

مقدمه مؤلف

سلام

دانش‌آموزان عزیز و دبیران محترم! با توجه به تغییرات صورت گرفته در کنکور سراسری و اهمیت امتحان نهایی و تأثیر مستقیم آن بر قبولی در دانشگاه مصمم شدیم کتابی متناسب با این تغییرات فراهم کنیم. در این کتاب علاوه بر امتحانات نهایی داخل کشور، امتحانات نهایی خارج کشور هم جمع‌آوری شده است و سعی شده است با تقسیم‌بندی مطالب هر فصل به بخش‌های کوچک‌تر، متناسب با آموزش هر هفته دانش‌آموزان، تمرین کافی وجود داشته باشد.

در ابتدای هر فصل یک تحلیل آماری از سهم فصل و هر مبحث در امتحان نهایی آورده شده است که می‌تواند میزان اهمیت مطالب و تأثیر آن‌ها را مشخص کند. البته توجه کنید که تمام فصل‌ها و بخش‌ها در امتحان نهایی دارای اهمیت هستند.

ویژگی‌های کتاب در یک نگاه:

- ۱) ارائه بانک کامل سؤالات امتحان‌های نهایی (داخل و خارج کشور) در نظام آموزشی جدید
- ۲) چیدمان موضوعی سؤالات با رویکرد آموزشی
- ۳) ادغام سؤالات تکراری و مشابه برای پرهیز از حجیم‌شدن کتاب
- ۴) ارائه پاسخ‌های آموزشی کامل با اولویت بررسی پاسخ آموزش و پرورش
- ۵) ارائه درس‌نامه‌های کامل ولی در عین حال جمع‌وجور
- ۶) ارائه چند دوره امتحانات نهایی سال‌های اخیر در انتهای کتاب با ریزبارمبندی برای آشنایی با نحوه تصحیح اوراق
- ۷) ارائه سؤال‌هایی در سطح بالاتر برای دانش‌آموزان سخت‌کوش
- ۸) ارائه کتابی با رویکردی اقتصادی و قیمت مناسب در عین حال کامل

در پایان باید از تمامی عزیزانی که در به ثمر رسیدن این کتاب نقش داشته‌اند تشکر نمایم:

- ۱) آقایان دکتر ابودر نصری و دکتر کمیل نصری که مقدمات چاپ این کتاب را فراهم نمودند.
- ۲) مهندس احمد علی‌نژاد که در تمام مراحل تألیف کتاب، برادرانه و با حوصله و صبر زیاد در کنارم قرار داشت.
- ۳) مهندس بقایی و تیم خوب تولید که چاپ این کتاب، مرهون تلاش آن‌ها است.
- ۴) خانم لولوا مرادی به خاطر تمام دلسوزی‌هاشون و پیگیری‌هایی که انجام دادند.
- ۵) تمام اساتید و دوستان عزیزم که از آن‌ها در تمام مراحل زندگی آموخته‌ام.
- ۶) ویراستاران خوب کتاب، خانم‌ها زهرا جالینوسی و نرجس تیمناک و آقای حسن رحیمی
- ۷) صدای ملکوتی و دلنشین استاد محمدرضا شجریان که در تمام مراحل تألیف کتاب یار و همدم من بود. روح استاد شجریان عزیز شاد و یادشان گرامی.

علم دریایست بی حد و کنار طالب علم است غواص بحار
گر هزاران سال باشد عمر او او نگردد سیر خود از جست‌وجو
(مولانا)

فهرست مطالب

درسنامه
+
پاسخ

سؤال

فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول:

۲۵ ۵ ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

درس دوم:

۳۱ ۷ قسمت اول: وارون ماتریس و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول

۳۵ ۹ قسمت دوم: دترمینان

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

درس اول:

۳۸ ۱۱ آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

درس دوم:

۴۱ ۱۲ دایره

درس سوم:

۴۶ ۱۳ قسمت اول: بیضی

۵۱ ۱۵ قسمت دوم: سهمی

فصل سوم: بردارها

درس اول:

۵۶ ۱۷ قسمت اول: معرفی فضای دوبعدی

۵۷ ۱۸ قسمت دوم: معرفی فضای سه بعدی

۶۱ ۱۹ قسمت سوم: بردار

درس دوم:

۶۴ ۲۰ قسمت اول: ضرب داخلی

۶۷ ۲۲ قسمت دوم: ضرب خارجی

۷۰ ۲۳ قسمت سوم: حجم متوازی السطوح

ضمیمه: امتحانات نهایی

۷۹ ۷۳ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰

۸۰ ۷۴ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۰

۸۱ ۷۵ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱

۸۲ ۷۷ امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۱



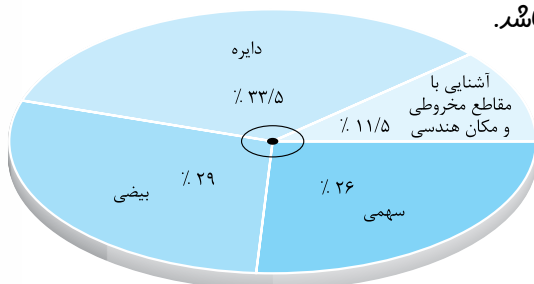
پروفسور مریم میرزاخانی

آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل ۲

مشاوره

فصل دوم بیشترین مقدار بارم را در بین ۳ فصل کتاب در امتحانات نهایی دارد. این فصل از کتاب درسی تمرین و کار در کلاس‌های خیلی مهمی دارد که بسیاری از آن‌ها در امتحانات نهایی استفاده شده‌اند. پس مهم‌ترین کار حل تمرین‌های کتاب و مطالعه دقیق این فصل است. از فصل ۲ تا صفحه ۴۶ در امتحان نوبت اول ۱۰ نمره و در کل از فصل ۲ در امتحان نهایی ۸ نمره سؤال طرح می‌شود. سهم هر سه قسمت در امتحانات نهایی به صورت نمودار دایره‌ای روبه‌رو می‌باشد.



دی (داخلی)	خرداد (نهایی)	شهریور و دی (نهایی)
۱۰ نمره	۸ نمره	۸ نمره

صفحه ۳۴ تا ۳۹ کتاب درسی

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

درس‌نامه ۱ را در صفحه ۳۸ ببینید.

درس ۱

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۹۵- مکان هندسی، مجموعه نقطای از صفحه (یا فضا) است که همه آن‌ها یک ویژگی داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

(دی ۱۴۰۰ - شهریور ۱۴۰۰ - شهریور ۹۹ - خرداد ۹۸)

۹۶- در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی (l) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک خواهد بود.

(خرداد ۱۴۰۰ خارج - دی ۹۹ - خرداد ۹۸)

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۹۷- مکان هندسی نقطای که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط است.

(دی ۹۷ - دی ۹۹ - دی ۹۷ خارج)

۹۸- صفحه‌ای با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس آن عبور نمی‌کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک بیضی است.

۹۹- در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

(دی ۱۴۰۰ - شهریور ۹۹ - شهریور ۹۸ - شهریور ۹۸ خارج)

۱۰۰- اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

(خرداد ۱۴۰۱ - خرداد ۱۴۰۰ خارج - دی ۹۸ خارج)

۱۰۱- مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه A است.

(خرداد ۱۴۰۰ - دی ۹۹ خارج - شهریور ۹۸ خارج - خرداد ۹۸ خارج)

۱۰۲- مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس‌خارج‌اند، دایره $C'(O, 2r)$ است.

(خرداد ۹۹)

۱۰۳- مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند، دو خط به موازات d و به فاصله d از d است.

(شهریور ۱۴۰۰ خارج - خرداد ۹۹ خارج - خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۰۴- نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید). (خرداد ۹۹)

۱۰۵- نقاط A ، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید).

(خرداد ۱۴۰۱ - شهریور ۹۸ - دی ۹۹ - دی ۹۸ - دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۰۶- نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید).

(دی ۹۹ - مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۰۷- دو خط متقاطع مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی که از این دو خط به یک فاصله باشند و از نقطه تقاطع دو خط به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند را به دست آورید.

۱۰۸- در مثلث ABC دو رأس B و C و مساحت مثلث ثابت‌اند، مکان هندسی نقطه A را به دست آورید.

۱۰۹- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه P یک سطح استوانه‌ای را قطع کند، در حالت‌های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)

(تمرین کتاب درسی)

۱۱۰- دایره $C(O, r)$ و خط d مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی از دایره که از خط d به فاصله m باشند را به دست آورید.

درس ۲

دایره

صفحه ۱۴۰ تا ۱۴۴ کتاب درسی

درس‌نامه ۲ را در صفحه ۴۱ ببینید.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱۱۱- نقطه $A(1, -2)$ در دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۱۲- شعاع دایره $x^2 + y^2 + 2x = 0$ برابر با است. (دی ۹۹ خارج)

■ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱۱۳- رابطه $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$ معادله یک دایره است. (شهریور ۹۹ - مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۱۴- معادله ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر $a^2 + b^2 < 4c$. (دی ۹۸ - دی ۹۹ خارج)

۱۱۵- نقطه $(-2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 + 2x = 0$ قرار دارد. (دی ۹۹ - شهریور ۱۴۰۰)

۱۱۶- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, 3)$ بوده و $M(1, 1)$ یک نقطه از آن باشد. (دی ۱۴۰۰ - مشابه شهریور ۹۸)

۱۱۷- وضعیت نقطه $A(1, -2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید. (خرداد ۹۹ - مشابه دی ۹۹ خارج)

۱۱۸- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(2, 1)$ بوده و بر خط $3x + 4y = -5$ مماس باشد. (خرداد ۱۴۰۰ - مشابه خرداد ۱۴۰۱ - مشابه شهریور ۹۹)

۱۱۹- معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(4, -1)$ و $B(-2, 1)$ دو سر قطری از آن باشد. (دی ۹۷ - مشابه دی ۹۹ خارج)

۱۲۰- حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 2x + 5y + a = 0$ بتواند معادله یک دایره باشد. (دی ۹۷ - مشابه دی ۹۸ خارج)

۱۲۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد. (دی ۹۹ - خرداد ۹۸)

۱۲۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ بگذرد و $y = 2x - 1$ شامل قطری از آن باشد. (دی ۹۹ خارج)

۱۲۳- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x^2 + y^2 = 2$ و $x + y = 2$ (شهریور ۹۸ - شهریور ۹۸ خارج)

ب) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ و $x - y - 1 = 0$ (شهریور ۹۹ - مشابه خرداد ۹۸ خارج)

پ) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ و $3x + y = 0$ (دی ۹۸ - مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۴- از نقطه $A(2, 3)$ روی دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

(شهریور ۱۴۰۰ - دی ۱۴۰۰ - خرداد ۹۸ - شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۵- معادله مماس رسم‌شده از نقطه $A(2, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x - y = 6$ را به دست آورید. (دی ۹۷ - دی ۹۸ خارج)

۱۲۶- وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + (y-1)^2 = 1$ (دی ۹۹)

ب) $x^2 + y^2 - 2x = 4$ و $x^2 + y^2 = 4$ (دی ۹۷)

پ) $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ (تمرین کتاب درسی)

ت) $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$ (تمرین کتاب درسی)

۱۲۷- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, -2)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ مماس خارج باشد. (دی ۹۸ - خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۸- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ باشد و با دایره به معادله $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$ مماس داخل باشد. (شهریور ۹۹ - مشابه شهریور ۹۸ خارج)

۱۲۹- وضعیت دایره $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

۱۳۰- معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x + y = 2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ ایجاد کند.

(شهریور ۱۴۰۰ - دی ۱۴۰۰ خارج - خرداد ۹۹ خارج - خرداد ۱۴۰۰ خارج - دی ۹۷ خارج - مشابه خرداد ۹۹)

۱۳۱- نقاط $A(-1, -1)$ ، $B(1, 1)$ و $C(1, -3)$ رئوس مثلث ABC هستند. (دی ۹۸ خارج)

الف) معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. ب) معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۱۳۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(3, -4)$ باشد و

الف) بر محور x مماس باشد. ب) بر محور y مماس باشد. ج) از مبدأ مختصات عبور کند.

۱۳۳- شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 + (p-3)xy - 8x + 8y + n = 0$ برابر یک است. حاصل $m + n + p$ کدام است؟

۱۳۴- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $A(3, 6)$ عبور کند و بر هر دو محور مختصات مماس باشد.

۱۳۵- مکان هندسی نقاطی از صفحه را به دست آورید که فاصله آن‌ها از نقطه $A(2, 1)$ ، $\sqrt{3}$ برابر فاصله آن‌ها از نقطه $B(6, -1)$ باشد.

۱۳۶- طول وترى که خط $3x - y - 1 = 0$ روی دایره $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ایجاد می‌کند، چه قدر است؟

۱۳۷- m را طوری تعیین کنید که خط $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 0$ مماس باشد.

صفحه ۴۷ تا ۵۰ کتاب درسی

قسمت اول: بیضی

درس ۳

درس‌نامه ۳ - قسمت اول را در صفحه ۴۶ ببینید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱۳۸- اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در بیضی است. (دی ۱۴۰۰ - خرداد ۹۹)

۱۳۹- اگر در بیضی، خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کم‌تر شده و بیضی به نزدیک‌تر می‌شود. (خرداد ۱۴۰۱ - شهریور ۱۴۰۰ خارج - دی ۹۹ خارج)

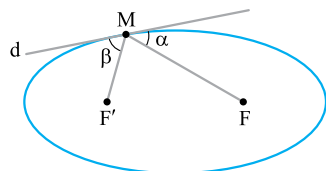
۱۴۰- اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر است. (شهریور ۹۹)

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۴۱- در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

(شهریور ۱۴۰۰ - دی ۹۸ - خرداد ۹۹ - دی ۹۸ خارج - دی ۱۴۰۰ خارج - دی ۹۸ خارج - خرداد ۱۴۰۰ خارج)

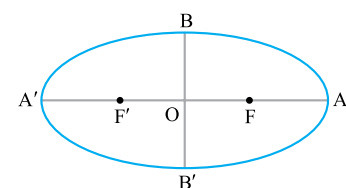
(خرداد ۱۴۰۰ - دی ۱۴۰۰ - خرداد ۹۹ خارج - خرداد ۹۸)



۱۴۲- در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

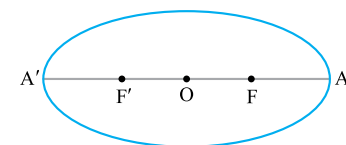
۱۴۳- در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد و زاویه $\angle FMF' = 50^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه

زاویه $\alpha = \beta = 60^\circ$ است. (خرداد ۱۴۰۱)



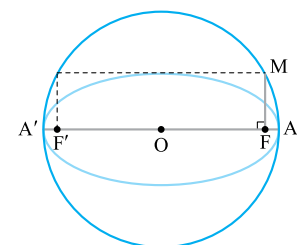
۱۴۴- در بیضی روبه‌رو $OA = OA' = a$ ، $OB = OB' = b$ و $OF = OF' = c$ ، ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2$.

(دی ۱۴۰۰ - خرداد ۱۴۰۰)



۱۴۵- در بیضی روبه‌رو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، ثابت کنید:

$AF = A'F'$. (شهریور ۱۴۰۰)



۱۴۶- قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره

را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است. (خرداد ۹۹ - دی ۹۸ خارج)

$$= 1 \times (-3)(-36 - (-44)) + (-1) \times 4(24 - (32))$$

$$+ 1 \times (-2)(-44 - (-48)) = -24 + 32 - 8 = 0$$

۹۲. دترمینان را روی ستون اول بسط می‌دهیم:

$$(-1)^{1+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+1} \times a \times \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 3(28 - 3) + 1 \times a(33 - (-7)) = 75 + 4 \cdot a = k + 4 \cdot a$$

$$\Rightarrow k = 75$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

۹۳

$$(a+d)A - |A|I = (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

به وضوح معلوم است که رابطه $A^T = (a+d)A - |A|I$ برقرار است. این رابطه به قضیه کیلی - همیلتون معروف است.

۹۴. با توجه به سؤال قبل داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 2 \times (-4) = 5$$

$$\text{الف) } A^T = (3 + (-1))A - (5)I = 2A - 5I$$

$$\Rightarrow m = 2, n = -5 \Rightarrow m + n = -3$$

$$\text{ب) } A^T = 2A - 5I \xrightarrow{\times A^{-1}} A \times \underbrace{A \times A^{-1}}_I = \underbrace{2A \times A^{-1}}_I - 5I \times A^{-1}$$

$$\Rightarrow A = 2I - 5A^{-1} \Rightarrow 5A^{-1} = 2I - A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{2}{5}I - \frac{1}{5}A \Rightarrow \beta = \frac{2}{5}, \alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{5}$$

۸۹. ابتدا ماتریس A و B را با توجه به ضابطه‌شان به دست می‌آوریم سپس آن‌ها را ضرب کرده و دترمینان را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \times 1 - 3 \times 1 & 2 \times 1 - 3 \times 2 \\ 2 \times 2 - 3 \times 1 & 2 \times 2 - 3 \times 2 \\ 2 \times 3 - 3 \times 1 & 2 \times 3 - 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

بسط روی ستون اول:

$$|A \times B| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \times 4 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 1 \times 4(3 - (-3)) + (-1) \times 2(-3 - (-15)) = 24 - 24 = 0$$

۹۰

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$|A| = (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 2(2 - (-6)) + (-1) \times 3(1 - (-2)) + 1 \times 2(-2 - (-2))$$

$$= 16 - 12 + 0 = 4$$

$$|B| = 3 \times (-1) \times 2 = -6$$

$$|2I_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\Rightarrow |A \times B| + |2I_3| = 4(-6) + 8 = -16$$

۹۱. الف) خیر، زیرا دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند.

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -4 \\ -8 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$|A \times B| = (-1)^{1+1} \times (-3) \times \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 4 \times \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \times (-2) \times \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 11 \end{vmatrix}$$

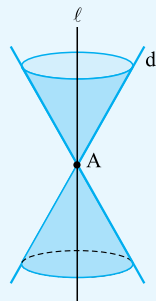
آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

صفحه ۳۳۴ تا ۳۹۹ کتاب درسی

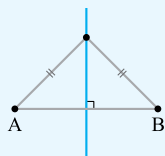
فصل ۲ درس ۱

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

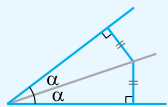
رویه مخروطی



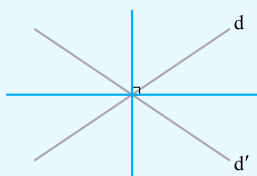
فرض کنید دو خط d و l متقاطع و غیرعمود باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. خط l را محور و خط d را مولد و نقطه A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم.



۳ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف AB است.



۴ مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است.



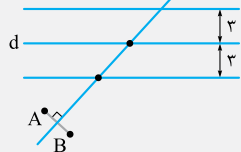
در واقع مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، نیمسازهای زوایای آن دو خط است که دو خط عمود بر هم است.

مثال دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه

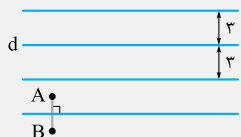
مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به

فاصله ۳ سانتی متر باشد. (بحث کنید)

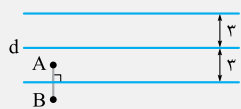
✓ پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف AB است و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر است، دو خط موازی d به فاصله ۳ از آن هستند؛ بنابراین تلاقی این دو مکان هندسی جواب است.



حالت اول: ۲ جواب. (عمودمنصف AB با d موازی نباشد.)



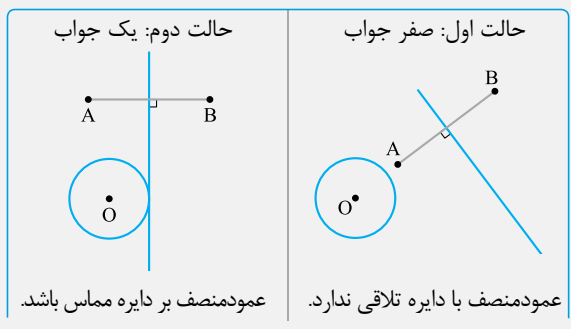
حالت دوم: صفر جواب (عمود منصف AB موازی d باشد و به فاصله ۳ از آن نباشد.)



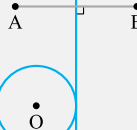
حالت سوم: بی شمار جواب (عمودمنصف AB موازی d و به فاصله ۳ از آن باشد.)

مثال مکان هندسی نقاطی از دایره C(O, R) که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند را به دست آورید.

✓ پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف پاره خط AB است. باید وضعیت تلاقی خط عمودمنصف با دایره مورد نظر را بررسی کنیم.

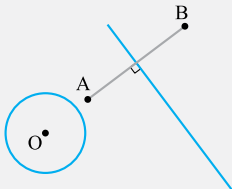


حالت دوم: یک جواب



عمودمنصف بر دایره مماس باشد.

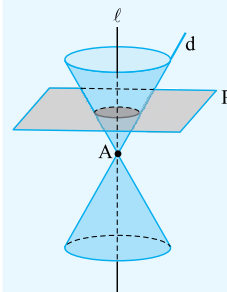
حالت اول: صفر جواب



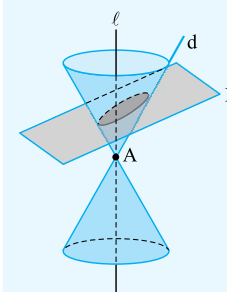
عمودمنصف با دایره تلاقی ندارد.

مقاطع مخروطی

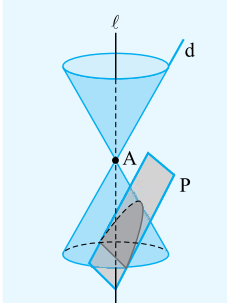
از برخورد یک صفحه با سطح مخروطی، شکل هایی به وجود می آید که به آن ها مقاطع مخروطی می گوئیم.



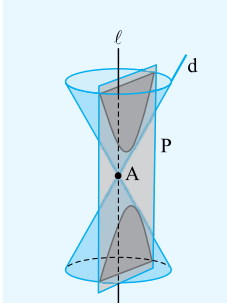
الف) در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است. در حالتی که صفحه از رأس A عبور کند، شکل حاصل یک نقطه است.



ب) در حالتی که صفحه P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.



ج) اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. در حالتی که صفحه از رأس سطح مخروطی عبور کند (شامل مولد باشد) فصل مشترک آن ها یک خط است.

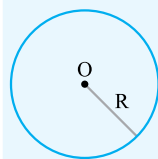


د) اگر صفحه P به گونه ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد (صفحه موازی محور l باشد) در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. اگر صفحه شامل محور l باشد، شکل حاصل، دو خط متقاطع است.

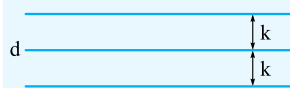
مکان هندسی

مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آن ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

مکان های هندسی مهم در صفحه



۱ مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت R باشند، دایره ای به مرکز O و شعاع R است.



۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k قرار دارند، دو خط موازی با d و به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.

حالت اول: یک جواب دو عمودمنصف متقاطع باشند.	حالت دوم: صفر جواب دو عمودمنصف موازی باشند.
حالت سوم: بی شمار جواب دو عمودمنصف بر هم منطبق باشند.	

۱۰۵. مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین تلاقی دایره و این عمودمنصف جواب مسئله است.

حالت اول: دو جواب دایره و عمودمنصف متقاطع باشند.	حالت دوم: یک جواب دایره و عمودمنصف مماس باشند.
حالت سوم: صفر جواب دایره و عمودمنصف یکدیگر را قطع نکنند.	

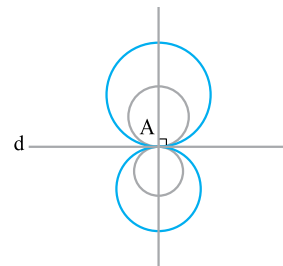
۱۰۶. مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌مترند، یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ است.

حالت سوم: دو جواب

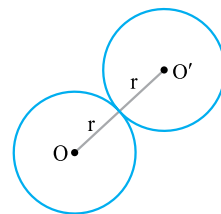
عمودمنصف دایره را در دو نقطه قطع کند.

پاسخ سؤالات

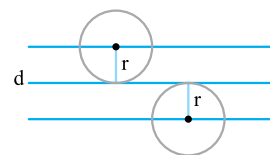
۹۵. مشترک
۹۶. بیضی
۹۷. درست
۹۸. نادرست؛ جواب درست سهمی است.
۹۹. درست
۱۰۰. درست
۱۰۱. نادرست؛ جواب درست، خطی عمود بر d در نقطه A است.



۱۰۲. درست؛ فاصله دو مرکز دایره از هم $2r$ است پس جواب دایره‌ای به مرکز O و شعاع $2r$ است.



۱۰۳. درست؛ در واقع فاصله مرکز از خط d برابر r است که دو خط موازی با d و به فاصله r از آن است.



۱۰۴. مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است.

مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله‌اند، عمودمنصف CD است. تلاقی این دو عمودمنصف جواب مسئله است.

❶ اگر صفحه P با محور استوانه

(L) موازی باشد، سطح مقطع

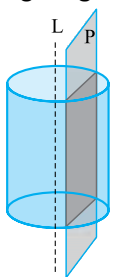
مستطیل است. البته

اگر سطح استوانه‌ای

تا بی‌نهایت ادامه

داشته باشد، جواب

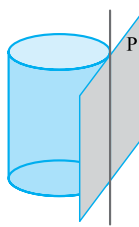
دو خط موازی است.



❷ صفحه P با سطح جانبی

استوانه مماس باشد که سطح

مقطع یک خط است.



۱۱۰. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله m هستند دو خط موازی d و به فاصله m از آن است، حال باید تلاقی این دو خط و دایره C را بررسی کنیم.



صفر جواب

دو خط و دایره تلاقی ندارند.



یک جواب

دایره بر یکی از خط‌ها مماس باشد.



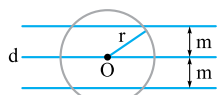
دو جواب

دایره یکی از خطوط را در ۲ نقطه قطع کند.



سه جواب

دایره بر یکی از خطوط مماس و دیگری را قطع کند.

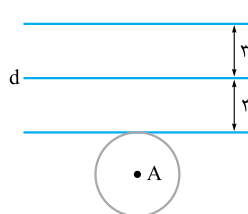


چهار جواب

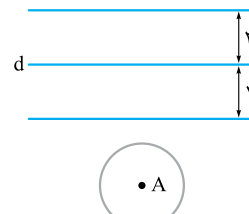
دایره هر دو خط را قطع کند.

مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌مترند، دو خط موازی d به فاصله ۳ در دو طرف آن است. تلاقی این دو مکان هندسی جواب است.

حالت دوم: یک جواب

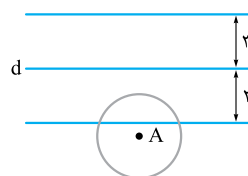


حالت اول: صفر جواب



دایره هیچ‌یک از دو خط را قطع نکند. دایره بر یکی از دو خط مماس باشد.

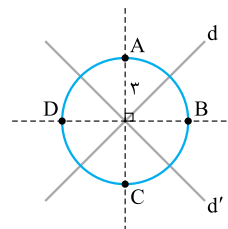
حالت سوم: دو جواب



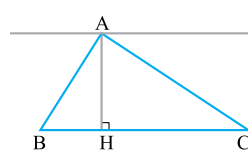
دایره یکی از دو خط را قطع کند.

تذکره چون قطر دایره کوچک‌تر از فاصله بین دو خط است، پس هیچ‌گاه نمی‌تواند بر دو خط مماس یا متقاطع باشد.

۱۰۷. مکان هندسی نقاطی که از این دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، نیمساز زوایای بین دو خط است. مکان هندسی نقاطی که از نقطه تلاقی دو خط به فاصله ۳ سانتی‌متر است، دایره‌ای به مرکز آن نقطه و شعاع ۳ است. جواب، اشتراک این دو مکان هندسی است که ۴ نقطه A, B, C, D است.

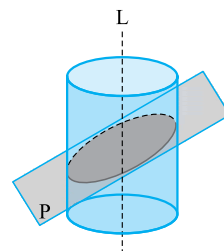


۱۰۸. می‌دانیم مساحت مثلث برابر $S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2}$ است. چون مساحت و BC ثابت‌اند پس باید AH ثابت باشد، بنابراین فاصله A از BC عددی ثابت است پس A روی دو خط موازی با BC و به فاصله AH از آن قرار دارد.

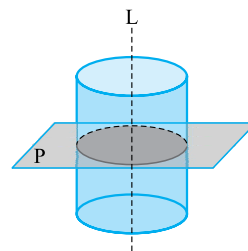


۱۰۹

❶ صفحه P بر محور L عمود نباشد و آن را قطع کند که شکل حاصل بیضی است.



❷ صفحه P بر محور استوانه عمود باشد، در این حالت سطح مقطع دایره است.



دایره

صفحه ۴۰ تا ۴۶ کتاب درسی

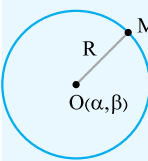
فصل ۲ درس ۲

دایره

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ثابتی (شعاع دایره) باشند.

معادله دایره

اگر $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد و نقطه $M(x, y)$ روی این دایره با شعاع R باشد، داریم:



$$|OA| = R \Rightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = R$$

$$\Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

به این معادله، معادله استاندارد دایره می‌گوییم.

$$\Rightarrow \text{دایره} \begin{cases} \text{مرکز: } O(\frac{3}{4}, -1) \\ \text{شعاع: } R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{4} \end{cases}$$

وضعیت نقطه و دایره

مختصات نقطه $M(x_1, y_1)$ را در معادله دایره $P(x, y) = 0$ قرار می‌دهیم و داریم:

$P(x_1, y_1) < 0 \Leftrightarrow$ نقطه داخل دایره است.

$P(x_1, y_1) = 0 \Leftrightarrow$ نقطه روی دایره است.

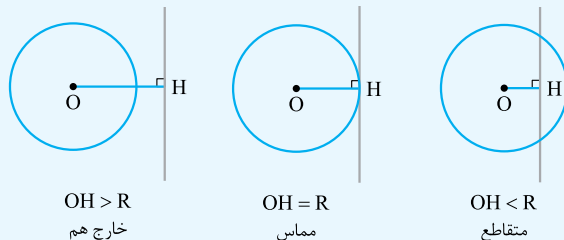
$P(x_1, y_1) > 0 \Leftrightarrow$ نقطه خارج دایره است.

مثال وضعیت نقطه $M(3, -1)$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 3 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ: $P(3, -1) = 3^2 + (-1)^2 - 2(3) + 8(-1) - 3 = 9 + 1 - 6 - 8 - 3 < 0$
نقطه داخل دایره قرار دارد.

وضعیت خط و دایره

فاصله مرکز دایره را از خط محاسبه می‌کنیم و داریم:



یادآوری فاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ از خط $d: ax + by + c = 0$ برابر با

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ است.}$$

مثال وضعیت خط $3x + 4y + 6 = 0$ و دایره $x^2 + y^2 - 2y = 3$ را نسبت به هم مشخص کنید.

پاسخ: ابتدا مرکز و شعاع دایره را مشخص کنیم:

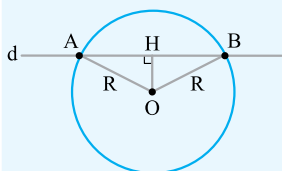
$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O(0, 1) \\ \text{شعاع: } R = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4 + 12} = 2 \end{cases}$$

$$\text{فاصله مرکز دایره از خط} = OH = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 1 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\Rightarrow OH = R \Rightarrow \text{مماس بر هم}$$

طول وتر ایجاد شده توسط خط متقاطع با دایره

اگر خط d دایره را در نقاط A و B قطع کند، داریم:



$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow$$

$$AH = \sqrt{R^2 - OH^2}$$

$$AB = 2AH \Rightarrow$$

$$AB = 2\sqrt{R^2 - OH^2}$$

مثال معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(3, -2)$ و از نقطه $M(1, 4)$ عبور کند.

پاسخ: فاصله هر نقطه روی دایره تا مرکز دایره برابر شعاع است.

$$|OM| = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = R$$

$$\text{معادله دایره: } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 40$$

معادله ضمیمی یا گسترده دایره

مثال بررسی کنید چه زمانی معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است؟

پاسخ: ابتدا با کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، معادله را به معادله استاندارد دایره تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + ax + y^2 + by = -c \Rightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$\text{تهی} \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c < 0$$

$$\text{نقطه مورد نظر: } O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 0 \Rightarrow \text{نقطه}$$

$$\text{دایره} \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز } O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \\ \text{شعاع } R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases}$$

تذکر در معادله دایره، همواره ضریب x^2 و y^2 با هم برابر است و ضریب جمله xy ، صفر است.

تذکر فرمول‌های به دست آمده زمانی برقرارند که ضریب x^2 و y^2 برابر یک باشد و اگر یک نبود ابتدا کل معادله را به ضریب آن‌ها تقسیم می‌کنیم و سپس از فرمول‌های فوق استفاده می‌کنیم.

مثال بررسی کنید کدام یک از معادلات زیر، معادله دایره است؟

(مثال کتاب درسی)

$$\text{الف) } x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$$

$$\text{ب) } x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$$

$$\text{ج) } 2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$$

پاسخ: الف) با توجه به معادله داده شده $a = -2, b = -6, c = -1$
 $a^2 + b^2 - 4c = 4 + 36 + 4 = 44 > 0$
است و داریم:

$$\Rightarrow \text{دایره} \begin{cases} \text{مرکز: } O(1, 3) \\ \text{شعاع: } R = \frac{1}{2} \sqrt{44} = \sqrt{11} \end{cases}$$

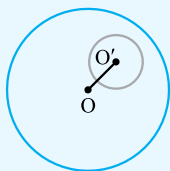
در این معادله $a = 2, b = 3, c = 4$ است و داریم:

$$\text{تهی} \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 4 + 9 - 16 = -3 < 0$$

ب) ابتدا معادله را تقسیم بر 2 می‌کنیم و سپس از روابط استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y - 1 = 0, a = -\frac{3}{2}, b = 2, c = -1$$

$$a^2 + b^2 - 4c = \frac{9}{4} + 4 + 4 = \frac{41}{4} > 0$$

داخل هم $d < |R - R'|$ **مثال** وضعیت دو دایره زیر را به دست آورید. (تمرین کتاب درسی)

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ و } x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$$

پاسخ: ✓

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O(0,0) \\ \text{شعاع: } R=1 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O'(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}) \\ \text{شعاع: } R' = \frac{1}{2}\sqrt{18+18-20} = 2 \end{cases}$$

$$d = OO' = \sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0)^2 + (\frac{3\sqrt{2}}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{18}{4} + \frac{18}{4}}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

دایره‌ها مماس خارجی‌اند. $R + R' = 1 + 2 = 3 \Rightarrow d = R + R' \Rightarrow$ **پاسخ سؤالات**

$$P(1, -2) = 1^2 + (-2)^2 - 2(1) + 2(-2)$$

۱۱۱

$$= 1 + 4 - 2 - 4 = -1 < 0 \Rightarrow \text{داخل دایره}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 0 + 0} = 1$$

۱۱۲

$$a^2 + b^2 - 4c = 4 + 16 - 40 = -20 < 0 \Rightarrow \text{تهی} \quad \text{۱۱۳ نادرست}$$

$$\text{۱۱۴ نادرست؛ برای دایره شدن باید } a^2 + b^2 - 4c > 0 \text{ باشد.}$$

$$P(3, -2) = 3^2 + (-2)^2 + 2(3) = 9 + 4 + 6 \neq 0 \quad \text{۱۱۵ نادرست}$$

$$\text{۱۱۶ فاصله } O \text{ تا } M \text{ برابر شعاع دایره است.}$$

$$OM = R = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

$$P(1, -2) = 1^2 + (-2)^2 - 2 \times 1 + 2(-2)$$

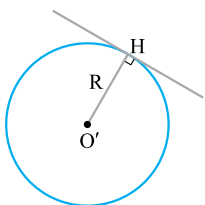
۱۱۷ راه اول:

$$= 1 + 4 - 2 - 4 = -1 < 0 \Rightarrow \text{نقطه داخل دایره است.}$$

راه دوم: مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -1)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \sqrt{2} \quad \left. \begin{aligned} OA &< R \Rightarrow \text{نقطه داخل} \\ OA &= \sqrt{(1-1)^2 + (-2-(-1))^2} = 1 \end{aligned} \right\} \text{دایره است.}$$



۱۱۸ فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر با شعاع دایره است.

$$O'H = R = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 1 + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

مثال طول وتری که دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x = \frac{19}{5}$ از خط به معادله $y = 2x$ جدا می‌کند، چه قدر است؟

پاسخ: ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

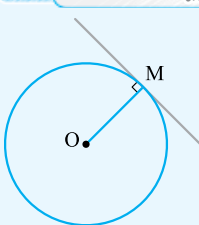
$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{19}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O(1,0) \\ \text{شعاع: } R = \frac{1}{2}\sqrt{4+0-4(-\frac{19}{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{96}{5}} = \sqrt{\frac{24}{5}} \end{cases}$$

فاصله O را از خط $2x - y = 0$ به دست می‌آوریم.

$$OH = \frac{|2 \times 1 - 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AB = 2\sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{\frac{24}{5} - \frac{4}{5}} = 2\sqrt{\frac{20}{5}} = 2 \times 2 = 4$$

رسم مماس از نقطه‌ای روی دایره

اگر نقطه M روی دایره‌ای به مرکز O باشد، شیب OM را به دست می‌آوریم و چون خط مماس بر دایره بر OM عمود است، پس شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب OM است و با داشتن مختصات نقطه M معادله خط مماس را می‌نویسیم.

مثال معادله خط مماس بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ از نقطه $M(4, 2)$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا بررسی می‌کنیم نقطه M روی دایره باشد:

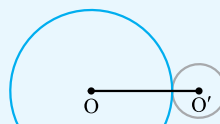
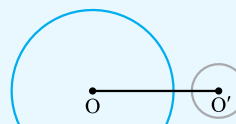
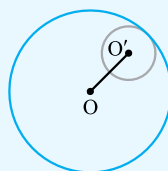
$$f(4, 2) = 16 + 4 - 8 + 8 - 20 = 0$$

پس نقطه روی دایره است، حالا مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \Rightarrow \text{مرکز: } O(1, -2)$$

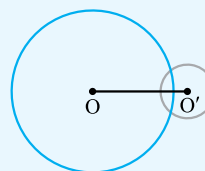
$$\text{شیب خط مماس} = -\frac{2-2}{1-4} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{شیب OM}$$

$$\text{معادله خط مماس: } y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 4)$$

وضعیت دو دایره نسبت به هماگر فاصله مرکزهای دو دایره یعنی طول $O'O$ را d در نظر بگیریم، داریم:مماس خارجی $d = R + R'$ خارج هم $R + R' < d$ 

مماس داخلی

$$d = |R - R'|$$



مقاطع

$$|R - R'| < d < R + R'$$

$$\left. \begin{aligned} O(-\frac{a}{\sqrt{c}}, -\frac{b}{\sqrt{c}}) &= (2, 2) \\ R &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{16 + 16 - 28} = 1 \\ OH &= \frac{|3 \times 2 + 2|}{\sqrt{9+1}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \end{aligned} \right\}$$

$OH > R \Rightarrow$ خط، خارج از دایره قرار دارد.

۱۲۴. ابتدا مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{\sqrt{c}}, -\frac{b}{\sqrt{c}}) = (1, 1)$$

سپس شیب خط OA را به دست می‌آوریم:

$$OA \text{ شیب} = m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب OA است، پس: $m' = -\frac{1}{2}$
معادله خط مماس: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$

۱۲۵. ابتدا مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

$$O(-\frac{a}{\sqrt{c}}, -\frac{b}{\sqrt{c}}) = (1, \frac{1}{2})$$

شیب OA را به دست می‌آوریم:

$$OA \text{ شیب} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{2 - 1} = \frac{5}{2}$$

شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب OA است، پس: $m' = -\frac{2}{5}$
معادله مماس: $y - 3 = -\frac{2}{5}(x - 2)$

۱۲۶. در هر مورد مرکز و شعاع دایره‌ها را به دست می‌آوریم و سپس براساس فاصله دو مرکز وضعیت را مشخص می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} O(1, 0), R &= 1 \\ O'(0, 1), R' &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow OO' = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} = d$$

$R - R' = 0 < d < R + R' = 2 \Rightarrow$ متقاطع

$$\left. \begin{aligned} O(0, 0), R &= 2 \\ O'(1, 0), R' &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{4 + 0 + 16} = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{20} = \sqrt{5} \\ OO' &= \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1 = d \end{aligned} \right\}$$

$R' - R = \sqrt{5} - 2 < d = 1 < R + R' = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow$ متقاطع

$$\left. \begin{aligned} O(0, 0), R &= 1 \\ O'(3, 1), R' &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{36 + 4 - 36} = 1 \\ OO' &= \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10} = d \end{aligned} \right\}$$

$d = \sqrt{10} > R + R' = 2 \Rightarrow$ خارج هم

$$\left. \begin{aligned} O(0, 0), R &= 2 \\ O'(4, 2), R' &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{64 + 16 - 76} = 1 \\ OO' &= \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned} \right\}$$

$d = 2\sqrt{5} > R + R' = 3 \Rightarrow$ خارج هم

۱۱۹. وسط پاره خط AB ، مرکز دایره و نصف طول آن، شعاع دایره است.

$$AB \text{ وسط پاره خط } M(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+(-1)}{2}) = (1, 0)$$

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 10$$

۱۲۰. مختصات نقطه M وسط دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر با $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ است.

۱۲۱. برای دایره شدن باید $a^2 + b^2 - 4c > 0$ باشد.

$$a^2 + b^2 - 4c = (-3)^2 + 5^2 - 4a > 0 \Rightarrow 9 + 25 > 4a$$

$$\Rightarrow a < \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$

۱۲۱. محل تلاقی هر دو قطر، مرکز دایره است. بعد از به دست آمدن مرکز دایره، فاصله آن از خط مماس برابر با شعاع دایره است.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2, y = -1 \Rightarrow O(2, -1)$$

$$OH = R = \frac{|4 \times 2 + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

معادله دایره‌ای به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع $R = 2$ را می‌خواهیم و داریم:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

۱۲۲. مرکز دایره روی قطر قرار دارد پس مرکز به صورت $O(\alpha, 2\alpha - 1)$ است.

باید فاصله O تا A و B یکسان باشد، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha-1-2)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (2\alpha-1)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 10 = \alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow -4\alpha = -10 \Rightarrow 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

پس مرکز دایره $O(0, -1)$ است.

$$R = OA = \sqrt{(1-0)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-0)^2 + (y+1)^2 = 10$$

۱۲۳. در هر قسمت فاصله مرکز دایره از خط را به دست می‌آوریم و نسبت به شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} O(0, 0), R &= \sqrt{2} \\ OH &= \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} OH = R \Rightarrow \text{خط مماس بر دایره است}$$

$$\left. \begin{aligned} O(-\frac{a}{\sqrt{c}}, -\frac{b}{\sqrt{c}}) &= (1, -2) \\ R &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{4 + 16 - 12} = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{8} = \sqrt{2} \\ OH &= \frac{|1 - (-2) - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$

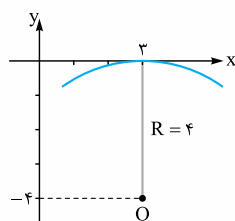
$OH = R \Rightarrow$ خط مماس بر دایره است.

$$\frac{1-(-1)}{1-1} = \infty$$

شیب OB برابر است با:

پس شیب خط عمود بر آن برابر صفر است و معادله مماس به صورت زیر است:

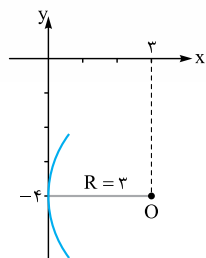
$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$



۱۳۲. چون دایره بر محور xها

مماس است، پس: $R=4$

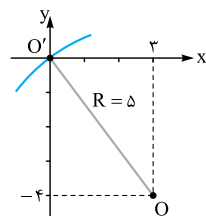
$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$$



چون دایره بر محور yها مماس

است، پس: $R=3$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$$



چون دایره، از مبدأ عبور می کند،

پس: $OO' = R = 5$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

۱۳۳. می دانیم در دایره ضریب x^2 و y^2 با هم برابر است پس $m=2$ و دردایره ضریب xy برابر صفر است، پس:

$$p-3=0 \Rightarrow p=3$$

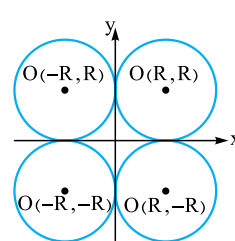
کل معادله را بر ۲ تقسیم می کنیم و داریم:

$$\rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y + \frac{n}{2} = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 2n} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{32 - 2n} = 2 \Rightarrow 32 - 2n = 4 \Rightarrow n = 14$$

$$m+n+p = 2+14+3 = 19$$



۱۳۴. اگر دایره ای به شعاع R بر هر دو

محور مختصات مماس باشد مختصات

مرکز آن به صورت $O(\pm R, \pm R)$

است و معادله کلی این دایره ها به صورت

زیر است.

$$(x \pm R)^2 + (y \pm R)^2 = R^2$$

چون نقطه $A(3,6)$ در ناحیه اول است پس مرکز دایره هم در ناحیهاول است و به صورت $O(R, R)$ است و معادله دایره به صورت

$$(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

می دهیم تا R به دست آید.

$$\Rightarrow 9 - 6R + R^2 + 36 - 12R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 18R + 45 = 0 \Rightarrow (R-3)(R-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R=3 \\ R=15 \end{cases}$$

$$\text{معادله دایره ها: } \begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ (x-15)^2 + (y-15)^2 = 225 \end{cases}$$

۱۲۷. ابتدا مرکز و شعاع دایره داده شده را به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-1, 2) \\ R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = 3 \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5 = d$$

$$d = R + R' \Rightarrow 5 = R + 3 \Rightarrow R = 2$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

۱۲۸. ابتدا مرکز و شعاع دایره داده شده را به دست می آوریم.

$$O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (4, -2)$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 64} = 2$$

$$d = OO' = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$d = |R - R'| \Rightarrow 5 = |R - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R=7 \\ R=-3 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-0)^2 + (y-1)^2 = 49$$

۱۲۹. مرکز و شعاع دایره داده شده را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (3, 1) \\ R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 1 \end{cases}$$

$$O(0,0), R=1$$

$$d = OO' = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$d = \sqrt{10} > R + R' = 2 \Rightarrow \text{دو دایره خارج هم قرار دارند.}$$

۱۳۰. می دانیم عمود OH از وسط وتر AB می گذرد، بنابراین:

$$OH = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R^2 = OA^2 = OH^2 + AH^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-0)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2}$$

۱۳۱. در معادله ضمنی دایره، مختصات هر ۳ نقطه را قرار می دهیم و از حل

دستگاه، ضرایب مجهول را به دست می آوریم:

$$\text{معادله ضمنی دایره: } x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\begin{cases} A(-1, -1) \Rightarrow 1+1-a-b+c=0 \\ B(1, 1) \Rightarrow 1+1+a+b+c=0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 4+2c=0 \\ \Rightarrow c=-2 \end{cases}$$

$$C(1, -3) \Rightarrow 1+9+a-3b+c=0 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) و $c=-2$ داریم:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-3b=-8 \end{cases} \xrightarrow{-} \begin{cases} 4b=8 \\ \Rightarrow b=2 \end{cases} \Rightarrow a=-2$$

$$\text{معادله دایره: } x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -1)$$

مرکز دایره را به دست می آوریم.

راه دوم: می‌توانیم معادله دایره و خط را تلاقی دهیم و چون مماس هستند باید $\Delta = 0$ شود و m را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} x^2 + (mx+2)^2 - 2x &= 0 \Rightarrow x^2 + m^2 x^2 + 4mx + 4 - 2x = 0 \\ \Rightarrow x^2(1+m^2) + x(4m-2) + 4 &= 0 \\ \Delta = (4m-2)^2 - 4(1+m^2) &= 0 \\ \Rightarrow 16m^2 - 16m + 4 - 4 - 4m^2 &= 0 \\ \Rightarrow 12m^2 - 16m &= 0 \Rightarrow m = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

قسمت اول:

بیضی

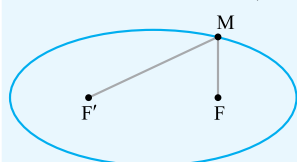
فصل ۲

درس ۳

صفحه ۴۷ تا ۵۰ کتاب درسی

بیضی

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت، یک مقدار ثابت باشد. (آن مقدار ثابت باید بیشتر از فاصله دو نقطه باشد). آن دو نقطه ثابت را **کانون‌های بیضی** می‌نامیم.



کانون‌های بیضی را F و F' می‌نامیم و فاصله این دو نقطه را **فاصله کانونی بیضی** می‌گوییم و با $2c$ نمایش می‌دهیم پس $FF' = 2c$. همچنین مقدار ثابت بیضی را با $2a$ نمایش می‌دهیم.

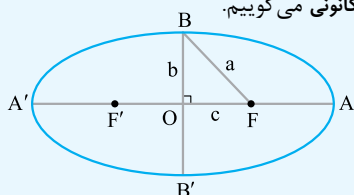
$$MF + MF' = 2a$$

وضعیت نقطه و بیضی

اگر برای نقطه M داشته باشیم $MF + MF' > 2a$ ، در این صورت M خارج بیضی است.
اگر برای نقطه M داشته باشیم $MF + MF' < 2a$ ، در این صورت M داخل بیضی است.
اگر برای نقطه M داشته باشیم $MF + MF' = 2a$ ، در این صورت M روی بیضی است.

نقاط مهم در بیضی

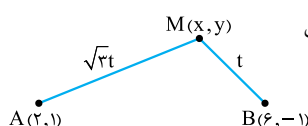
قطر بزرگ بیضی: اگر FF' را امتداد دهیم، بیضی را در دو نقطه A و A' قطع می‌کند. AA' را قطر بزرگ بیضی می‌گوییم و طول آن برابر $2a$ است (قطر بزرگ را محور کانونی بیضی هم می‌گوییم). A و A' را دو سر قطر بزرگ یا رئوس کانونی می‌گوییم.



مرکز بیضی: وسط پاره‌خط FF' و AA' بر هم منطبق است و آن را O می‌نامیم که مرکز بیضی است.

قطر کوچک بیضی: اگر از O خطی بر AA' عمود کنیم بیضی را در B و B' قطع می‌کند. BB' را قطر کوچک بیضی می‌نامیم و طول آن $2b$ است. (قطر کوچک بیضی را محور ناکانونی بیضی می‌نامیم). B و B' را دو سر قطر کوچک یا رئوس ناکانونی می‌نامیم.

۱۳۵. اگر نقطه $M(x, y)$ روی این مکان هندسی باشد، داریم:



$$MA = \sqrt{3} \times MB$$

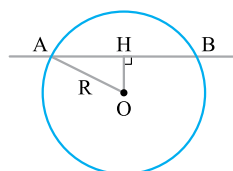
$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} &= \sqrt{3} \times \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} \\ \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 &= 3(x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1) \\ = 3x^2 - 36x + 108 + 3y^2 + 6y + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 32x + 8y + 106 &= 0 \\ \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 16x + 4y + 53 &= 0 \end{aligned}$$

مرکز دایره: $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (8, -2)$

$$\begin{aligned} \text{شعاع دایره: } R &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{256 + 16 - 212} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{60} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

پس دایره‌ای به مرکز $O(8, -2)$ و شعاع $R = \sqrt{15}$ است.

۱۳۶. ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:



$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, 0)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{16 + 0 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5}$$

فاصله مرکز تا خط را به دست می‌آوریم:

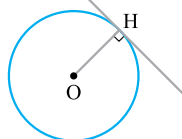
$$OH = \frac{|3 \times 2 - 0 - 1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = (\sqrt{5})^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)^2 = 5 - \frac{25}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$AH = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow AB = 2AH = \sqrt{10}$$

۱۳۷. راه اول، باید فاصله مرکز دایره تا خط داده شده

را برابر شعاع قرار دهیم.



$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, 0)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 + 0} = 1$$

$$y = mx + 2 \Rightarrow mx - y + 2 = 0 \Rightarrow OH = \frac{|m - 0 + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow OH = R \Rightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Rightarrow |m+2| = \sqrt{m^2+1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1$$

$$\Rightarrow 4m = -3 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$