشه، نمره کنکور رو پایین میاره.

یه مثالی واستون می‌زنیم تا بهتر متوجه موضوع بشید:

فرض کنین ترازتون تو کنکور ۶۵۰۰ باشه و نمره امتحاناتتون تو نهایی خیلی خوب باشه و بعد از تبدیل به تراز، ترازش ۷۵۰۰ بشه. اون وقت تراز امتحاناتون تو کنکور با احتساب ۴۰ درصد قطعی، به صورت زیر محاسبه می‌شه:

$$۶۵۰۰ \times \frac{۶۰}{۱۰۰} + ۷۵۰۰ \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۳۹۰۰ + ۳۰۰۰ = ۶۹۰۰$$

یعنی نمره نهایی تونسته، ۴۰۰ تا ترازتون رو بالا بکشه!

با این اوضاع می‌بایست هر دو جنبه نهایی و کنکور رو تقویت کنین.

هدف ما هم از نگارش این کتاب دقیقاً همینیه که بتونه شما رو به طور عالی واسه نهایی آماده کنه.

ویژگی‌های این کتاب:

- ۱ پوشش کامل سؤالات نهایی داخل و خارج از دی ۹۷ تا الان
- ۲ پوشش کامل مثالا، تمرینا، کار در کلاس و حتی متن کتاب درسی
- ۳ ارائه یه درس‌نامه توپ و کامل و روان، اما مختصر و مفید
- ۴ پاسخ‌های تشریحی با رویکرد آموزشی
- ۵ ارائه چند دوره امتحان نهایی به همراه پاسخ و بارم‌بندی نمونه نهایی واسه آماده‌سازی بهتر شما
- ۶ ارائه تحلیل آماری از سؤالات نهایی که وزن و سهم هر فصل و هر قسمت رو تو نهایی نشون می‌ده
- ۷ حذف سؤالات تکراری و ادغام سؤالات خیلی مشابه

لازمه تشکر و قدردانی کنیم از:

- ۱ آقایان دکتر ابودر نصری و دکتر کمیل نصری
- ۲ تیم خوب تولید خیلی‌سبز که زحمت کتاب رو دوش اون‌ها بود.
- ۳ ویراستاران خوب کتاب خانم‌ها مریم بیوک‌زاده، نرجس تیمناک و زهرا فتحی
- ۴ سرکار خانم لولوا مرادی که مسئولیت هماهنگی کتاب را بر عهده داشتند.

با احترام

ابوالقاسم شعبانی - علیرضا برائی نژاد

فهرست مطالب

درسنامه + پاسخ	سؤال	فصل اول: تابع
۴۹	۵	درس ۱- تبدیل نمودار توابع
۵۷	۹	درس ۲- قسمت اول: تابع درجه سوم، توابع یکنوا
۶۲	۱۰	درس ۲- قسمت دوم: بخش پذیری و تقسیم
		فصل دوم: مثلثات
۶۴	۱۲	درس ۱- قسمت اول: مفهوم دوره تناوب و محاسبه مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب توابع سینوسی و کسینوسی
۶۶	۱۳	درس ۱- قسمت دوم: نوشتن ضابطه توابع سینوس و کسینوس
۶۸	۱۴	درس ۱- قسمت سوم: تابع تانژانت
۷۰	۱۵	درس ۲: معادلات مثلثاتی
		فصل سوم: حدهای نامتناهی- حد در بی نهایت
۷۵	۱۷	درس ۱: حدهای نامتناهی
۷۸	۲۰	درس ۲: حد در بی نهایت
۸۲	۲۲	درس ۳: مجانب های قائم و افقی
		فصل چهارم: مشتق
۸۷	۲۶	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق
۹۰	۲۹	درس ۲- قسمت اول: مشتق پذیری و پیوستگی و مشتق های چپ و راست
۹۵	۳۲	درس ۲- قسمت دوم: قواعد مشتق گیری
۱۰۰	۳۵	درس ۳: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر
		فصل پنجم: کاربردهای مشتق
۱۰۳	۳۸	درس ۱- قسمت اول: نقاط بحرانی و رابطه بین یکنوایی و مشتق
۱۰۶	۴۰	درس ۱- قسمت دوم: اکسترمم های نسبی و مطلق
۱۱۲	۴۳	درس ۱- قسمت سوم: بهینه سازی
۱۱۴	۴۴	درس ۲: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن
۱۱۸	۴۶	درس ۳: رسم نمودار تابع
		ضمیمه: امتحانات نهایی
۱۳۲	۱۲۶	امتحان شماره (۱): خرداد ۱۴۰۰
۱۳۳	۱۲۷	امتحان شماره (۲): شهریور ۱۴۰۰
۱۳۴	۱۲۸	امتحان شماره (۳): خرداد ۱۴۰۱
۱۳۵	۱۳۰	امتحان شماره (۴): شهریور ۱۴۰۱



تابع

فصل ۱

مشاوره

سلام مهندس جان! قبل از هر چیز براتون سلامتی، موفقیت و شادمانی آرزو می‌کنیم. اولین فصل کتاب اختصاص داره به یار دیرینه‌تون! یعنی تابع بزرگوار. توی کتاب درسی این فصل دوتا درس داره. واسه سهولت توی خوندن اون، درس دوم رو به دو قسمت تقسیم کردیم. مباحثی که تو این فصل باهاشون مواجه ایم اینان:

(۱) تبدیل نمودار توابع (۲) تابع درجه سوم و توابع یکتا (۳) بخش پذیری و تقسیم

بارم‌بندی این فصل توی امتحانای داخلی و نهایی مطابق جدول زیر هستش:

دی (داخلی)

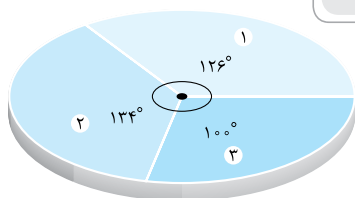
خرداد (نهایی)

شهریور و دی (نهایی)

نمره ۷

نمره ۲/۵

نمره ۳/۵



وزن هر کدام از قسمتی که جداولون کرده بودیم توی امتحانای نهایی رو توی نمودار دایره‌ای می‌بینید:

صفحه ۲ تا ۱۲ کتاب درسی

تبدیل نمودار توابع

درس ۱

درس‌نامه ۱ را در صفحه ۴۹ ببینید.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(تجربی دی و شهریور ۹۹)

۱- دامنه تابع $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.

(تجربی خرداد ۹۹ خارج)

۲- دامنه تابع $y = -kf\left(\frac{x}{p}\right)$ همان دامنه تابع $y = -kf(x)$ می‌باشد.

(تجربی دی ۹۸)

۳- برد تابع $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

(دی ۹۵)

۴- اگر دامنه تابع f برابر $[-1, 3]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x)$ بازه $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ است.

(دی ۹۹ خارج)

۵- اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(3x+1)$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-5, 4]$ است.

(خرداد ۹۹ خارج)

۶- نمودار تابع $y = (x+2)^3$ را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار $y = x^3$ به سمت چپ رسم کرد.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۷- برای رسم نمودار تابع $f\left(\frac{x}{p}\right)$ با استفاده از نمودار $f(x)$ کافی است طول نقاط نمودار $f(x)$ را نصف کنیم.

(دی ۱۴۰۰ خارج و مشابه دی ۹۹ خارج)

۸- نمودار تابع $y = f(-x)$ ، قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها است.

(مشابه خرداد ۹۸)

۹- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

(دی ۹۶)

۱۰- برای رسم تابع $y = |x+1| - 2$ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار f یک واحد روی محور طول‌ها به راست و ۲ واحد به پایین حرکت می‌کند. (دی ۹۶)

جاهای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.

(شهریور ۹۹)

۱۱- اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x+1)$ برابر است.

(دی ۹۸ خارج)

۱۲- اگر بازه $[-4, 2]$ دامنه تابع $f(2x+1)$ باشد، دامنه تابع $f(x)$ برابر است.

(شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۱۳- تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-2, 1]$ را در نظر بگیرید، دامنه $y = -f(2x) + 1$ بازه است.

(شهریور ۹۵)

۱۴- اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ باشد، برد این تابع است.

۱۵- نقطه $(2, -1)$ در تابع $y = -f(2x + 1) - 1$ متناظر با نقطه در تابع $f(x)$ است.

(خرداد ۹۹ خارج)

۱۶- نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور است.

(مشابه شهریور ۹۸ خارج)

۱۷- اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید.

(شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۹۸ خارج)

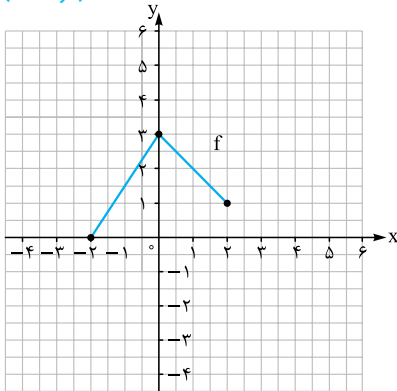
۱۸- در رسم نمودار $y = af(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، اگر $0 < a < 1$ ، نمودار در امتداد محور y ها می شود.

(مشابه شهریور ۱۴۰۰ خارج و مشابه دی ۹۹ خارج)

در هر یک از سؤالات زیر نمودار تابع f رسم شده است. نمودار تابع خواسته شده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

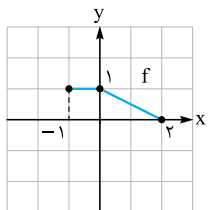
(خرداد ۱۴۰۱)

$$g(x) = f(x - 1) \quad -19$$



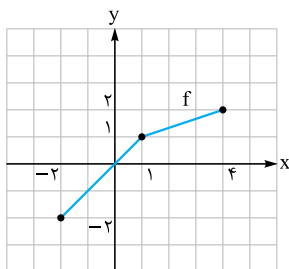
(دی ۱۴۰۰ و مشابه خرداد ۹۹ خارج)

$$g(x) = f(x - 1) + 2 \quad -20$$



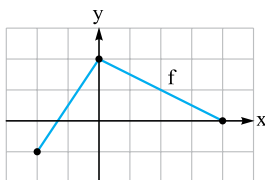
(دی ۱۴۰۰ خارج، خرداد ۹۹ و خرداد ۹۸ خارج)

$$g(x) = f(2x) - 1 \quad -21$$



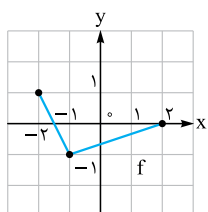
(دی ۹۷ و مشابه دی ۹۷ خارج)

$$g(x) = -f(2x) \quad -22$$

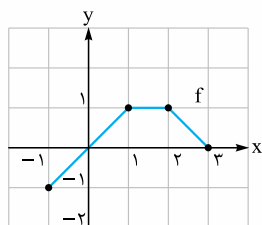


(شهریور ۱۴۰۰، مشابه خرداد ۱۴۰۱ خارج، مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج و مشابه خرداد ۹۸)

$$g(x) = 2f(x + 1) \quad -23$$

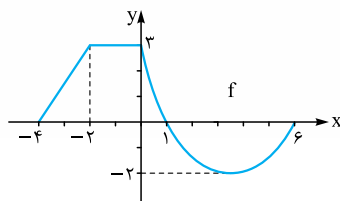


(دی ۹۹ و مشابه دی ۹۸)



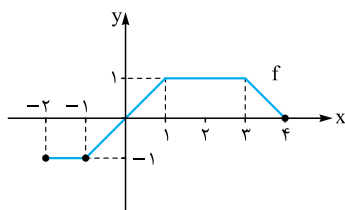
$$g(x) = f(2x - 1) \quad -24$$

(دی ۹۸ خارج، مشابه دی ۹۹ خارج و مشابه شهریور ۹۸)

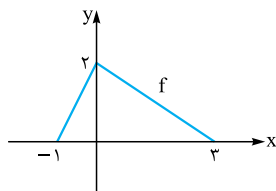


$$g(x) = f(3 - x) \quad -25$$

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)



$$g(x) = 2f(3x + 1) - 1 \quad -26$$



$$g(x) = -f\left(1 - \frac{x}{2}\right) \quad -27$$

-۲۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

(تجربی شهریور ۱۴۰۰)

-۲۹ الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 4]$ رسم کنید.

(شهریور ۱۴۰۱)

ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.

نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

(خرداد ۱۴۰۰)

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad -30$$

(شهریور ۹۹)

$$y = \cos(2x) - 1 \quad -31$$

(مشابه فعالیت کتاب درسی)

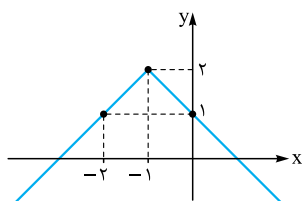
ب) به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید.

$$y = \frac{1}{3} \sin(x + 1) \quad -32$$

$$y = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \quad -33$$

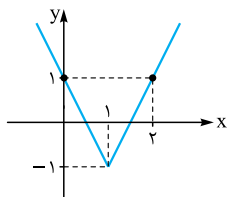
(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

نمودارهای زیر از قرینه‌یابی و تبدیل تابع $y = |x|$ به دست آمده‌اند، ضابطه نمودارها را مشخص کنید.



-۳۴

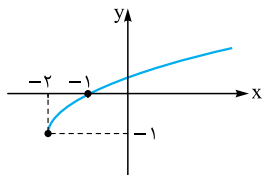
-۳۵



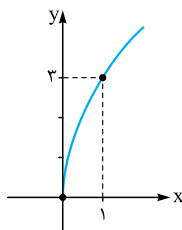
(مشابه تمرین کتاب درسی)

با توجه به نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ ، ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای زیر را بنویسید.

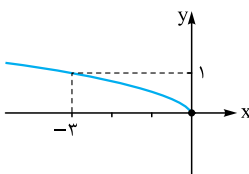
-۳۶



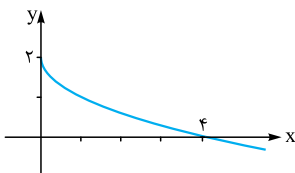
-۳۷



-۳۸



-۳۹



(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

$$y = -\sqrt{\frac{x}{2}} \quad -۴۰$$

$$y = \sqrt{-x} - 2 \quad -۴۱$$

$$y = -|x + 2| - 1 \quad -۴۲$$

$$y = |-2x + 4| \quad -۴۳$$

$$y = 2^{-x} + 1 \quad -۴۴$$

$$y = -\log(x + 2) \quad -۴۵$$

$$y = 1 + \log 4x \quad -۴۶$$

$$y = \sqrt{2 - x} \quad -۴۷$$

$$y = (2x - 1)^2 \quad -۴۸$$

-۴۹ نقطه $A(2, -1)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه متناظر نقطه A را روی نمودار $y = -2f(3x - 1) + 1$ به دست آورید.-۵۰ ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به چپ منتقل کرده، سپس آن را نسبت محور y ها قرینه کرده و در نهایت ۲ واحد در راستای محور y ها به بالا منتقل می‌کنیم. ضابطه تابع جدید را بنویسید.-۵۱ نمودار $y = x^2 + x$ را یک واحد به راست منتقل کرده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار حاصل را بنویسید.



درس ۲

قسمت دوم: بخش پذیری و تقسیم

صفحه ۱۸ تا ۲۲ کتاب درسی

درس نامه ۲ - قسمت دوم را در صفحه ۶۲ ببینید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

۹۹- در تقسیم $f(x) = x^3 + 2$ بر $p(x) = 2x - 1$ باقی‌مانده برابر صفر است. (خرداد ۹۹ خارج)

۱۰۰- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$ بر $x + 2$ برابر ۳ است. (خرداد ۹۸ خارج)

۱۰۱- عبارت $x^n + a^n$ با شرط زوج بودن n ، بر $x + a$ بخش پذیر است. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۰۲- عبارت $x^n - a^n$ همواره بر $x - a$ بخش پذیر است. (خرداد ۹۵ و مشابه فعالیت کتاب درسی)

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۱۰۳- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^2 + kx - 1$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، مقدار k برابر است. (دی ۹۷)

۱۰۴- در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ از درجه n بر چندجمله‌ای درجه دوم $q(x)$ ، درجه چندجمله‌ای باقی‌مانده است.

۱۰۵- اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد به طوری که $p(k) = -3$ ، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای برابر ۳- است.

۱۰۶- عبارت $x^n - a^n$ با شرط بر $x + a$ بخش پذیر است. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۰۷- باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱ و مشابه شهریور ۹۸ خارج)

۱۰۸- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^4 + kx^2 - 3$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

۱۰۹- باقی‌مانده تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $x + 2$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.

(خرداد ۱۴۰۰ و مشابه خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۱۱۰- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

(خرداد ۹۹، شهریور ۹۸، دی ۹۸ و ۹۹ خارج و مشابه دی ۱۴۰۰)

۱۱۱- در چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

(دی ۹۸، خرداد و دی ۹۹ خارج)

۱۱۲- اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ را به دست آورید. (خرداد ۹۸)

۱۱۳- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x - 2$ بخش پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x + 1$ برابر ۳ باشد.

(شهریور ۹۹، خرداد ۱۴۰۰ خارج، مشابه شهریور ۱۴۰۰ خارج و مشابه دی ۹۷ خارج)

۱۱۴- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ بر $x - 1$ و $x + 1$ به ترتیب ۴ و ۶ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ را بیابید.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۱۵- اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 1$ و $x + 1$ به ترتیب برابر ۱ و ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $x^2 - 1$ به دست آورید.

۱۱۶- اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x^2 + x - 2$ بخش پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ را بر $x - 2$ به دست آورید.

هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل خواسته‌شده تجزیه کنید.

(دی ۹۹، خرداد ۹۸، دی ۹۷ و مشابه خرداد ۹۸ خارج)

۱۱۷- $x^6 - 1$ بر عامل $x - 1$

(دی ۹۷، خرداد ۹۸ خارج و مشابه خرداد ۹۹ خارج)

۱۱۸- $x^5 + 1$ بر عامل $x + 1$

(شهریور ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱)

۱۱۹- $x^5 + 32$ بر عامل $x + 2$

(دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۰- $x^6 - 64$ بر عامل $x + 2$

هر یک از چندجمله‌ای‌های داده‌شده را تجزیه کنید.

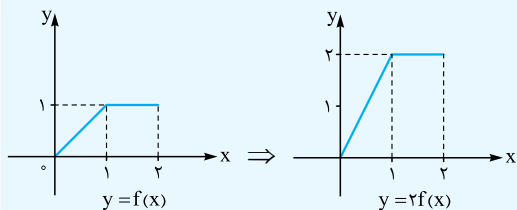
(دی ۹۹ خارج)

۱۲۱- $x^5 - 1$

۱۲۲- $x^7 + 1$

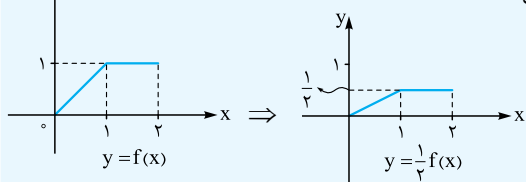
۳ $y = kf(x)$: در نمودار $y = f(x)$ ها y بر k برابر می‌شود.

به طور مثال:



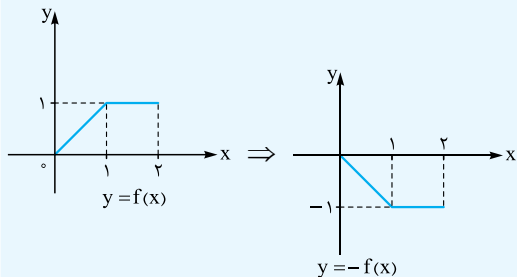
۴ $y = \frac{1}{k}f(x)$: در نمودار $y = f(x)$ ها y بر k تقسیم می‌شود.

به طور مثال:



۵ $y = -f(x)$: نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه می‌شود.

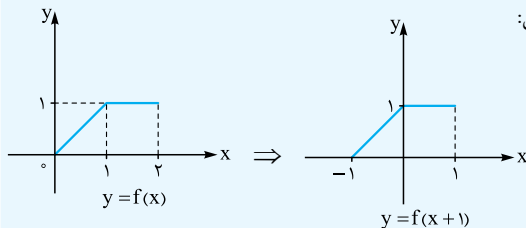
به طور مثال:



تبدیلات مربوط به محور x ها

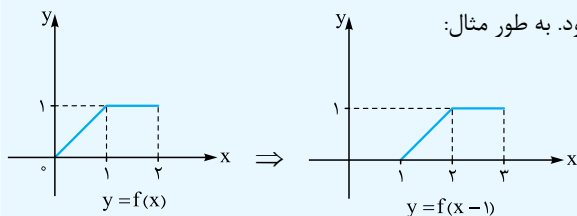
۱ $y = f(x + k)$: نمودار $y = f(x)$ واحد به چپ منتقل می‌شود.

به طور مثال:



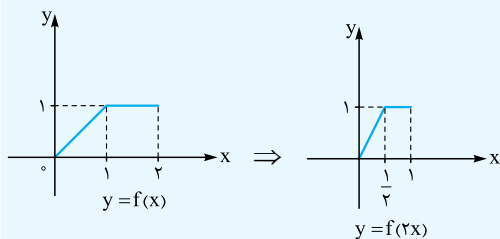
۲ $y = f(x - k)$: نمودار $y = f(x)$ واحد به راست منتقل می‌شود.

به طور مثال:



۳ $y = f(kx)$: در نمودار $y = f(x)$ ها x بر k تقسیم می‌شود.

به طور مثال:



تبدیل نمودار توابع

فصل ۱
درس ۱

صفحه ۲ تا ۱۳ کتاب درسی

سخن‌دبیر

تبدیل نمودار که فیلیا اونو با انتقال می‌شناسن، مبحثیه که از سال دهم تا حالا باهاش فاطره داریم. مبحث بسیار جذابی که آگه بهوش مسلط بشی فیلی از نمودارها رو می‌تونی تو سه سوت رسمش کنی. از این مبحث همیشه تو نهایی سؤال اومده.

تبدیل نمودار توابع

تبدیل نمودارها در دو راستا صورت می‌گیرد:

۱ در راستای محور x ها که به صورت چپ و راست انجام می‌شود.

۲ در راستای محور y ها که به صورت بالا و پایین انجام می‌شود.

نکته در تبدیل نمودار توابع، دانستن مطالب زیر ضروری و کارگشا است:

۱ در تبدیلات مربوط به محور y ها، همه‌چیز و از جمله ترتیب ۴ عمل اصلی، مستقیم عمل می‌کند.

۲ در تبدیلات مربوط به محور x ها، همه‌چیز و حتی ترتیب ۴ عمل اصلی به صورت وارونه عمل می‌کند.

۳ در تبدیلات ترکیبی، اولویت با تبدیلات مربوط به محور x ها است. یعنی ابتدا تبدیلات مربوط به محور x ها را انجام می‌دهیم و سپس تبدیلات مربوط به محور y ها را.

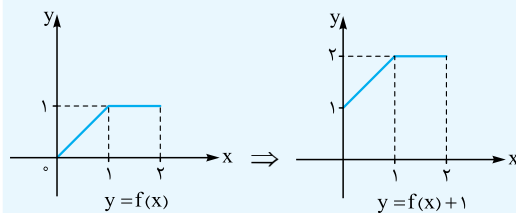
تبدیل نمودار توابع در یک نگاه

فرض کنیم نمودار یا ضابطه تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k > 0$ عدد حقیقی باشد، در این صورت تمام تبدیلات نمودار تابع $y = f(x)$ از قوانینی که در ادامه آمده است، تبعیت می‌کنند:

تبدیلات مربوط به محور y ها

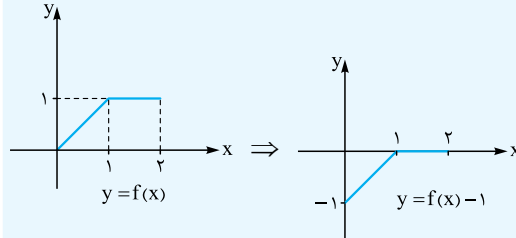
۱ $y = f(x) + k$: نمودار $y = f(x)$ واحد به بالا منتقل می‌شود.

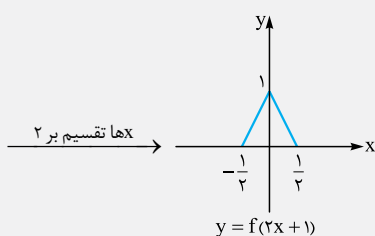
به طور مثال:



۲ $y = f(x) - k$: نمودار $y = f(x)$ واحد به پایین منتقل می‌شود.

به طور مثال:





چند نکته

۱ با توجه به مطالب گفته شده، می توان گفت:

الف) دامنه توابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ یکی است. همچنین برد $y = kf(x)$ ، k برابر برد $y = f(x)$ است.
 ب) برد توابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ یکسان است. همچنین دامنه $y = f(kx)$ ، $\frac{1}{k}$ برابر دامنه $y = f(x)$ است.

۲ نمودار $y = kf(x)$ ، از انبساط یا انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور y ها به دست می آید. در واقع اگر $k > 1$ ، انبساط عمودی با ضریب k و اگر $0 < k < 1$ ، انقباض عمودی با ضریب k خواهیم داشت و چنانچه $k < 0$ ، در این صورت ابتدا نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه نموده و در این حالت اگر $k < -1$ ، انبساط عمودی با ضریب $|k|$ و اگر $-1 < k < 0$ ، انقباض عمودی با ضریب $|k|$ خواهیم داشت.

۳ نمودار $y = f(kx)$ ، از انبساط یا انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید. در واقع اگر $k > 1$ ، انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ و اگر $0 < k < 1$ ، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ خواهیم داشت و چنانچه $k < 0$ ، در این صورت ابتدا نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه نموده و در این حالت اگر $k < -1$ ، انقباض افقی با ضریب $|\frac{1}{k}|$ و اگر $-1 < k < 0$ ، انبساط افقی با ضریب $|\frac{1}{k}|$ خواهیم داشت.

مثال درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه $y = f(x)$ با دامنه $y = f(2x)$ یکسان است.

ب) برد تابع $y = f(x)$ و برد تابع $y = f(\frac{1}{3}x)$ برابر است.

پ) نمودار $y = 2f(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ به دست می آید.

ت) نمودار $y = f(3x)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ به دست می آید.

✓ پاسخ:

الف) نادرست. برد این دو تابع یکسان و دامنه آن ها متفاوت است.

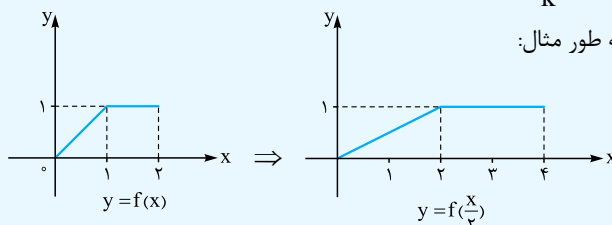
ب) درست

پ) درست

ت) نادرست. از انقباض افقی به دست می آید نه انبساط.

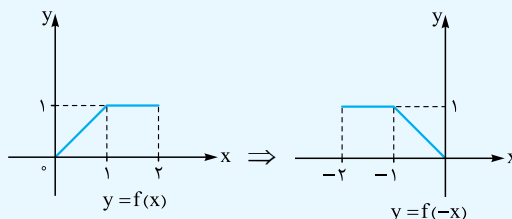
۴ $y = f(\frac{1}{k}x)$ در نمودار $y = f(x)$ ، x ها در k ضرب می شود.

به طور مثال:



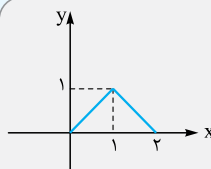
۵ $y = f(-x)$ نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور y ها قرینه می شود.

به طور مثال:



مثال نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت

مقابل است.

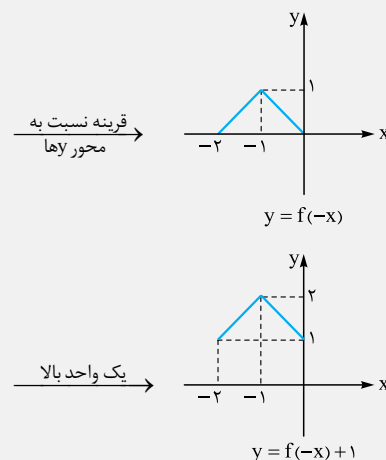


نمودار توابع زیر را رسم کنید.

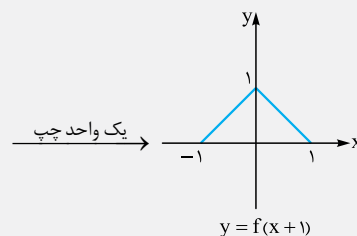
ب) $y = f(2x + 1)$

الف) $y = f(-x) + 1$

✓ پاسخ: الف)



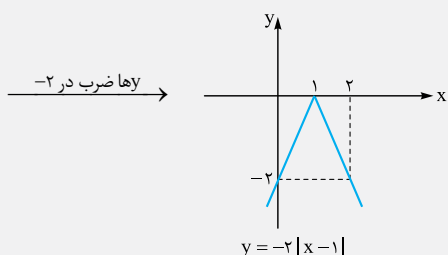
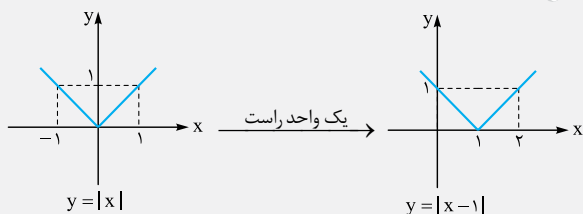
ب) در این جا تمام تغییرات روی x ها انجام می شود. همان طور که گفته شد، تغییرات روی محور x ها به صورت وارونه عمل می کند. یعنی در این جا ابتدا جمع را اعمال می کنیم و سپس حاصل ضرب را. یعنی ابتدا نمودار را یک واحد به چپ منتقل می کنیم و سپس در نمودار حاصل، x ها را بر ۲ تقسیم می کنیم:



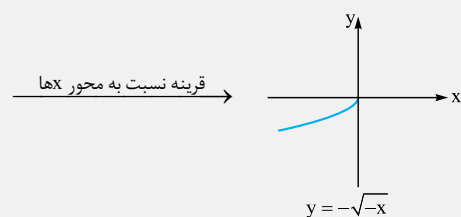
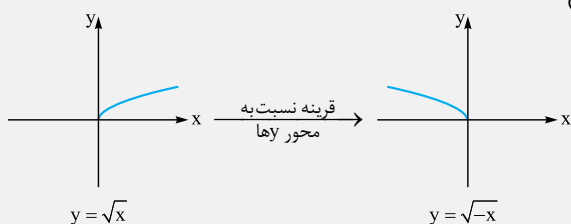
مثال نمودار توابع زیر را با استفاده از نمودارهای نکته قبل رسم کنید.

(الف) $y = -2|x-1|$ (ب) $y = -\sqrt{-x}$ (پ) $y = -2\sin(\frac{x}{2})$

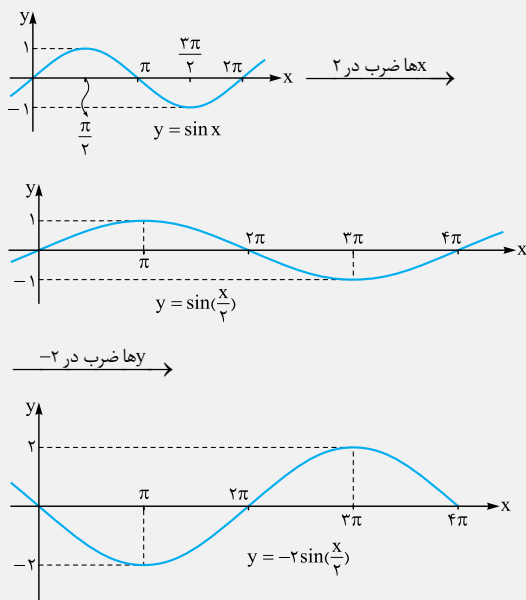
✓ پاسخ: الف)



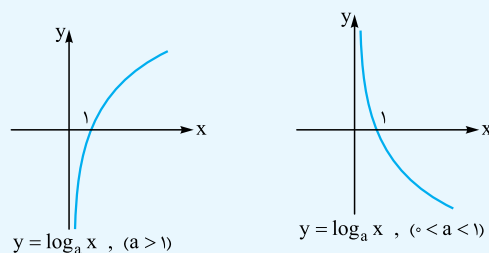
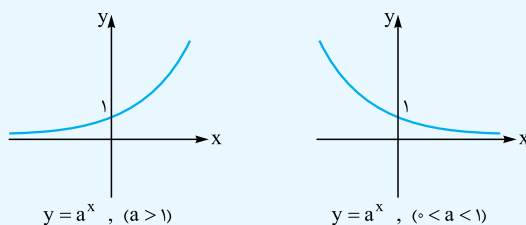
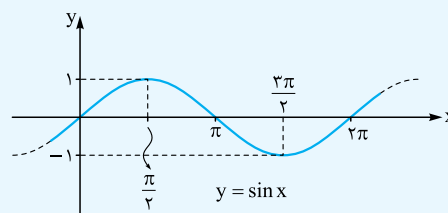
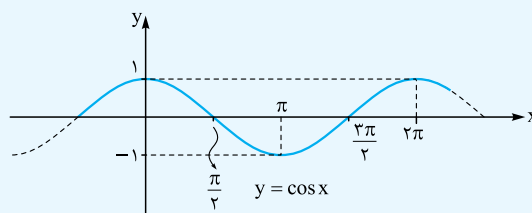
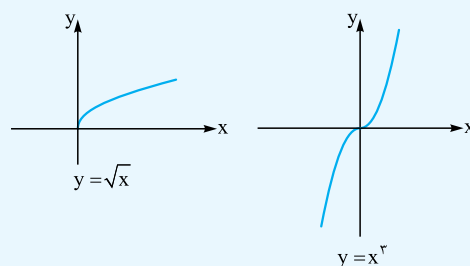
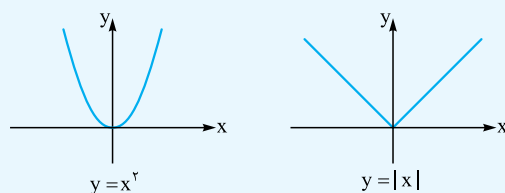
(ب)



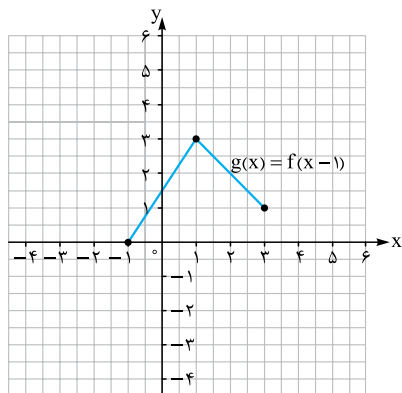
(پ)



نکته نمودار توابع مهمی که در تبدیل نمودارها به آن‌ها نیازمندیم به صورت زیر است:

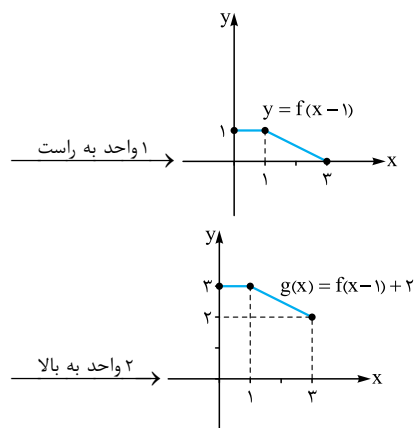


۱۸. منقبض

۱۹. کافی است که نمودار تابع f یک واحد به سمت راست منتقل شود.

$$D_g = [-1, 3], R_g = [0, 3]$$

با توجه به نمودار داریم:

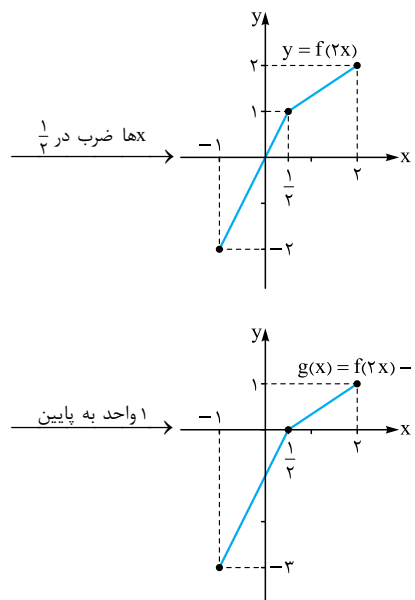
۲۰. نمودار f را یک واحد به راست و ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم:

$$D_g = [0, 3], R_g = [2, 3]$$

بنابراین داریم:

۲۱. در نمودار f ، x را بر ۲ تقسیم کرده و سپس آن را یک واحد به پایین

منتقل می‌کنیم:



$$\Rightarrow D_g = [-1, 2], R_g = [-3, 1]$$

پاسخ سؤالات

۱. درست

۲. نادرست؛ دامنه $y = -kf(\frac{x}{p})$ ، دو برابر دامنه $y = -kf(x)$ است.۳. نادرست؛ برد $y = kf(x)$ ، k برابر برد $y = f(x)$ است.۴. درست؛ زیرا: $D_f = [-1, 3] \Rightarrow -1 \leq 2x \leq 3$

$$\xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$$

۵. درست؛ زیرا:

$$g(x) = f(\frac{3x+1}{x}), D_g = [-2, 1] \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$$

$$\xrightarrow{\times 3} -6 \leq 3x \leq 3 \xrightarrow{+1} -5 \leq \frac{3x+1}{x} \leq 4$$

$$\Rightarrow X \in [-5, 4] \Rightarrow D_f = [-5, 4]$$

۶. درست

۷. نادرست؛ برای رسم نمودار تابع $f(\frac{x}{p})$ ، باید طول نقاط نمودار $f(x)$ را دو برابر کنیم.۸. نادرست؛ قرینه نسبت به محور y ها است.

۹. درست

۱۰. نادرست؛ برای رسم g ، نمودار f یک واحد روی محور طول‌ها به چپ و سپس دو واحد به پایین حرکت می‌کند.

$$3x+1 \in [-2, 1] \Rightarrow -2 \leq 3x+1 \leq 1$$

۱۱. $[-1, 0]$ ؛ زیرا

$$\xrightarrow{-1} -3 \leq 3x \leq 0 \xrightarrow{\div 3} -1 \leq x \leq 0$$

$$g(x) = f(\frac{2x+1}{x}), X \in D_f$$

۱۲. $[-7, 5]$ ؛ زیرا

$$D_g = [-4, 2] \Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \xrightarrow{\times 2} -8 \leq 2x \leq 4$$

$$\xrightarrow{+1} -7 \leq \frac{2x+1}{x} \leq 5 \Rightarrow -7 \leq X \leq 5$$

$$\Rightarrow D_f = [-7, 5]$$

۱۳. $[-1, \frac{1}{p}]$ ؛ زیرا

$$2x \in [-2, 1] \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 1 \xrightarrow{\div 2} -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

۱۴. $[0, +\infty)$ ؛ داریم $\sqrt{2-x} \geq 0$ ، پس حداقل مقدار این تابع برابر صفر است و لذا $R_f = [0, +\infty)$.۱۵. $(5, 0)$ ؛ زیرا برای رسیدن از نمودار $y = f(x)$ به نمودار $y = -f(2x+1) - 1$ ، می‌بایست x ها را یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس آن‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. همچنین y ها را قرینه کرده و یک واحد به پایین منتقل کنیم. حالا برای رسیدن از نمودار $y = -f(2x+1) - 1$ به $y = f(x)$ برعکس عمل می‌کنیم، ببینید:

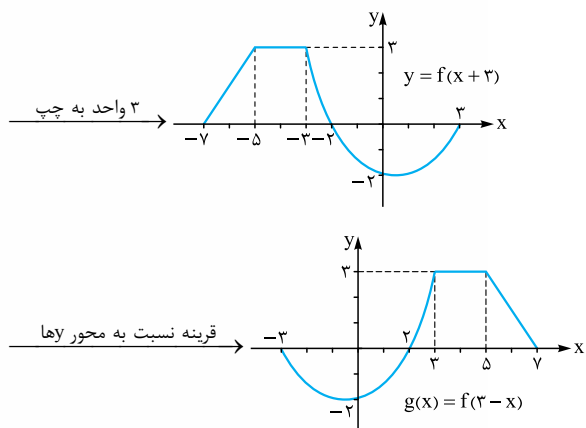
$$y = -1 \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = 0 \xrightarrow{\text{قرینه}} y = 0$$

$$x = 2 \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} x = 4 \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} x = 5$$

۱۶. x ها

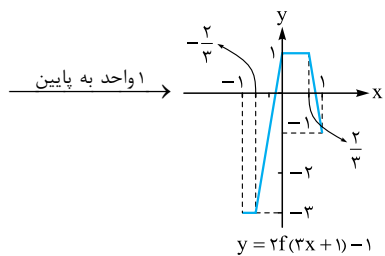
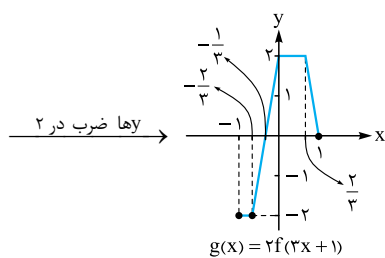
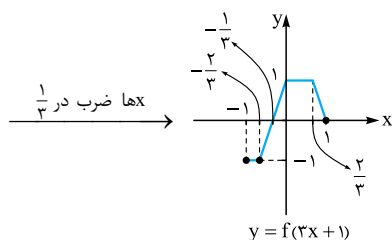
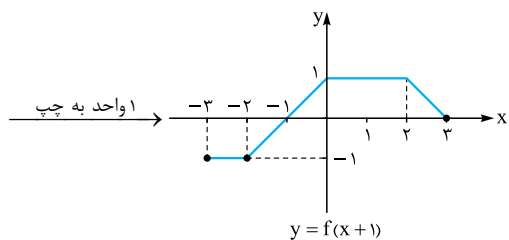
۱۷. انقباض

.۲۵

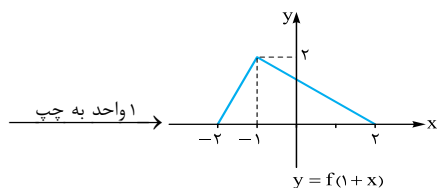


$\Rightarrow D_g = [-3, 7], R_g = [-2, 3]$ با توجه به نمودار:

.۲۶

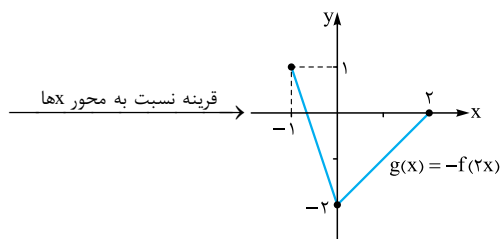
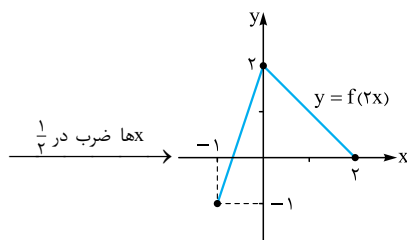


$\Rightarrow D_g = [-1, 1], R_g = [-3, 1]$



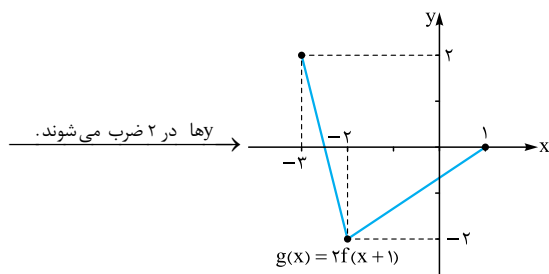
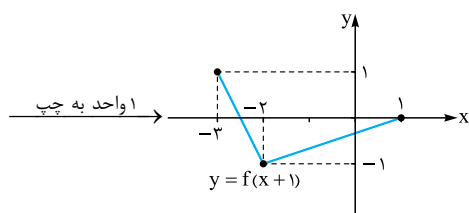
.۲۷

.۲۲



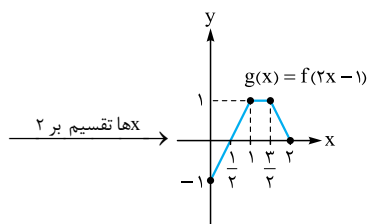
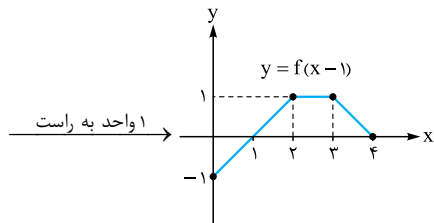
$\Rightarrow D_g = [-1, 2], R_g = [-2, 1]$

.۲۳

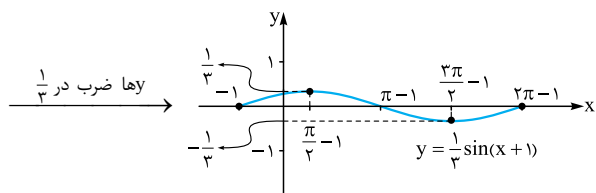
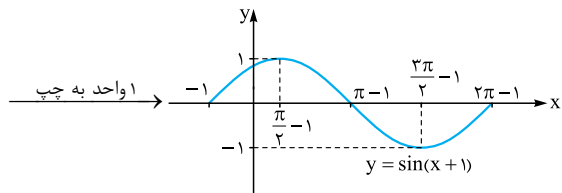
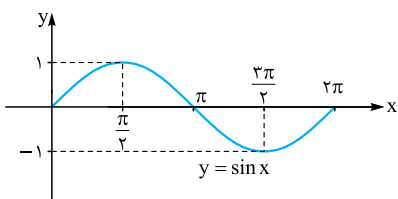
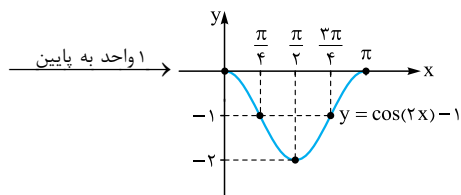
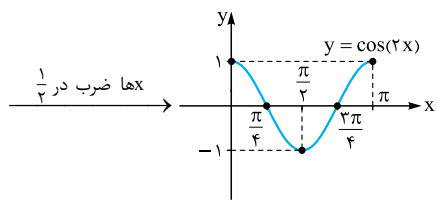


$\Rightarrow D_g = [-3, 1], R_g = [-2, 2]$

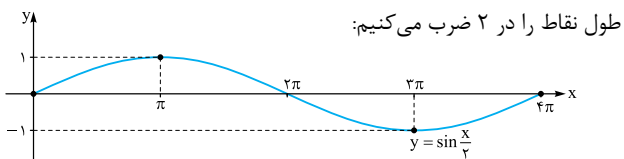
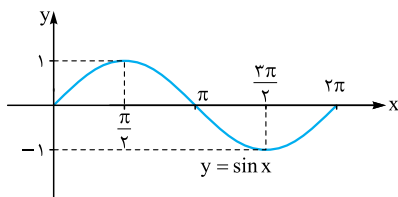
.۲۴



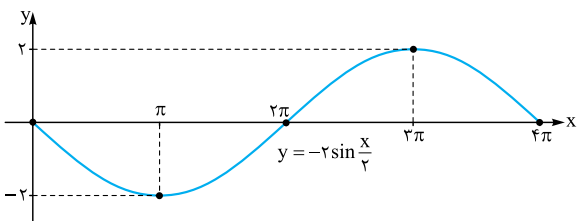
$\Rightarrow D_g = [0, 2], R_g = [-1, 1]$



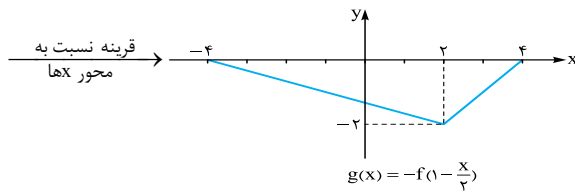
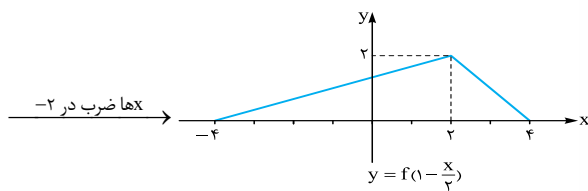
$$\Rightarrow D = [-1, 2\pi - 1], R = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$$



ها ضرب در 2 و قرینه
(ها ضرب در -2)



۳۱



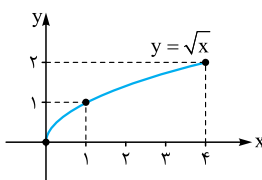
$$\Rightarrow D_g = [-4, 4], R_g = [-2, 0]$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

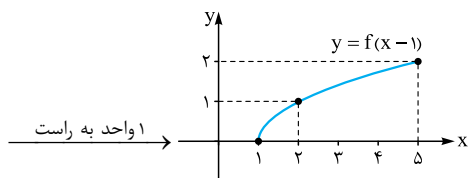
$$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{واحد به پایین}} y = (x-1)^2 - 2$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به چپ}} y = (x+1-1)^2 - 2 \Rightarrow y = x^2 - 2$$

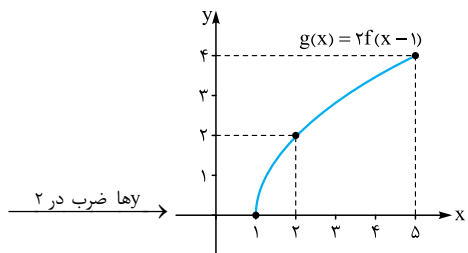
$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور Xها}} y = -(x^2 - 2) \Rightarrow y = -x^2 + 2$$



۲۹ الف

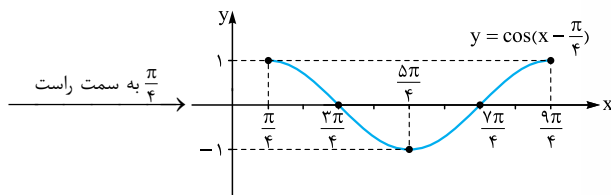
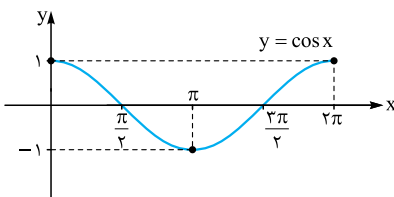


ب

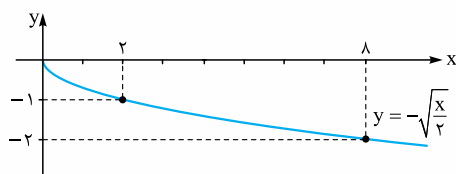


$$\Rightarrow D_g = [1, 5], R_g = [0, 4]$$

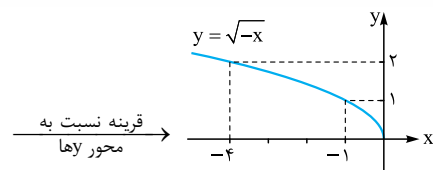
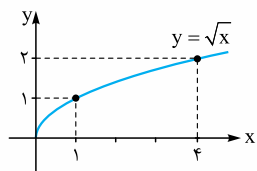
۳۰



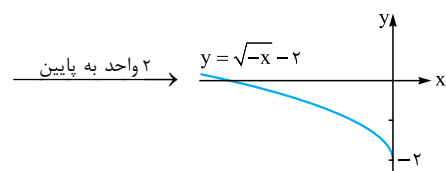
نمودار حاصل را نسبت به محور X ها قرینه می‌کنیم:



۴۱. ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم:

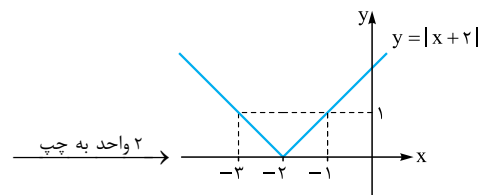
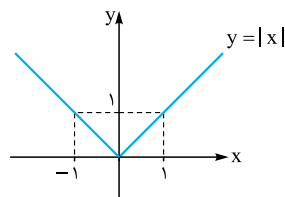


قرینه نسبت به محور y ها

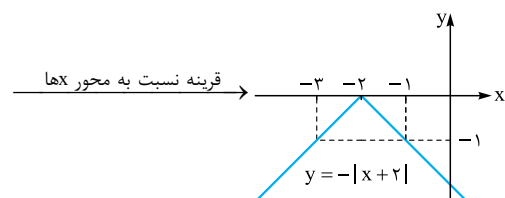


۲ واحد به پایین

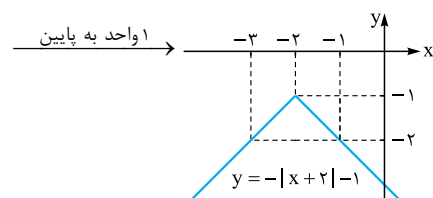
۴۲. ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم می‌کنیم:



۲ واحد به چپ



قرینه نسبت به محور x ها

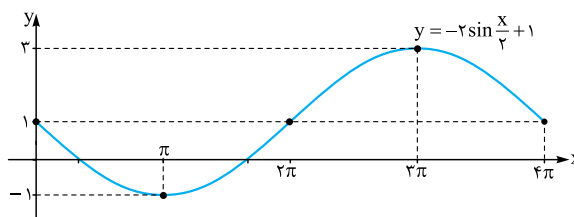


۱ واحد به پایین

۴۳. ابتدا ضابطه تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

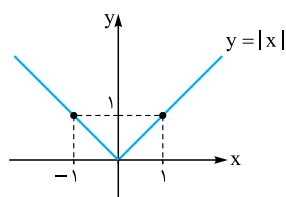
$$y = |-2x + 4| \Rightarrow y = |-2(x-2)| = |2(x-2)| = 2|x-2|$$

۱ واحد به بالا



$$D = [0, 4\pi], R = [-1, 3]$$

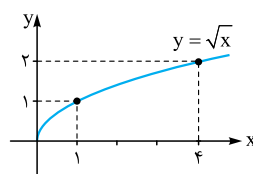
۳۴. نمودار تابع $y = |x|$ به صورت زیر است.



نمودار تابع $y = |x|$ در این شکل ابتدا نسبت به محور X ها قرینه شده است، یعنی $y = -|x|$. سپس یک واحد به چپ و دو واحد به بالا منتقل شده است، پس ضابطه نمودار به صورت $y = -|x+1| + 2$ است.

۳۵. نمودار تابع $y = |x|$ در راستای محور X ها با ضریب ۲ منقبض شده است؛ یعنی $y = |2x|$ و سپس ۱ واحد به راست و یک واحد به پایین منتقل شده است، پس ضابطه نمودار تابع به صورت $y = |2(x-1)| - 1 = |2x-2| - 1$ است.

۳۶. نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



نمودار داده شده به اندازه دو واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل شده است، پس $y = \sqrt{x+2} - 1$.

۳۷. نمودار $y = \sqrt{x}$ در راستای قائم با ضریب ۳ منبسط شده است، پس $y = 3\sqrt{x}$.

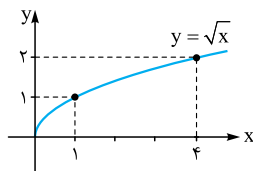
۳۸. نمودار $y = \sqrt{x}$ نسبت به محور y ها قرینه شده است و با ضریب ۳ در

راستای محور X ها منبسط شده است، پس $y = \sqrt{-\frac{1}{3}x}$.

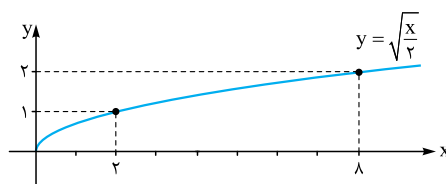
۳۹. نمودار $y = \sqrt{x}$ نسبت به محور X ها قرینه شده است و سپس دو واحد

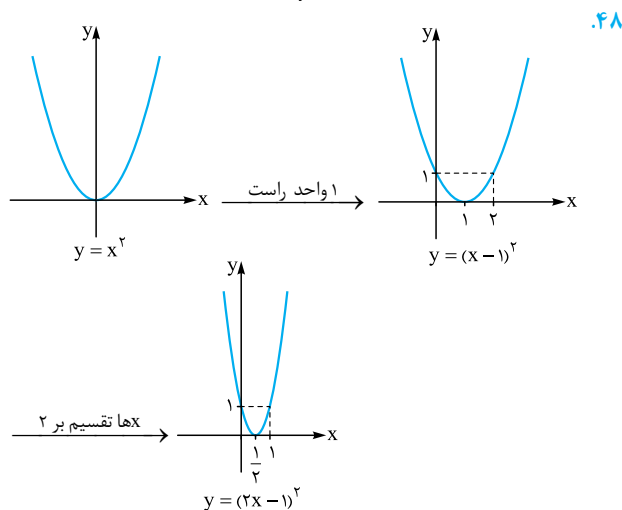
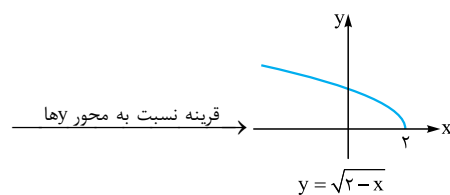
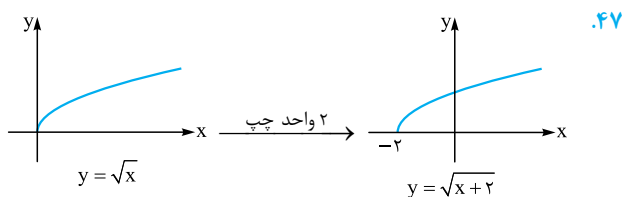
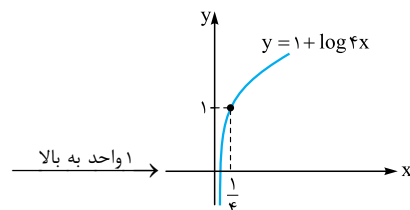
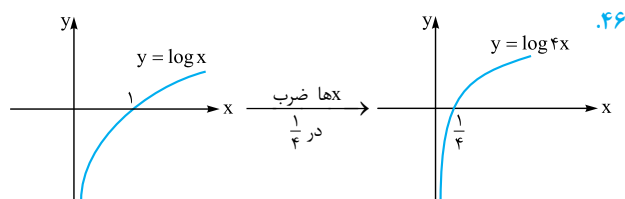
به بالا انتقال یافته است، پس $y = -\sqrt{x} + 2$.

۴۰. ابتدا نمودار $y = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم:



حال X ها را در ۲ ضرب می‌کنیم:





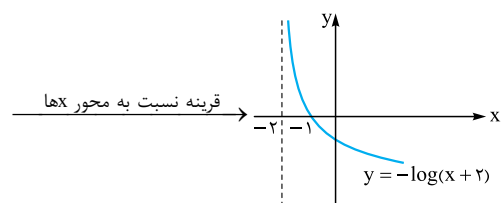
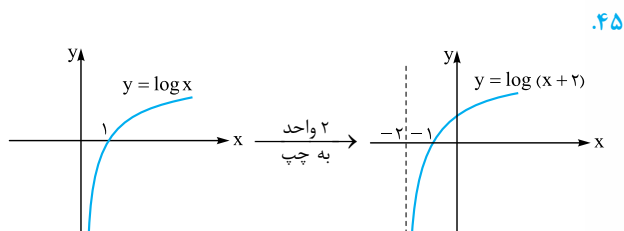
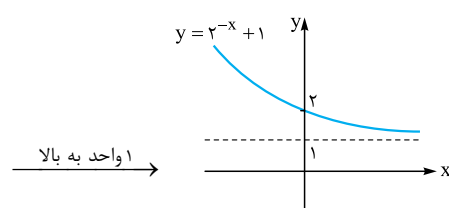
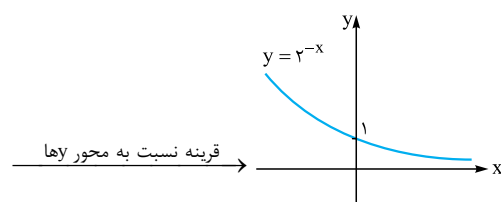
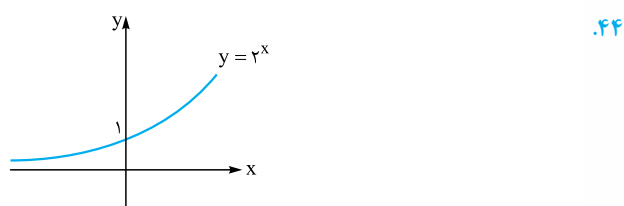
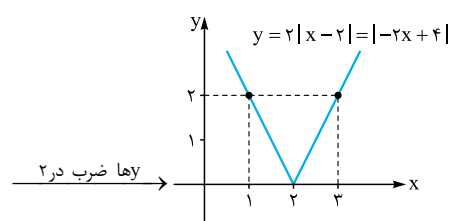
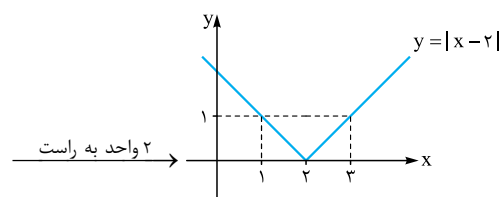
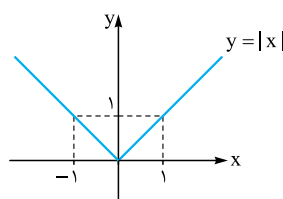
۴۹. می‌دانیم برای رسم نمودار $y = -2f(3x-1) + 1$ به کمک نمودار $y = f(x)$ ، تبدیلات مربوط به محور x ها این گونه است که نمودار تابع $y = f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کرده و سپس طول نقاط را بر ۳ تقسیم کنیم. بنابراین همین تبدیلات را روی طول نقطه A انجام می‌دهیم تا طول نقطه متناظر آن به دست آید:

$$x_A = 2 \xrightarrow{\text{واحد راست}} x = 3 \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}} x = 1$$

همچنین تبدیلات مربوط به محور y ها به این صورت است که ابتدا y ها را -2 ضرب کرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. بنابراین:

$$y_A = -1 \xrightarrow{\times(-2)} y = 2 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = 3$$

پس مختصات نقطه A' متناظر نقطه A ، عبارت است از: $A'(1, 3)$.

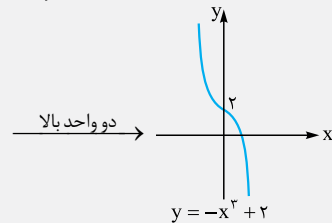
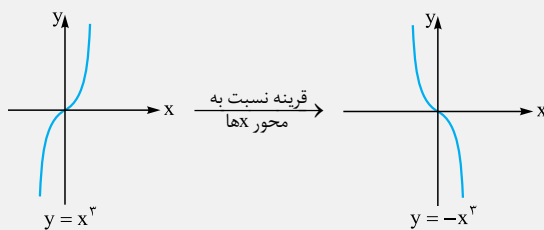
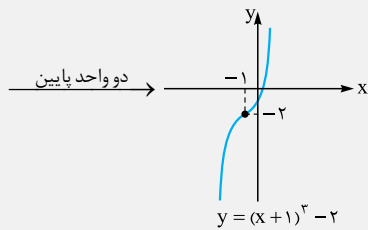
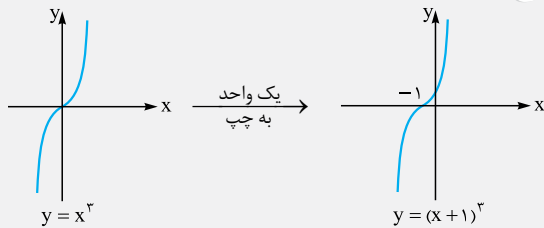


مثال به کمک نمودار $y = x^2$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

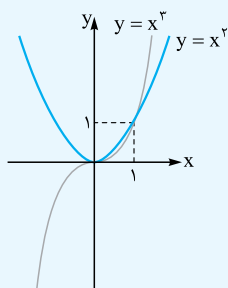
(ب) $y = -x^2 + 2$

(الف) $y = (x+1)^2 - 2$

✓ پاسخ: (الف)



مقایسه نمودارهای $y = x^2$ و $y = x^3$



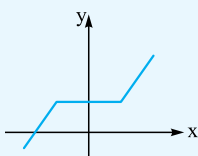
با توجه به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ می توان گفت:

در بازه $(0, 1)$ ، نمودار $y = x^2$ بالای نمودار $y = x^3$ قرار دارد.

در بازه $(1, +\infty)$ ، نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار می گیرد.

در بازه $(-\infty, 0)$ نیز این نمودار $y = x^2$ است که بالای نمودار $y = x^3$ قرار می گیرد.

توابع صعودی و توابع نزولی



تابع صعودی: تابع f را روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$)

صعودی می گوئیم، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

به زبان ساده، وقتی روی نمودار تابع صعودی از چپ به راست حرکت می کنیم، هرگز رو به پایین نمی ریم.

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{۱ واحد چپ}} \frac{x}{x \rightarrow x+1} y = \sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y}} y = \sqrt{1-x} \xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y = \sqrt{1-x} + 2$$

$$y = x^2 + x \xrightarrow{\text{۱ واحد به راست}} \frac{x}{x \rightarrow x-1} y = (x-1)^2 + (x-1)$$

$$= x^2 - 2x + 1 + x - 1 \Rightarrow y = x^2 - x$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x}} y = -(x^2 - x) \Rightarrow y = -x^2 + x$$

قسمت اول:

تابع درجه سوم، توابع یکتوا

صفحه ۱۳ تا ۱۸ کتاب درسی

تفصیل ۱

درس ۲

سخن دبیر

این درس، درس ساده ایه. تو این درس اولش با تابع $y = x^3$ و انتقال یافته های اون سر و کار داریم و بعدش صعودی و نزولی بودن تابع ها رو با توجه به نمودارهاشون بررسی می کنیم.

توابع چندجمله ای

هر تابع به شکل $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن ضرایب یعنی $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی و توان ها عدد حسابی باشند، با فرض $a_n \neq 0$ یک چندجمله ای درجه n نام دارد.

مثلاً $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + \sqrt{2}x^2 - 6x + \frac{1}{3}$ یک چندجمله ای درجه ۴ است. **تذکره** دامنه توابع چندجمله ای برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال کدام یک از توابع زیر، چندجمله ای است؟ در صورت

چندجمله ای بودن، درجه آن ها را مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

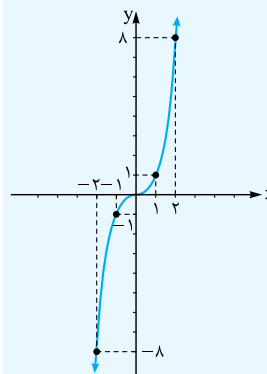
(الف) $y = \sqrt{2}x^5 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ب) $y = 6x^{\frac{1}{2}} + x^3 - 5$

✓ پاسخ: (الف) چون توان x ها، اعداد حسابی هستند، پس این تابع، چندجمله ای است و چون بزرگ ترین توان x در آن برابر ۵ است، پس درجه این چندجمله ای برابر ۵ می باشد.

(ب) $\frac{1}{2}$ یک عدد حسابی نیست. یعنی توان x در جمله $6x^{\frac{1}{2}}$ ، یک عدد حسابی نیست، پس این تابع یک تابع چندجمله ای نیست.

تابع درجه سوم $y = x^3$

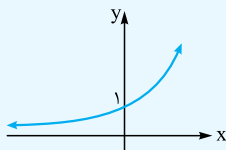
دامنه این تابع برابر $\mathbb{R}$ بوده و نمودار آن را با استفاده از نقطه یابی رسم می کنیم:



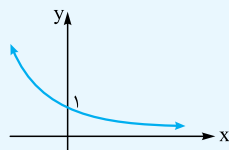
x	y = x ³
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

این تابع به تابع «لر» هم معروفه. چون که نمودارش مثل واژه لر هستش. نمودار این تابع رو باید فقط کنی.

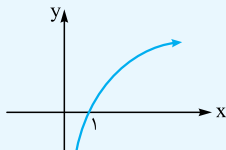
نکته نمودار توابع نمایی و لگاریتمی به صورت زیر است:



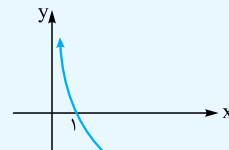
$$y = a^x, a > 1$$



$$y = a^x, 0 < a < 1$$



$$y = \log_a x, a > 1$$



$$y = \log_a x, 0 < a < 1$$

بنابراین توابع $y = \log_a x$ و $y = a^x$ با شرط $a > 1$ صعودی اکید و با شرط $0 < a < 1$ اکیداً نزولی هستند.

به طور مثال توابع $y = \log_3 x$ و $y = 3^x$ صعودی اکیدند و توابع $y = \log_{1/2} x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ نزولی اکیدند.

پاسخ سوالات

۵.۲

۵.۳ یکنوا

۵.۴ یکنوا

۵.۵ ثابت

۵.۶ صفر، زیرا فقط توابع ثابت در دامنه‌شان هم صعودی و هم نزولی هستند.

$$y = ax + b \xrightarrow{a=0} y = b$$

پس:

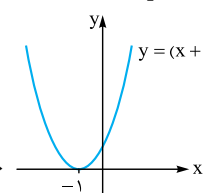
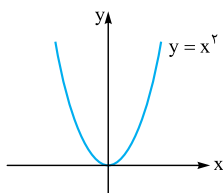
$$۵.۷. y = \sqrt[3]{x}; \text{ زیرا:}$$

$$y = x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\cdot}} \sqrt[3]{y} = x \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم.}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}} y = \sqrt[3]{x}$$

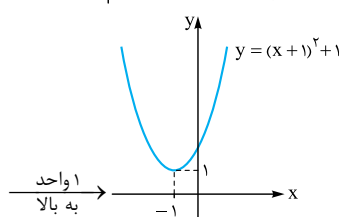
$$۵.۸. [\frac{1}{3}, +\infty); \text{ زیرا:}$$

$$(\frac{1}{3})^{3x-2} \leq \frac{1}{64} = (\frac{1}{3})^6 \xrightarrow[\text{اکیداً نزولی است.}]{\text{تابع } y=(\frac{1}{3})^x} 3x-2 \geq 6 \Rightarrow x \geq \frac{8}{3}$$

$$۵.۹. [-1, +\infty); \text{ زیرا:}$$



۱ واحد
به چپ



۱ واحد
به بالا

در بازه $[-1, +\infty)$ صعودی است.

تابع اکیداً صعودی (صعودی اکید): تابع f

روی مجموعه $A (A \subseteq D_f)$ صعودی

اکید است، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

به زبان ساده، وقتی روی نمودار تابع صعودی اکید

از چپ به راست حرکت می‌کنیم، فقط رو به بالا می‌رویم.

تابع نزولی: تابع f را روی مجموعه $A (A \subseteq D_f)$

نزولی می‌گوییم، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

به زبان ساده، وقتی روی نمودار تابع نزولی از

چپ به راست حرکت می‌کنیم، هرگز رو به بالا نمی‌رویم.

تابع اکیداً نزولی (نزولی اکید): تابع f را

روی مجموعه $A (A \subseteq D_f)$ اکیداً نزولی

می‌گوییم، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

به زبان ساده، وقتی روی نمودار تابع اکیداً

نزولی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، فقط رو به

پایین می‌رویم.

چند نکته

۱ به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

هم‌چنین به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

۲ تابع ثابت، تنها تابعی است که روی یک مجموعه هم صعودی و هم

نزولی بوده و لذا یکنوا است.

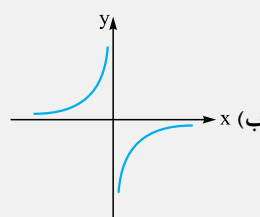
۳ هر تابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوامی باشد. اما عکس این مطلب درست نیست.

۴ هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است، اما عکس این مطلب نادرست است.

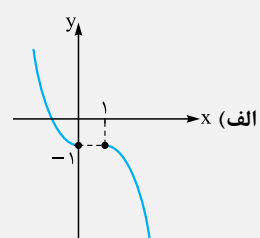
مثال وضعیت یکنوایی هر کدام از توابعی که نمودار آن در زیر رسم

شده است را بررسی کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



(ب)



(الف)

✓ **پاسخ:** (الف) در بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[1, +\infty)$ نزولی اکید است ولی

در دامنه‌اش نزولی است. توجه کنید که به دلیل داشتن دو نقطه با

عرض یکسان، نمی‌تواند در دامنه‌اش نزولی اکید باشد.

(ب) در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ صعودی اکید است،

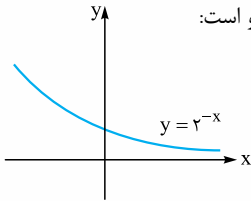
ولی در دامنه خود یعنی $\mathbb{R} - \{0\}$ غیر یکنوا است. توجه کنید که برای

آن که یک تابع روی دامنه‌اش صعودی اکید باشد، لازم است وقتی روی

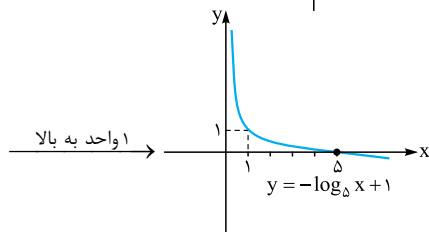
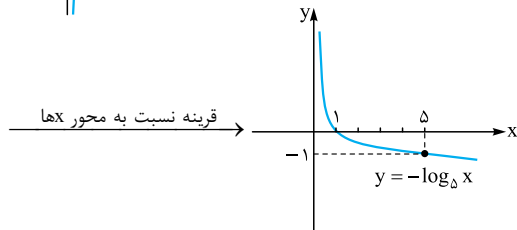
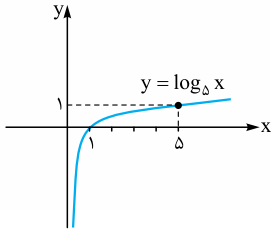
نمودار آن حرکت می‌کنیم، فقط رو به بالا برویم. ولی در اینجا نمودار

تابع این‌طور نیست و در $x = 0$ مجبوریم به سمت پایین حرکت کنیم.

۷۱. درست؛ نمودار $y = 2^{-x}$ به صورت روبه‌رو است:



۷۲. درست؛ نمودار این تابع را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



۷۳. نادرست؛ تابع $y = \log_5 x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف

لگاریتم جهت نامساوی عوض نمی‌شود:

$$\log(x-2) \leq \log(2x-3) \Rightarrow x-2 \leq 2x-3 \Rightarrow x \geq 1 \quad (1)$$

$$\text{دامنه: } \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ 2x-3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x > 2 \quad (2)$$

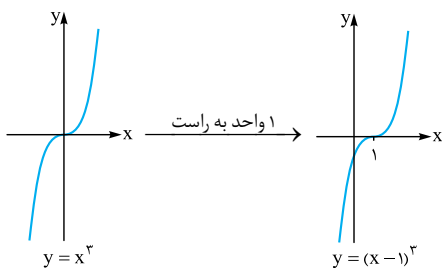
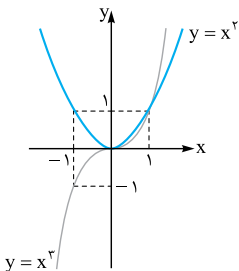
$$(1), (2) \Rightarrow x > 2$$

۷۴. درجه تابع f ، ۷ است. $\Rightarrow x^7(-x)^5 = -x^{12} \Rightarrow$ جمله با بیشترین درجه.

۷۵. با توجه به شکل روبه‌رو،

نمودار تابع $g(x) = x^3$

در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از نمودار $f(x) = x^2$ قرار دارد.



۶۰. صعودی؛ زیرا: $a \leq b \xrightarrow[\text{صعودی}]{f \text{ و } g} \begin{cases} f(a) \leq f(b) \\ g(a) \leq g(b) \end{cases}$

جمع طرفین $\rightarrow f(a) + g(a) \leq f(b) + g(b)$

$\Rightarrow (f+g)(a) \leq (f+g)(b) \Rightarrow f+g$ صعودی است.

۶۱. صعودی؛ زیرا: $a \leq b \xrightarrow[f \text{ نزولی است.}]{f} f(a) \geq f(b)$

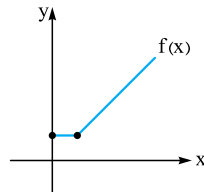
تابع kf صعودی است. $\Rightarrow kf(a) \leq kf(b) \xrightarrow[k < 0]{\text{طرفین} \times k}$

۶۲. درست؛ زیرا: $(-x)^2 \times x^3 = x^5$ جمله با بیشترین درجه

۶۳. نادرست؛ برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی‌شود. (تابع ثابت $f(x) = a$ و $a \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه صفر است.)

۶۴. نادرست؛ برای چندجمله‌ای بودن، کافی است توان متغیر x ، عدد حسابی باشد.

۶۵. نادرست؛ تابع به طور مثال تابع f که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد، در فاصله $[0, +\infty)$ صعودی است، اما اکیداً صعودی نیست:



۶۶. درست

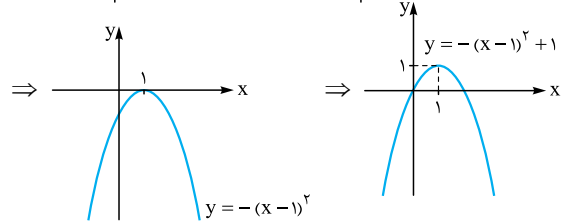
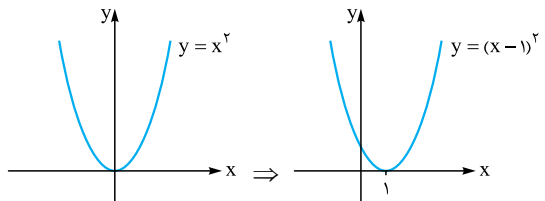
۶۷. نادرست؛ به عنوان مثال اگر $f(x) = x$ و $g(x) = 2x$ ، آن‌گاه f و g هر دو اکیداً صعودی هستند، اما تابع $f - g$ اکیداً نزولی است:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x - 2x = -x$$

۶۸. درست

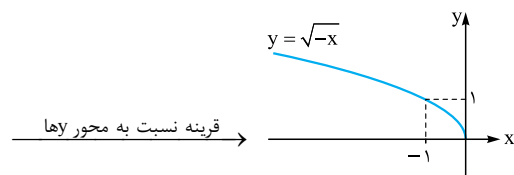
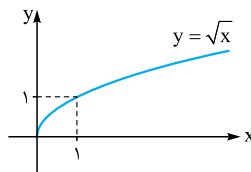
۶۹. نادرست؛ زیرا:

$$y = \underbrace{-x^2 + 2x - 1}_{= -(x-1)^2} + 1 = -(x-1)^2 + 1$$

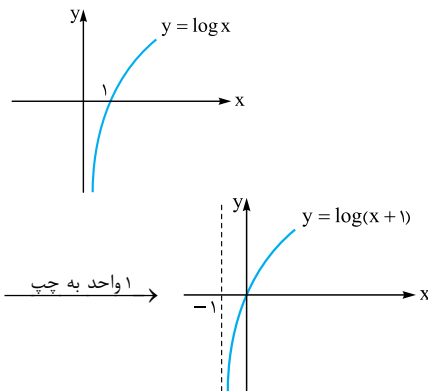
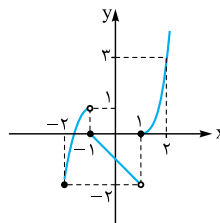
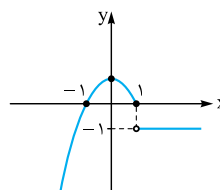


تابع در بازه $(-\infty, 3]$ نه صعودی است و نه نزولی.

۷۰. درست؛ زیرا:



۹۰

تابع در بازه $(-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.۹۱. تابع در بازه‌های $[-2, -1]$ و $[1, +\infty)$ صعودی و در بازه $(-1, 1)$ نزولی است.۹۲. تابع در $[-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ نزولی است.۹۳. فرض کنیم که $a \not\leq b$ (فرض خلف)، پس $a > b$ می‌باشد:

$$a > b \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(a) > f(b)$$

و این با فرض مسئله متناقض است، پس $a > b$ نیست و در نتیجه $a \leq b$ می‌باشد.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{27} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad ۹۴$$

$$\xrightarrow{y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ اکیداً نزولی است.}} 2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} \leq \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{2x-1} \leq 3^{-4} \quad ۹۵$$

$$\xrightarrow{y = 3^x \text{ اکیداً صعودی است.}} 2x-1 \leq -4 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2}$$

$$\log_7(3x+1) \geq \log_7(x-1) \quad ۹۶$$

$$\xrightarrow{y = \log_7 x \text{ اکیداً صعودی است.}} 3x+1 \geq x-1 \Rightarrow x \geq -1 \quad (۱)$$

$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3} \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 1 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow x > 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \leq 4 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad ۹۷$$

$$\xrightarrow{y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ اکیداً نزولی است.}} x+3 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow x \geq \frac{-47}{16} \quad (۱)$$

$$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow x \geq \frac{-47}{16}$$

۹۸. چون f اکیداً نزولی است، پس با حذف f از طرفین نامعادله، جهت نامساوی

عوض می‌شود:

$$f(a^2 + 5a - 1) \leq f(2a^2 + 2a + 1)$$

$$\xrightarrow{f \text{ نزولی اکید}} a^2 + 5a - 1 \geq 2a^2 + 2a + 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 \leq 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq a \leq 2$$

a	1	2
$(a-2)(a-1)$	+	-

قسمت دوم:

بخش پذیری و تقسیم

فصل ۱

درس ۲

صفحه ۱۸ تا ۲۲ کتاب درسی

سخن دبیر

هدف این درس پیدا کردن باقی‌مانده بدون عمل تقسیمه. آفرشم سه تا اتحاد فوئده می‌شه که حالت کلی اتحاد یاق و لاغره. معمولاً به سوال از این قسمت تو نهایی می‌بار.

قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای $p(x)$ که درجه آن بزرگ‌تر از صفر است، تقسیم کنیم آن‌گاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x) = 0$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کم‌تر است.● در واقع اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای $p(x)$ تقسیم کنیم،

طبق تقسیم مقابل می‌توان نوشت:

$$\overline{p(x)} \quad \overline{q(x)} \Rightarrow f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

$$\overline{r(x)}$$

قضیه تقسیم در حالتی که مقسوم علیه درجه اول است

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر عبارت درجه اول $ax + b$ تقسیم کنیم، باقی‌مانده تقسیم حتماً یک عدد مانند r خواهد بود و داریم:

$$f(x) = (ax + b)q(x) + r$$

قضیه باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از

$$r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

به زبان ساده قضیه فوق بیان می‌کند که برای یافتن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر عبارت درجه اول $ax + b$ ، کافی است ریشه

$$ax + b = 0 \text{ یعنی } x = -\frac{b}{a} \text{ را به جای } x \text{ در } f(x) \text{ قرار دهیم.}$$

مثال باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 10x - 7$ را بر $x - 2$ به دست آورید.✓ پاسخ: ابتدا ریشه مقسوم علیه را می‌یابیم: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ حالا $x = 2$ را به جای x در $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$\text{باقی‌مانده} = f(2) = 2(2)^3 + 5(2)^2 - 10 \times 2 - 7$$

$$= 16 + 20 - 20 - 7 = 9$$

پس باقی‌مانده برابر $r = 9$ می‌باشد.

تذکره در واقع اتحاد بالا نشان می‌دهد که $x^n - a^n$ بر $x + a$ وقتی بخش‌پذیر است که n زوج باشد و توجه کنید که اتحاد فوق از تبدیل a به $-a$ از اتحاد نکته (۱) به دست آمده است.

مثال عبارت $x^6 - 64$ را با عامل $x + 2$ تجزیه کنید.
پاسخ: می‌توان نوشت $x^6 - 64 = x^6 - 2^6$. چون توان‌ها زوج هستند، پس داریم:

$$x^6 - 2^6 = (x + 2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)$$

۳ اگر n عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه داریم:

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots + a^{n-1})$$

اگر کمی به اتحادی گفته‌شده توی ۱، ۲ و ۳ دقت کنی، متوجه می‌شی که در دو حالتی که پراکنش لاغر $x + a$ هستش، علامت بین جمله‌های تو پراکنش چاق یکی در میون مثبت و منفیه.

تذکره اتحاد بالا نشان می‌دهد که $x^n + a^n$ وقتی بر $x + a$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

توجه کنید که اتحاد فوق از تبدیل a به $-a$ از اتحاد نکته (۱) به دست آمده است.

مثال عبارت $x^7 + 128$ را با عامل $x + 2$ تجزیه کنید.
پاسخ: چون توان فرد است، با توجه به اتحاد قبل داریم:

$$x^7 + 128 = x^7 + 2^7 = (x + 2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)$$

پاسخ‌سؤالات

۹۹. نادرست؛ زیرا:
 $p(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

۱۰۰. درست؛ زیرا:
 $f(x) = x^3 + 2 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + 2 \neq 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
 $\Rightarrow f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3 = -8 + 8 + 3 = 3$

۱۰۱. نادرست؛ $x^n + a^n$ با شرط فرد بودن n ، بر $(x + a)$ بخش‌پذیر است؛
 $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$

$f(x) = x^n + a^n$
 با شرط فرد بودن n : $f(-a) = (-a)^n + a^n = 0$
۱۰۲. درست

$x - a = 0 \Rightarrow x = a$
 $f(x) = x^n - a^n \Rightarrow f(a) = a^n - a^n = 0$

۱۰۳. $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ؛ زیرا:
 $k = -2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + k(-1) - 1 = -k = 2$

۱۰۴. حداکثر ۱؛ زیرا درجه چندجمله‌ای باقی‌مانده باید از درجه چندجمله‌ای خارج قسمت یعنی $q(x)$ کم‌تر باشد.

۱۰۵. $x - k$

مثال اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^4 - 4x^3 + ax - 3$ بر $x + 1$ برابر -5 باشد، a را بیابید.
پاسخ: داریم:
 طبق فرض باید داشته باشیم:

$$f(-1) = -5 \Rightarrow (-1)^4 - 4(-1)^3 + a(-1) - 3 = -5$$

$$\Rightarrow 1 + 4 - a - 3 = -5 \Rightarrow 2 - a = -5 \Rightarrow a = 7$$

بخش‌پذیری

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x)$ ، اگر باقی‌مانده صفر شود، می‌گوییم $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده آن بر $x + 2$ برابر -3 باشد.

پاسخ:
 چون $f(x)$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است، پس $f(1) = 0$. از طرفی چون باقی‌مانده $f(x)$ بر $x + 2$ برابر -3 است $(x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2)$ ، پس $f(-2) = -3$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-2) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + a + b + 1 = 0 \\ -32 + 4a - 2b + 1 = -3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a + b = -5 \\ 4a - 2b = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = -10 \\ 4a - 2b = 28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = 3, a + b = -5 \xrightarrow{a=3} b = -8$$

تعمیم اتحاد چاق ولاغر

در ادامه سه اتحاد مهم که در واقع حالت کلی اتحاد چاق و لاغر هستند را می‌خوانیم:

چند نکته

۱ اگر n عدد طبیعی دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

تو پراکنش دوم توانای x یکی یکی کم می‌شن و هر دفعه به توانای a اضافه می‌شه. علامت بین جمله‌ها تو پراکنش دوم همش مثبت.

تذکره در واقع اتحاد بالا نشان می‌دهد که $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است. هم‌چنین گفته می‌شود $x^n - a^n$ با عامل $x - a$ تجزیه شده است.

مثال عبارت $x^6 - 64$ را با عامل $x - 2$ تجزیه کنید.
پاسخ: براساس اتحاد گفته‌شده می‌توان نوشت:

$$x^6 - 64 = x^6 - 2^6 = (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$

۲ اگر n عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه داریم:

$$x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots - a^{n-1})$$

اتحاد بالا می‌گه وقتی n زوج و پراکنش لاغر، $x + a$ باشد، هملاط پراکنش چاق یکی در میون مثبت و منفی می‌شه و باز هم از توانای x یکی یکی کم و به توانای a اضافه می‌شه.

۱۰۶. زوج بودن n: زیرا:

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a$$

$$f(x) = x^n - a^n \Rightarrow f(-a) = (-a)^n - a^n$$

$$\text{اگر } n \text{ زوج} \quad a^n - a^n = 0$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad ۱۰۷$$

$$\text{باقی مانده} \quad p(-\frac{1}{2}) = 8(-\frac{1}{2})^3 - 4(-\frac{1}{2})^2 + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad ۱۰۸$$

$$\text{باقی مانده} \quad p(-1) = 2 \Rightarrow 1 + k - 3 = 2 \Rightarrow k = 4$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad ۱۰۹$$

$$x + 2 \text{ بر } p(x) \text{ باقی مانده} \quad p(-2) = -8 - 2a + 1 = -2a - 7$$

$$x + 2 \text{ بر } q(x) \text{ باقی مانده} \quad q(-2) = 8 + 2 + 1 = 11$$

$$\text{طبق فرض داریم:} \quad p(-2) = q(-2) \Rightarrow -2a - 7 = 11 \Rightarrow a = -9$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad ۱۱۰$$

$$p(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (۱)$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$p(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \quad (۲)$$

با جای گذاری (۲) در (۱) داریم:

$$4a + 2a = -9 \Rightarrow 6a = -9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = a = -\frac{3}{2}$$

$$۱۱۱. \text{ باقی مانده } p(x) \text{ بر } x - 1 \text{ برابر } ۴ \text{ است. پس: } p(1) = ۴. \text{ هم چنین}$$

$$p(x) \text{ بر } x + 2 \text{ بخش پذیر است، پس } p(-2) = 0. \text{ بنابراین داریم:}$$

$$\begin{cases} p(1) = 4 \\ p(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 4 \\ -8 + 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a + b = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b = -3 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow 3a = 5$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{3}, a + b = 3 \Rightarrow \frac{5}{3} + b = 3$$

$$\Rightarrow b = 3 - \frac{5}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad ۱۱۲$$

$$\text{طبق فرض} \quad f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{باقی مانده} \quad f(2) = 4 - 2(2) - 3 = -3$$

$$۱۱۳. \text{ باید داشته باشیم } p(2) = 0 \text{ و } p(-1) = 3. \text{ با حل دستگاه، } a \text{ و } b \text{ را می یابیم:}$$

$$\begin{cases} p(2) = 0 \\ p(-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 2b - 2 = 0 \\ -1 + a - b - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ a - b = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 2a - 2b = 12 \end{cases}$$

$$\text{جمع طرفین} \rightarrow 6a = 6 \Rightarrow a = 1, b = -5$$

$$۱۱۴. \begin{cases} f(1) = 4 \\ f(-1) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 1 + a + b = 4 \\ -1 + 1 - a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 6 \end{cases}$$

$$\text{جمع طرفین} \rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4, a = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + x^2 - 2x + 4$$

$$f(2) = 8 + 4 - 4 + 4 = 12 \quad \text{باقی مانده } f(x) \text{ بر } x - 2 \text{ برابر است با:}$$

$$۱۱۵. \text{ چون درجه } 1 - x^2 \text{ برابر } ۲ \text{ است، پس باقی مانده تقسیم } f(x) \text{ بر}$$

$$x^2 - 1 \text{ به صورت } ax + b \text{ خواهد بود. بنابراین طبق قضیه تقسیم می توان}$$

$$f(x) = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$$

نوشت:

$$\text{از سوی دیگر بنا بر فرض داریم } f(1) = ۱ \text{ و } f(-1) = ۳. \text{ پس:}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + a + b = 1 \\ 0 - a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2, a = -1$$

$$\text{پس باقی مانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x^2 - 1 \text{ به صورت } -x + 2 \text{ می باشد.}$$

$$۱۱۶. \text{ طبق فرض، چند جمله ای } f(x) \text{ بر } (x + 2)(x - 1) \text{ به صورت } x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \text{ بخش پذیر است. یعنی داریم:}$$

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 + 4a - 2b - 2 = 0 \\ 1 + a + b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 10 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 10 \\ 2a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2, b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 2$$

$$\text{بنابراین باقی مانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x - 2 \text{ برابر است با:}$$

$$f(2) = 8 + 8 - 2 - 2 = 16 - 4 = 12$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad ۱۱۷$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \quad ۱۱۸$$

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5 \quad ۱۱۹$$

$$= (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

$$x^6 - 64 = x^6 - 2^6 \quad ۱۲۰$$

$$= (x - 2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \quad ۱۲۱$$

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \quad ۱۲۲$$

قسمت اول: مفهوم دوره تناوب و محاسبه مقدار

ماکزیمم و مینیمم دوره تناوب توابع سینوسی و کسینوسی

صفحه ۲۴ تا ۲۷ کتاب درسی

فصل ۲

درس ۱

سخن دبیر

تو این قسمت با مفهوم تناوب آشنا می شی و دوره تناوب توابع سینوسی و کسینوسی و نیز ماکزیمم و مینیمم این دو تابع فیلی مهمه، تو نوبی هم فیلی وقتا ارزش سوال دادن.

تابع متناوب

تابع f را متناوب گوئیم هرگاه عدد حقیقی و مثبت T موجود باشد، به طوری که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\text{الف) برای هر } x \in D_f, \text{ داشته باشیم } x \pm T \in D_f$$

$$\text{ب) } f(x \pm T) = f(x)$$

به کوچک ترین عدد مثبت T با دو ویژگی فوق، دوره تناوب f می گوئیم.